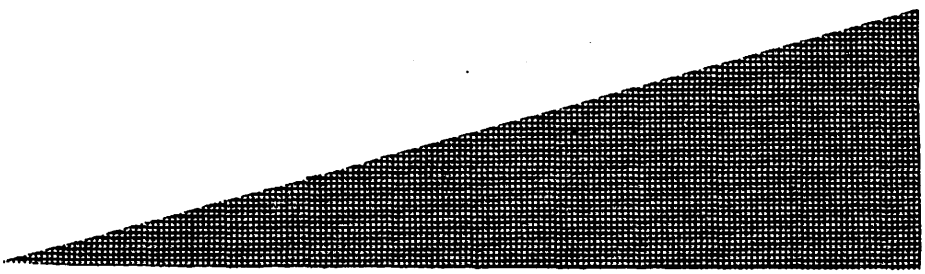
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. dr. ing. AURELIAN STAN

MIRCEA GRUMĂZESCU



PROBLEME DE MECANICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

Bun de tipar : 13.12.1973 ; Coli de tipar : 28 ;
Tiraj : 8000+110 expl. legate.

Intreprinderea Poligrafică „Banat" Timișoara, Calea Aradului 1/A.
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Comanda nr. 234/5080

PREFAȚĂ

Lucrarea este întocmită pe baza materialului conținut de cele două ediții anterioare intitulate Culegere de probleme de mecanică tehnică, *elaborate de aceiași autori și apărute în anii 1953 și 1956 la Editura tehnică.*

Față de edițiile anterioare, prezenta lucrare aduce o serie de modificări substanțiale, atît în structură cît și în modul de prezentare a conținutului. Astfel:

— s-a făcut o nouă împărțire a materialului pe capitole, reducînd numărul acestora de la XXXIV la XXI;

— s-a restructurat modul de prezentare a părților teoretice, care preced aplicațiile din cadrul fiecărui capitol;

— s-au eliminat multe probleme considerate prea simple și s-au introdus numeroase probleme noi însoțite de desenele respective;

— s-au adus modificări în enunțul diferitelor probleme și în rezolvarea acestora, în special în sensul scurtării, concentrării și unei mai mari clarități; numeroase probleme au fost generalizate;

— alături de problemele rezolvate complet, s-au introdus la fiecare capitol și probleme nerezolvate, însoțite de indicații despre modul de soluționare sau numai de răspunsuri;

— s-au refăcut toate calculele numerice din sistemul tehnic, în sistemul internațional de unități de măsură (SI);

— întregul material grafic a fost revăzut și completat, multe desene au fost refăcute, iar altele înlocuite cu desene noi, conform noului mod de rezolvare;

— la sfîrșitul lucrării s-a adăugat o serie de tabele utile rezolvării problemelor (centre de greutate, coeficienți de frecare, constante elastice etc.).

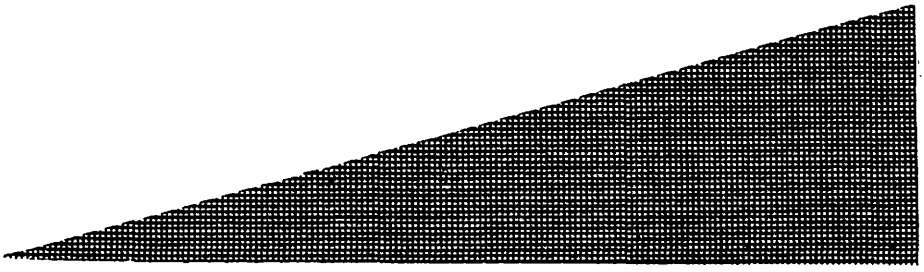
Toate aceste modificări și restructurări sînt legate de continua modernizare a prezentării mecanicii; premizele generale care au stat la baza întocmirii ediților anterioare la care a colaborat și regretatul M. Grumăzescu au fost însă păstrate și în cazul lucrării de față.

Lucrarea acoperă toate capitolele mecanicii clasice, evidențiind, prin modul de alegere a aplicațiilor, caracterul practic al numeroaselor probleme din diferitele ramuri ale tehnicii. Metodele variate de rezolvare, discutarea și interpretarea rezultatelor, reliefează latura aplicativă a soluțiilor în vederea formării spiritului ingineresc de abordare a diverselor probleme ridicate de practică.

Principiile și legile care stau la baza studiului mecanicii sînt puține la număr, dificultatea constînd în aplicarea acestora. De aceea, se poate aprecia că prezenta lucrare constituie un real ajutor atît pentru cei care studiază această disciplină pentru a și-o însuși, cît și pentru cei ce o aplică în practică. Dar pentru ca acest scop să fie atins trebuie ca și cititorul să vină cu contribuția sa, să încerce să rezolve singur problemele, înainte de a consulta soluția indicată; aceasta trebuie să constituie doar o verificare că metoda aleasă este cea bună, că mersul operațiilor de calcul este normal și că rezultatele obținute sînt corecte.

Lucrarea deși se adresează studenților din primii ani ai facultăților din institute tehnice de diferite specialități și ai universităților, este de un real folos inginerilor și specialiștilor care activează în acest domeniu.

A. I. STAN



PARTEA ÎNTÎI

STATICA

Capitolul 1

FORȚE. SISTEME DE FORȚE. REDUCEREA FORȚELOR.

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Forța** fiind o mărime vectorială, va fi definită prin:
— *punctul de aplicație*, de unde începe segmentul dirijat (fig. 1.1);
— *direcția D*, în lungul căreia este așternut vectorul;
— *modulul* $|\overline{F}|$, intensitatea sau mărimea, reprezentată la o scară anumită prin lungimea segmentului OE;
— *sensul*, pozitiv sau negativ. Sensul pozitiv este de la O la E.

Vectorii pot fi: *liberi, alunecători* și *legați. Liber* se numește vectorul căruia i se poate da orice punct de aplicație, păstrîndu-i direcția, sensul și mărimea. Vectorul căreia i se poate da orice punct de aplicație pe suportul său, păstrîndu-i sensul și mărimea, este un *vector alunecător*, în timp ce un vector căruia nu i se poate modifica nici unul dintre cele patru elemente, este un *vector legat*. În statica rigidului forțele sînt vectori alunecători. Unitatea de măsură pentru forțe în sistemul internațional (S.I.) este Newtonul (N).

2. **Forțe concurente** sînt forțele care au același punct de aplicație. Rezultanta unor forțe concurente este o forță care are același punct de aplicație și același efect ca și forțele date.

Rezultanta unor forțe concurente se poate afla *grafic* sau *analitic*.

Grafic. Rezultanta se află ducînd din extremitatea unei forțe, succesiv, forțe echipolente cu forțele date (fig. 1.2).

Dreapta care unește originea O cu extremitatea E este rezultanta $\overline{R}$ a forțelor concurente date. Însumarea forțelor este atît *comutativă*, cît și *asociativă*. Exprimarea acestei însumări se face vectorial, prin relația:

$$\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n=\sum_1^n \overline{F}_i. \qquad (a)$$

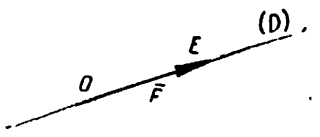


Fig. 1.1.

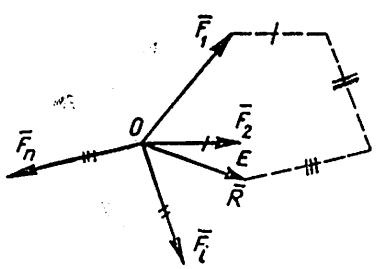


Fig. 1.2.

Analitic. Luînd un triedru triortogonal cu originea în punctul de concurență al forțelor și notînd componentele forțelor prin:

$$\overline{F}_1(X_1,\ Y_1,\ Z_1);\ \overline{F}_2(X_2,\ Y_2,\ Z_2);\ \ldots\overline{F}_i(X_i,\ Y_i,\ Z_i),$$

relația vectorială (*a*) este echivalentă cu trei relații scalare:

$$\begin{aligned} X&=\sum_1^n X_i=X_1+X_2+\ldots+X_i+\ldots+X_n;\\ Y&=\sum_1^n Y_i=Y_1+Y_2+\ldots+Y_i+\ldots+Y_n;\\ Z&=\sum_1^n Z_i=Z_1+Z_2+\ldots+Z_i+\ldots+Z_n; \end{aligned} \qquad (a')$$

în care X, Y, Z sînt componentele rezultantei $\overline{R}$.

Modulul rezultantei este:

$$|\overline{R}|=R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad (b)$$

iar *direcția rezultantei* este determinată în raport cu axele triedrului prin cosinusurile directoare;

$$\cos\alpha=\frac{X}{R};\ \cos\beta=\frac{Y}{R};\ \cos\gamma=\frac{Z}{R}. \qquad (c)$$

În plan, relațiile (*a'*), (*b*) și (*c*) devin, respectiv, (*a''*), (*b'*) și (*c'*):

$$X=\sum_1^n X_i;\ Y=\sum_1^n Y_i; \qquad (a'')$$

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}; \qquad (b')$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{Y}{X}=\frac{\sum Y_i}{\sum X_i}. \qquad (c')$$

Cazuri particulare. Două forțe egale și de sens contrar, aplicate aceluiași punct, au rezultantă nulă.

Rezultanta a două forțe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, care acționează asupra aceluiași punct, se află prin regula paralelogramului (fig. 1.3).

Practic, nu se construiește paralelogramul, ci numai triunghiul forțelor, ducînd din extremitatea unei forțe un vector echipolent cu cea de-a doua forță.

Modulul rezultantei este:

$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha}, \qquad (d)$$

iar între forțe și unghiuri există relațiile:

$$\frac{\sin\alpha_1}{F_1} = \frac{\sin\alpha_2}{F_2} = \frac{\sin\alpha}{R};\ \alpha=\alpha_1+\alpha_2. \qquad (e)$$

Dacă forțele sînt egale, pentru aflarea rezultantei se pot proiecta forțele pe direcția rezultantei și se obține:

$$R=2F\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (f)$$

3. **Diferența** $\overline{F}_1 - \overline{F}_2$ *a două forțe concurente* $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ este forța $\overline{D}$ care, adunată cu $\overline{F}_2$, dă pe $\overline{F}_1$. Este a doua diagonală a paralelogramului construit pe forțele date (fig. 1.4).

4. **Descompunerea** unei forțe $\overline{R}$ în mai multe forțe concurente $(\overline{F}_1 \ldots \overline{F}_n)$ după direcțiile $(D_1 \ldots D_n)$ este în general o problemă nedeterminată. În anumite condiții particulare, problema devine determinată, putîndu-se proceda grafic sau analitic, analog ca la compunere.

În plan, o forță poate fi descompusă după două direcții concurente. În acest caz, descompunerea se face ducînd din extremitățile forței, paralele la cele două direcții, obținînd astfel triunghiul forțelor ABC. Sensul componentelor este determinat de sensul care ocolește triunghiul forțelor, indiferent care dintre cele două triunghiuri ale forțelor se construiește (fig. 1.5, *a*, *b*).

Descompunerea unei forțe în două componente se mai poate face cunoscînd: una dintre forțe în mărime, direcție și sens, sau componentele în mărime, sau mărimea unei forțe și direcția celeilalte.

În toate aceste cazuri, problema se reduce la construcții de triunghiuri.

De asemenea, o forță poate fi descompusă grafic după trei direcții neconcurente coplanare cu forța.

În spațiu, o forță $\overline{R}$ poate fi descompusă după trei direcții concurente, care nu sînt în același plan, problema revenind la construirea unui paralelipiped

Fig. 1.3.

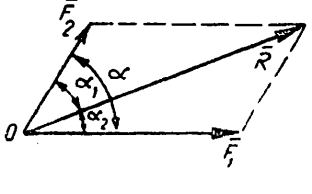


Fig. 1.4.

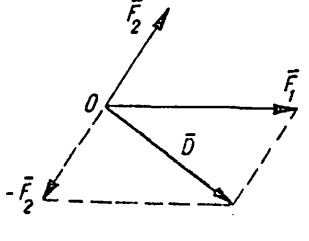
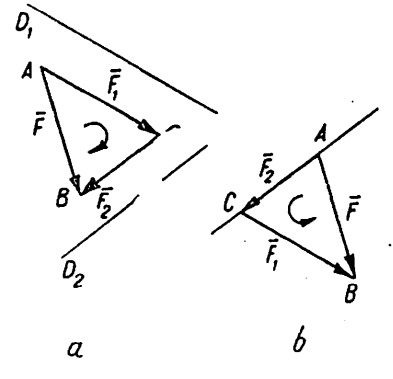


Fig. 1.5.



la care se cunosc direcţiile muchiilor concurente în punctul O şi diagonala OA (fig. 1.6).

5. **Momentul unei forţe $\overline{F}$ în raport cu un punct.** Forţa $\overline{F}=X\overline{i}+Y\overline{j}+Z\overline{k}$, aplicată în punctul A, avînd faţă de triedrul de referinţă O vectorul de poziţie $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, are faţă de originea triedrului $xOyz$ un moment

$$\overline{M}_0\overline{F}=\overline{r}\times\overline{F}, \tag{g}$$

egal cu produsul vectorial dintre vectorul de poziţie şi forţă (fig. 1.7).

Ca urmare:

— momentul forţei $\overline{F}$ în raport cu punctul O este un vector perpendicular pe planul format de suportul forţei şi punct $(\overline{F}\cdot\overline{M}_0=0)$;

— modulul momentului este

$$|\overline{M}_0|=rF\sin(\overline{r};\ \overline{F})=Fd, \tag{h}$$

unde d este distanţa de la punctul O pînă la suportul forţei.

Sensul vectorului moment se alege astfel încît vectorii $\overline{r}$, $\overline{F}$, $\overline{M}_0$ să formeze un triedru drept. Momentul unei forţe se măsoară în Newton metru (Nm).

Expresii analitice. Avem:

$$\overline{M}_0=\overline{r}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x & y & z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=M_x\overline{i}+M_y\overline{j}+M_z\overline{k} \tag{i}$$

unde componentele momentului faţă de axe (fig. 1.8) sînt:

$$M_x=yZ-zY;\quad M_y=zX-xZ;\quad M_z=xY-yX. \tag{j}$$

Momentul unei forţe în raport cu un punct O are o serie de proprietăţi:

a) variază, dacă se schimbă punctul în raport cu care se calculează momentul; schimbarea momentului se face după relaţia vectorială

$$\overline{M}_{O_1}=\overline{M}_O+\overline{O_1O}\times\overline{F},$$

b) este nul în raport cu un punct oarecare aflat pe suportul forţei;

c) nu se modifică dacă forţa se deplasează pe suportul ei, sau dacă punctul în raport cu care se ia momentul se deplasează pe o paralelă la forţă.

Fig. 1.6.

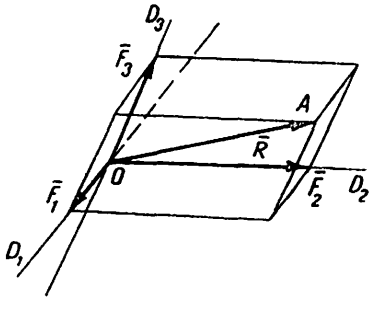


Fig. 1.7.

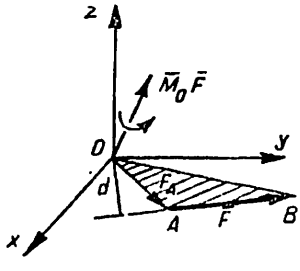
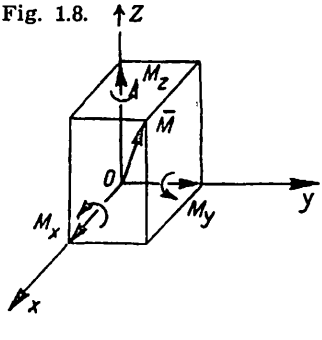


Fig. 1.8.



6. **Momentul unei forțe în raport cu o axă.** Momentul unei forțe în raport cu o axă Δ de versor $\bar{u}$ este proiecția pe acea axă a vectorului moment al forței date în raport cu un punct oarecare al axei (fig. 1.9).

$$M_\Delta=(\bar{r}\times\bar{F})\cdot\bar{u}=(\bar{r},\ \bar{F},\ \bar{u}). \qquad (l)$$

unde $(\bar{r},\ \bar{F},\ \bar{u})$ este produsul mixt.

Momentul unei forțe în raport cu o axă Δ:

— este un invariant față de alegerea punctului pe axă:

— este nul cînd forța și axa sînt coplanare (suportul forței și axa se intersectează sau sînt paralele).

Practic momentul unei forțe în raport cu o axă se poate determina astfel: se duce un plan oarecare π perpendicular pe axă, pe care se proiectează forța dată.

Momentul acestei proiecții $\bar{f}$ în raport cu punctul O' în care axa înțeapă planul este chiar momentul forței date în raport cu axa.

7. **Cupluri de forțe.** Două forțe paralele, egale și de sensuri contrare $(\bar{F},\ -\bar{F})$, aflate pe suporturi diferite, formează un cuplu de forțe (fig. 1.10). Se reprezintă printr-un vector liber $\bar{M}$ $(\bar{C})$, perpendicular pe planul forțelor, de modul constant $F\cdot d$, unde d este brațul cuplului (distanța dintre suporturile forțelor), iar sensul este dat de regula șurubului drept.

Cuplurile aflate în același plan sau în plane paralele se însumează algebric (fig. 1.11). Cele aflate oricum în spațiu se însumează vectorial (fig. 1.12) obținîndu-se un cuplu rezultant, vector liber, egal cu suma vectorială a cuplurilor componente:

$$\bar{M}=\bar{M}_1+\bar{M}_2+\ldots+\bar{M}_n. \qquad (m)$$

8. **Reducerea unui sistem de forțe oarecare ce acționează asupra unui rigid.** Dîndu-se forțele oarecare $\bar{F}_i$ $(i=1\ldots n)$ ce acționează respectiv în punctele A_i, definite prin vectorii de poziție $\bar{r}_i$ în raport cu un triedru de referință fix, torsorul de reducere în raport cu punctul O este un operator notat simbolic sub forma

$$\tau_0(\bar{R},\ \bar{M}_0), \qquad (n)$$

Fig. 1.9.

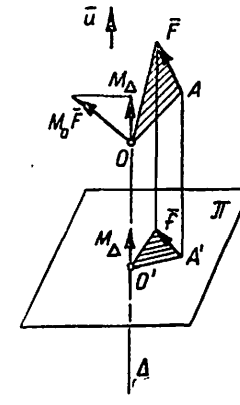


Fig. 1.10.

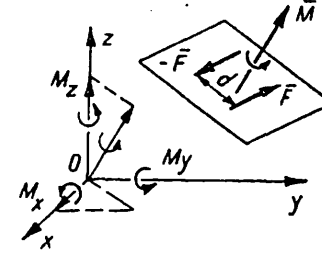


Fig. 1.11.

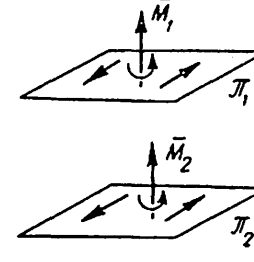
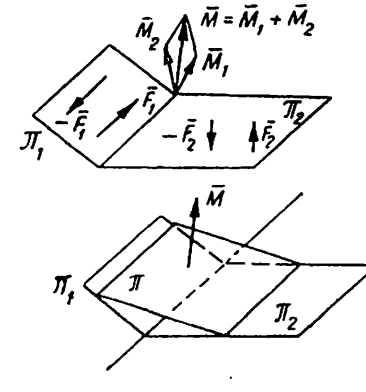


Fig. 1.12.



unde $\overline{R}$ este *vectorul rezultant* iar $\overline{M}_0$ *vectorul moment rezultant* definiți prin relațiile vectoriale:

$$\overline{R}=\sum_1^n \overline{F}_i=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n \qquad (p)$$

$$\overline{M}_0=\sum_1^n \overline{r}_i\times\overline{F}_i=\overline{r}_1\times\overline{F}_1+\overline{r}_2\times\overline{F}_2+\ldots+\overline{r}_n\times\overline{F}_n \qquad (q)$$

Schimbînd punctul în raport cu care se calculează torsorul, de exemplu trecînd de la O la O_1, vectorul rezultant $\overline{R}$ rămîne neschimbat în timp ce vectorul moment rezultant $\overline{M}_{O_1}$ se schimbă conform relației:

$$\boxed{\overline{M}_{O_1}=\overline{M}_O+\overline{O_1O}\times\overline{R}} \qquad (q)$$

Deși vectorul moment se schimbă, proiecția acestuia pe direcția vectorului rezultant $\overline{R}$ este același (invariant —fig. 1.13).

$$pro_R\,\overline{M}_1=\overline{M}_{O_1}\cdot\overline{R}=pro_R\,\overline{M}_O=\overline{M}_O\cdot\overline{R}. \qquad (r)$$

Trinomul invariant

$$\boxed{\overline{R}\cdot\overline{M}_0=M_xX+M_yY+M_zZ,} \qquad (s)$$

poate fi nul sau nenul.

În reducerea unui sistem de forțe oarecare în spațiu se disting mai multe cazuri de reducere în raport cu mărimile $\overline{R}$; $\overline{M}_0$; $\overline{R}\cdot\overline{M}_0$, după cum urmează (tabela 1.1):

Tabela 1.1

Cazuri de reducere

Caz de reducere	vector rezultant $\overline{R}$	vector moment rezultant $\overline{M}_0$	trinomul invariant $\overline{R}\cdot\overline{M}_0$
1) rezultanta unică, axa centrală e suportul rezultantei	$\neq 0$	$\neq 0$	0
2) torsor minim	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
3) cuplu de forțe	0	$\neq 0$	0
4) sistem echivalent cu zero.	0	0	—

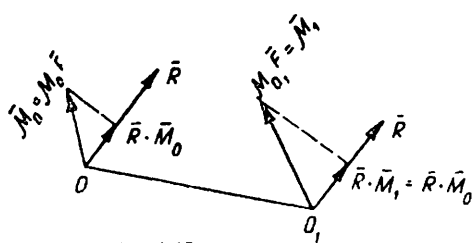


Fig. 1.13

a) Axa centrală este locul geometric al punctelor în care efectuînd reducerea unui sistem de forțe, vectorii $\overline{R}$ și $\overline{M}_0$ ai torso-

rului sistemului de forţe sînt coliniari. În punctele axei centrale torsorul de reducere are valoarea minimă. Pentru punctele axei centrale vectorul rezultant este acelaşi, iar modulul vectorului moment rezultant are valoarea:

$$M_{min}=M_\Delta=\frac{\overline{R}\overline{M}_0}{R}=\frac{XM_x+YM_y+ZM_z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \qquad (t)$$

Ecuaţia vectorială a axei centrale este dreapta

$$\overline{r}=\overline{r}_0+\lambda\overline{R} \qquad (u)$$

dusă prin vîrful vectorului $\overline{r}_0$, definit de relaţia:

$$\overline{r}_0=\frac{\overline{R}\times\overline{M}_0}{R^2} \qquad (v)$$

şi paralelă la vectorul $\overline{R}$, λ fiind un scalar arbitrar.

Scalar, ecuaţia axei centrale pentru un sistem de forţe în spaţiu are forma:

$$\frac{M_x-(yZ-zY)}{X}=\frac{M_y-(zX-xZ)}{Y}=\frac{M_z-(xY-yX)}{Z}=\frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_0}{R^2}. \qquad (w)$$

b) Pentru un sistem de forţe aflate în acelaşi plan, ecuaţia axei centrale este:

$$xY-yX=M_z=\sum(x_iY_i-y_iX_i). \qquad (w')$$

9. **Teorema lui Varignon.** Cînd un sistem de forţe se reduce la o rezultantă unică, momentul vectorului rezultant este egal cu suma momentelor forţelor componente. Teorema se aplică de asemenea sistemelor de forţe concurente, coplanare şi celor paralele.

Forţe paralele. Pentru un sistem de forţe oarecare în spaţiu, paralele cu o direcţie de versor $\overline{u}$ (fig. 1.14), elementele torsorului de reducere în punctul O sînt $\tau_0(\overline{R},\ \overline{M}_0)$

$$\overline{R}=\sum_1^n\overline{F}_i=R\overline{u}=(\sum F_i)\,\overline{u};$$

$$\overline{M}_0=\sum_1^n\overline{r}_i\times\overline{F}_i=(\sum F_i\overline{r}_i)\times\overline{u}.$$

unde $\sum F_i$ este suma algebrică a forţelor paralele.

Vectorul rezultant $\overline{R}$ are aceeaşi direcţie cu forţele date, iar vectorul moment rezultant $\overline{M}_0$ este perpendicular pe direcţia lui $\overline{R}$, deoarece:

$$\overline{R}\cdot\overline{M}_0=0.$$

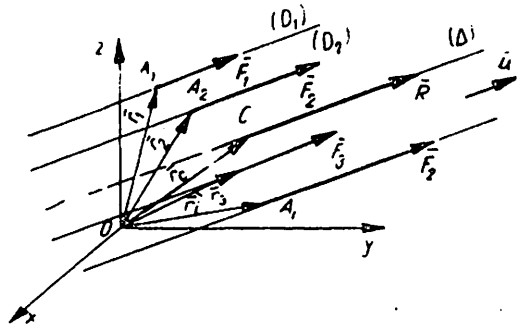


Fig. 1.14.

Alegînd direcţia versorului $\bar{u}$ drept axă *oz* avem:

$$X=\sum X_i=0;\quad Y=\sum Y_i=0;\quad Z=\sum Z_i=R;$$

$$M_x=\sum y_i Z_i;\quad M_y=-\sum x_i Z_i;\quad M_z=0.$$

Cazuri de reducere:

a) $\bar{R}\neq 0$; $\bar{M}_0\neq 0$; $\bar{R}\cdot\bar{M}_0=0$. Sistemul se reduce la o rezultantă unică *pe axa centrală*, paralelă cu direcţia versorului $\bar{u}$, aflată la distanţa $d=\frac{M_0}{R}$.

Dacă $\bar{M}_0=0$, punctul de reducere se află chiar pe suportul rezultantei.

b) $\bar{R}=0$; $\bar{M}_0\neq 0$ sistemul se reduce la un cuplu de forţe.

c) $\bar{R}=0$; $\bar{M}_0=0$ sistemul de forţe are un torsor nul.

În cazul în care forţele paralele sînt vectori legaţi, axa centrală este o dreaptă avînd aceeaşi direcţie cu forţele date, şi care trece printr-un punct *C*, numit *centrul forţelor paralele*, avînd vectorul de poziţie

$$\bar{r}_c=\frac{\sum F_i\cdot\bar{r}_i}{\sum F_i}. \qquad (x)$$

Centrul forţelor paralele nu depinde de sistemul de referinţă, el fiind un punct intrinsec al sistemului de forţe. Ca urmare, poziţia acestui punct nu se schimbă:

— dacă se rotesc în acelaşi sens şi de un acelaşi unghi toate forţele sistemului;

— dacă toate forţele sistemului se amplifică de acelaşi număr de ori.

B. PROBLEME REZOLVATE

1.1. Un izolator susţine un cablu în care tensiunile sînt egale (fig. 1.15). Ştiind că direcţiile cablului formează între ele un unghi α, să se determine forţa care acţionează asupra izolatorului.

Rezolvare. Din relaţia (*d*) în care $F_1=F_2=T$ rezultă:

$$R=\sqrt{2T^2+2T^2\cos\alpha}=2T\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Fig. 1.15.

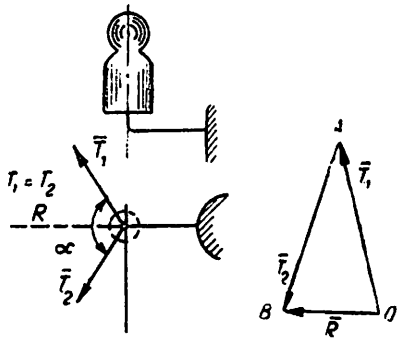
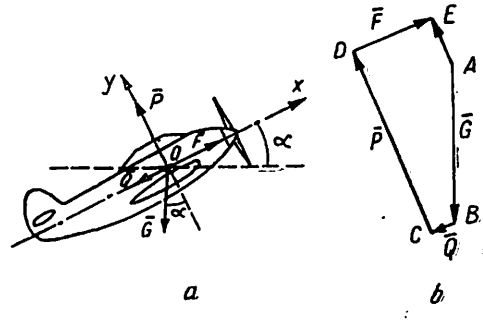


Fig. 1.16.



Datorită simetriei, rezultanta care are direcţia bisectoarei unghiului format de cele două direcţii ale cablului se mai poate afla prin proiectarea tuturor forţelor pe direcţia rezultantei.

1.2. Asupra unui avion care zboară sub o pantă $\alpha=25°$, acţionează patru forţe concurente în centrul de greutate al avionului: greutatea avionului $G=28$ kN, forţa de sustentaţie $P=33$ kN, rezistenţa aerului $Q=3$ kN şi forţa de tracţiune a elicei $F=15{,}5$ kN (fig. 1.16, *a*). Să se determine rezultanta acestor forţe.

Rezolvare.

Metoda grafică. La scara 1 cm=10 kN se construieşte poligonul forţelor. Unind originea cu extremitatea, se obţine rezultanta $\overline{R}$ (fig.1.16,*b*). Măsurînd segmentul AE, se găseşte 7,7 mm, de unde

$$R=7{,}7 \text{ kN}.$$

Metoda analitică. Luînd ca axe de coordonate direcţia de zbor şi o perpendiculară pe această direcţie, componentele X şi Y ale rezultantei sînt:

$$X=F-Q-G\sin\alpha,\quad Y=P-G\cos\alpha$$

de unde

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=7{,}65 \text{ kN} \quad \text{şi} \quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}=\operatorname{arctg}11{,}373=84°58'.$$

1.3. Asupra unui bloc, avînd forma unui cub, acţionează forţele P, $2P$, $3P$, aplicate respectiv în vîrfurile A, C şi H, avînd direcţiile diagonalelor FA, FC şi FH (fig. 1.17).

Să se determine mărimea rezultantei şi unghiurile pe care le face cu axele de coordonate.

Rezolvare. Notînd cu X, Y şi Z componentele rezultantei după cele trei axe de coordonate, se poate scrie:

$$X=\sum X_i=P\cos 45°+3P\cos 45°=4P\cos 45°,$$

$$Y=\sum Y_i=2P\cos 45°+3P\cos 45°=5P\cos 45°,$$

$$Z=\sum Z_i=P\cos 45°+2P\cos 45°=3P\cos 45°,$$

de unde:

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=5P.$$

Unghiurile formate de rezultantă cu direcţiile axelor de coordonate sînt:

$$\cos\alpha=\frac{X}{R}=\frac{2\sqrt{2}P}{5P}=0{,}564;\quad \alpha=55°40';$$

$$\cos\beta=\frac{Y}{R}=\frac{5\sqrt{2}P}{2\cdot 5P}=0{,}707;\quad \beta=45°;$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{R}=\frac{3\sqrt{2}P}{2\cdot 5P}=0{,}424;\quad \gamma=64°50'.$$

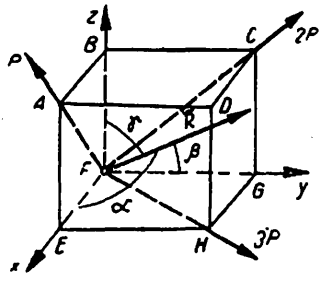


Fig. 1.17.

1.4. Axul unei mașini, în greutate de 12 kN, se transportă cu ajutorul unei macarale, fiind susținut în A și B (fig. 1.18). Să se determine tensiunile în cablurile de susținere AC și BC, precum și efortul din cîrlig.

Rezolvare. Tensiunea $\overline{T}_1$ în cablul AC, tensiunea $\overline{T}_2$ în cablul BC și greutatea $\overline{G}$ a axului, sînt concurente. Problema se reduce la descompunerea forței $\overline{G}$, după direcțiile cablurilor.

Metoda grafică. Se ia la scară un vector reprezentînd forța $\overline{G}$. Prin extremitățiile vectorului se duc paralele la direcțiile cablurilor (fig. 1.19), care se întîlnesc în punctul B. Componentele forței $\overline{G}$ sînt OB și BA. Tensiunile în cablu sînt egale și de sens contrar cu aceste componente. Se obține:

$$T_1 = 23{,}5 \text{ mm} = 11{,}75 \text{ kN}; \quad T_2 = 20 \text{ mm} = 10 \text{ kN},$$

Considerînd greutatea $\overline{G}$ ca rezultanta celor două tensiuni din cablu, avînd în raport cu sistemul de axe de coordonate ales $X=0$ și $Y=-G$, se poate scrie:

$$-T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = 0;$$

$$-T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = -G,$$

de unde

$$T_1 = G\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ și } T_2 = G\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

1.5. O presă are forma din figura 1.20. Știind că, acționînd cu ajutorul șurubului, tensiunea în bara OA este $\overline{T}$, să se determine forța $\overline{Q}$ care se exercită asupra corpului P și reacțiunea N a lagărului asupra pistonului D.

Rezolvare. Descompunînd forța $\overline{T}$ după direcțiile OC și OD, și notînd cu S eforturile din aceste bare rezultă:

$$S = \frac{T}{2\sin\alpha}.$$

De asemenea descompunînd forța S după direcția pistonului și o direcție perpendiculară pe aceasta, se obține:

$$Q = S\cos\alpha = \frac{T}{2}\operatorname{ctg}\alpha; \quad N = S\sin\alpha = \frac{T}{2}.$$

Fig. 1.18.

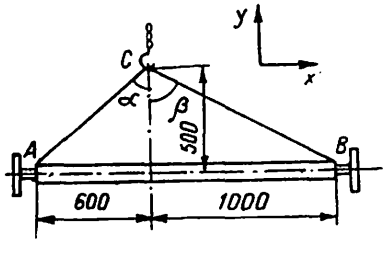


Fig. 1.19.

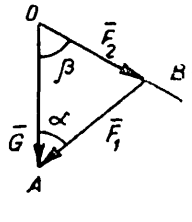
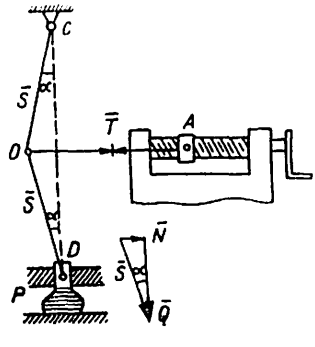


Fig. 1.20.



1.6. Un corp de greutate $G=0{,}4$ kN este legat cu două cabluri AO avînd lungimea $l=3$ m și OBC trecut fără frecare, peste un scripete (fig. 1.21). Știind că distanța AB este $L=4$ m, să se determine variația forțelor $\overline{P}$ și $\overline{S}$ de susținere, cînd poziția corpului variază.

Rezolvare. În raport cu sistemul de coordonate ales se pot scrie relațiile:

$$-S\cos\alpha+P\cos\beta=X\ ;$$

$$S\sin\alpha+P\sin\beta=Y,$$

$$X=0\ ;\ Y=-G.$$

Rezolvînd sistemul, se obține

$$P=G\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\quad\text{și}\quad S=G\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

unde $\operatorname{tg}\beta=\frac{h}{l}=\frac{L\sin\alpha}{L-l\cos\alpha}$.

Variația forțelor P și S în funcție de unghiul α este arătată în diagrama din figura 1.22.

1.7. Cu ajutorul unui scripete, susținut de un suport format din două bare (fig. 1.23), se ridică sarcina $\overline{Q}$. Să se determine eforturile în barele de prindere, cînd cablul AM face cu direcția barei AC unghiul γ.

Rezolvare. Neglijînd frecările, tensiunea $\overline{T}$ din cablu este egală cu sarcina $\overline{Q}$ care se ridică.

Compunînd forțele $\overline{T}$ și $\overline{Q}$, se obține rezultanta de modul:

$$R=2Q\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Forțele componente fiind egale, direcția rezultantei corespunde cu bisectoarea unghiului format de forțe.

Fig. 1.21.

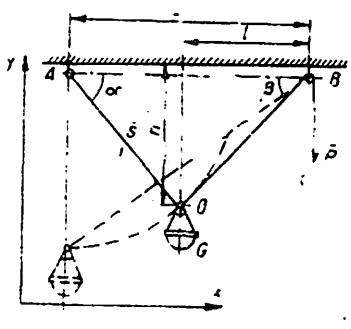


Fig. 1.22.

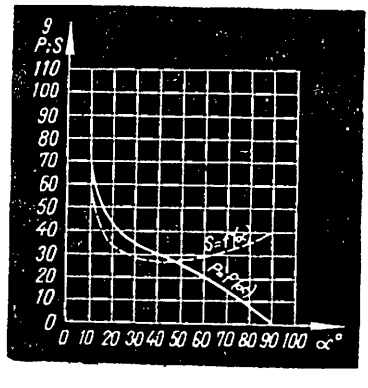
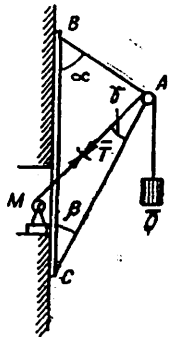


Fig. 1.23.



Descompunînd forţa rezultantă $\overline{R}$ după direcţiile celor două bare (fig. 1.24) se obţine:

$$S_{BA}=2Q\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}\ ;\quad S_{AC}=2Q\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin(\alpha+\beta)}\ .$$

(întindere) (compresiune)

1.8. Un stîlp vertical AB, ancorat cu două cabluri BC şi BD simetric aşezate faţă de planul vertical ce conţine stîlpul, este acţionat în B de forţa orizontală $\overline{H}$ (fig. 1.25). Cunoscînd H, h, l, d, să se afle eforturile din stîlp şi cabluri.

Rezolvare. Forţa orizontală $\overline{H}$ poate fi descompusă după direcţia stîlpului şi după direcţia BE.

Forţa după direcţia BE se descompune în planul CBD, după direcţiile BC şi BD ale cablurilor de ancorare.

Metoda grafică. Descompunerea forţei $\overline{H}$ se face ducînd din extremităţile ei, paralele la direcţiile EB şi BA (fig. 1.26).

Mărimea componentelor este dată de laturile BM şi ML ale triunghiului forţelor, iar sensul lor este dat de sensul în care se parcurge conturul BML (fig. 1.26 *a*,) de la originea B la extremitatea L a forţei H.

Observaţie. Dacă paralelele din extremitatea forţei H s-ar fi dus astfel încît să se construiască triunghiul BLN sensul componentelor este determinat de sensul în care se parcurge conturul BNL dat de figura 1.26, *b*.

Metoda analitică. Din triunghiul BLM se obţine:

$$\frac{H}{\sin\alpha}=F_2=\frac{F_1}{\cos\alpha}\ ;\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{d}{h}\ ;\quad F_1=H\operatorname{ctg}\alpha\ ;\quad F_2=H\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}\ .$$

Pentru aflarea mărimilor forţelor $\overline{F}_3$ şi $\overline{F}_3'$ se proiectează acestea pe latura BQ a triunghiului BSQ (figura 1.26, *c*) şi rezultă:

$$F_2=2F_3\cos\beta\ ;\quad F_3=\frac{F_2}{2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}\quad \text{în care}\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{l}{2\sqrt{d^2+h^2}}\ .$$

Fig. 1.24.

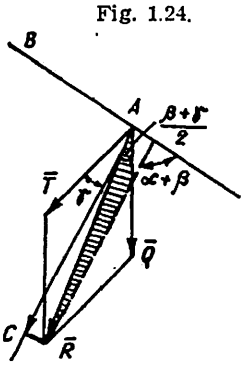


Fig. 1.25.

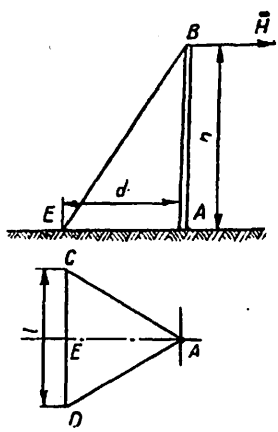
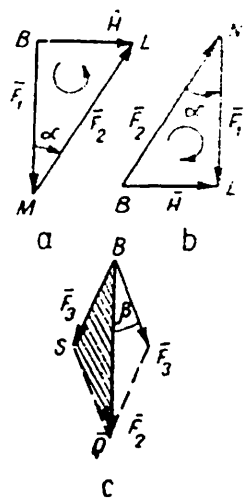


Fig. 1.26.



Observație. Valorile ce se obțin prin descompunerea grafică diferă puțin de valorile obținute prin calcul, datorită scării la care se calculează. În practică însă, lucrînd la o scară convenabil aleasă, se obțin valori care nu diferă de calcul cu mai mult de 2%, ceea ce este suficient pentru aplicațiile practice.

1.9. O sarcină G este sprijinită pe un suport format din trei bare, dispuse, ca în figura 1.27. Vîrful suportului se găsește la o înălțime h față de planul orizontal pe care se află picioarele A, B și C. Să se calculeze eforturile din cele trei bare.

Rezolvare. Greutatea $\overline{G}$ se poate considera ca rezultanta celor trei forțe din bare, avînd componentele $X=0$, $Y=0$ și $Z=-G$, în raport cu cele trei axe de coordonate alese. Notînd cu α_i, β_i și γ_i unghiurile făcute de forțe cu axele de coordonate, iar cu x_i, y_i și z_i ($i=1,2,3$) coordonatele picioarelor A, B și C în raport cu vîrful 0, se poate scrie:

$$\begin{aligned} X&=S_1\cos\alpha_1+S_2\cos\alpha_3+S_3\cos\alpha_3=0,\\ Y&=S_1\cos\beta_1+S_2\cos\beta_2+S_3\cos\beta_3=0,\\ Z&=S_1\cos\gamma_1+S_2\cos\gamma_2+S_3\cos\gamma_3=-G, \end{aligned} \tag{1}$$

în care

$$\cos\alpha_i=\frac{x_i}{l_i};\quad \cos\beta_i=\frac{y_i}{l_i};\quad \cos\gamma_i=\frac{z_i}{l_i},\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

și

$$l_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

În acest caz, sistemul (1) se mai poate scrie:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{l_1}S_1+\frac{x_2}{l_2}S_2+\frac{x_3}{l_3}S_3&=0;\\ \frac{y_1}{l_1}S_1+\frac{y_2}{l_2}S_2+\frac{y_3}{l_3}S_3&=0;\\ \frac{z_1}{l_1}S_1+\frac{z_2}{l_2}S_2+\frac{z_3}{l_3}S_3&=-G, \end{aligned} \tag{1'}$$

cu soluțiile:

$$S_1=-G\frac{l_1}{h}\frac{\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}}{\Delta};\quad S_2=G\frac{l_2}{h}\frac{\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}}{\Delta};\quad S_3=G\frac{l_3}{h}\frac{\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}}{\Delta},$$

în care:

$$\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

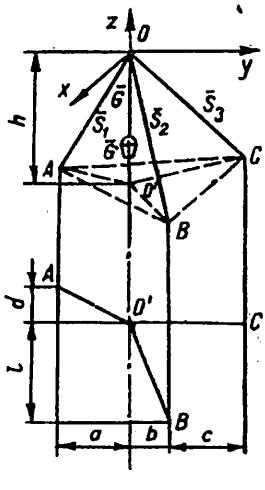


Fig. 1.27.

1.10. Să se arate că, dacă asupra unui corp acționează în același plan cuplul de forțe $(\overline{P},-\overline{P})$ și forța $\overline{Q}$ având o direcție perpendiculară pe direcția forțelor, atunci acțiunea cuplului tinde să deplaseze forța $\overline{Q}$ paralel cu ea însăși (fig. 1.28).

Rezolvare. Rezultanta tuturor forțelor date se reduce la forța $\overline{Q}$. Pentru a preciza poziția rezultantei, se scrie ecuația de momente în raport cu un punct aflat pe una dintre forțele cuplului, de exemplu, punctul A, obținîndu-se

$$x=d+\frac{P}{Q}a.$$

1.11. Pentru a scoate o roată din axul ei, se aplică simultan în A și B două forțe $\overline{F}_1$ orizontale, paralele egale și de sens contrar, iar în L și M două forțe $\overline{F}_2$ verticale, paralele, egale și de sens contrar (fig. 1.29). Să se determine cuplul rezultant, notînd cu D diametrul roții.

Rezolvare. Forțele $\overline{F}_1$ dau naștere unui cuplu situat în planul orizontal al roții. Vectorul cuplu $\overline{C}_1$ are direcția verticală, fiind perpendicular pe planul determinat de forțele $\overline{F}_1$, sensul este în jos, de modul:

$$|\overline{C}_1|=F_1D.$$

Forțele $\overline{F}_2$ produc un cuplu situat într-un plan vertical. Vectorul cuplu $\overline{C}_2$ are direcția orizontală, fiind perpendicular pe planul determinat de forțele $\overline{F}_2$, sensul este cel indicat de săgeată, iar modulul cuplului

$$|\overline{C}_2|=F_2D.$$

Modulul cuplului rezultant este:

$$C=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=D\sqrt{F_1^2+F_2^2}.$$

1.12. Asupra unui corp acționează o serie de forțe aflate în planul xoy, definite prin module, puncte de aplicație și coordonate prin valorile înscrise în tabela 1.2.

Tabela 1.2

Forțe plane

forță	modulul N	punct aplicație, cm x_i	y_i	direcția forței cu axa Ox
F_1	8	2	−1	225°
F_2	15	−3	0	270°
F_3	3	−4	4	330°
F_4	12	4	−2	60°

Să se determine analitic și grafic mărimea și direcția rezultantei celor patru forțe.

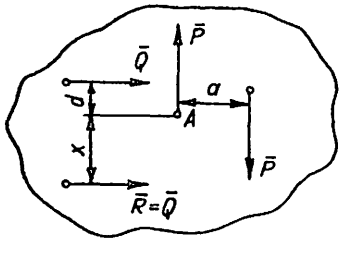


Fig. 1.28.

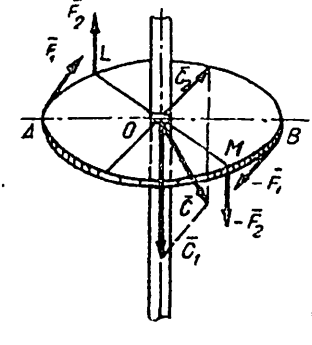


Fig. 1.29.

Rezolvare.

Metoda analitică. Componentele X şi Y ale rezultantei forţelor sînt:

$$X=\sum X_i=8\cos 225°+15\cos 270°+3\cos 330°+12\cos 60°=2{,}94\text{ N}$$

$$Y=\sum Y_i=8\sin 225°+15\sin 270°+3\sin 330°+12\sin 60°=-11{,}78\text{ N}$$

De unde:

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=12{,}14\text{ N}$$

Unghiul θ pe care-l face direcţia rezultantei cu direcţia pozitivă a axei x-ilor este dat de relaţia:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{Y}{X}=-\frac{11{,}78}{2{,}94}=-4;\quad \theta=285°$$

Ecuaţia axei centrale, în raport cu sistemul de axe ales, dată de relaţia (w') este:

$$-11{,}78x-2{,}94y=-5{,}656\cdot 2-(-5{,}656)1+(-15)\cdot(-3)-0+(-1{,}5)\cdot(-4)-$$
$$-2{,}595\cdot 4+10{,}38\cdot 4-6(-2)=88{,}48.$$

sau

$$11{,}78x+2{,}94y+88{,}48=0.$$

Metoda grafică. (fig. 1.30). Cu poligonul forţelor se obţine rezultanta $\overline{R}$ a forţelor date, iar prin intersecţia k a razelor extreme α şi ω a poligonului funicular un punct al axei centrale. La scara aleasă rezultă $R=12{,}20$ N.

1.13. La o macara pe cale ferată, rezultanta Q a tuturor forţelor verticale (greutatea părţii rotitoare, sarcina şi contragreutatea) se află la o depărtare a de axa de rotaţie (fig. 1.31, a). Corpul macaralei se sprijină pe cele două osii prin intermediul unei grinzi longitudinale. Ştiind că distanţa dintre axele roţilor este l, iar ecartamentul şinei este s, să se determine variaţia forţelor de apăsare pe cele patru roţi în funcţie de unghiul de rotire a macaralei.

Rezolvare. Componentele forţei $\overline{Q}$ după direcţiile verticale care trec prin M şi N sînt respectiv $\overline{V}_M$ şi $\overline{V}_N$. Luînd momentele forţelor în raport cu axele roţilor, se obţine:

$$Q\left|\frac{l}{2}-a\cos\alpha\right|-V_N l=0;$$

$$Q\left|\frac{l}{2}+a\cos\alpha\right|-V_M l=0,$$

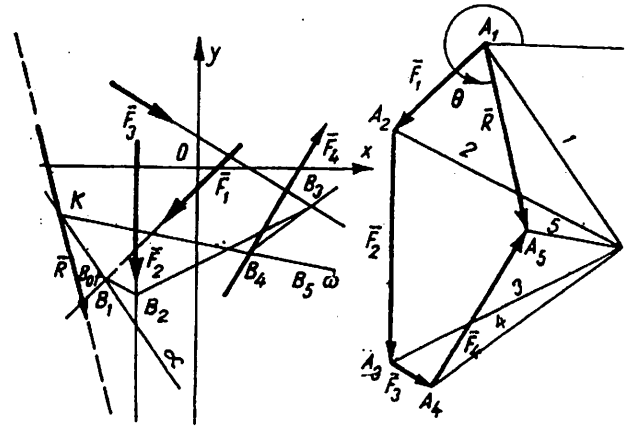


Fig. 1.30.

de unde:

$$V_N = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{2a\cos\alpha}{l}\right) \text{ și } V_M = \frac{Q}{2}\left(1+\frac{2a\cos\alpha}{l}\right).$$

Descompunînd la rîndul lor aceste forțe după direcțiile verticalelor care trec prin roți, se obțin apăsările pe cele patru roți:

$$V_A = \frac{Q}{4}\left(1+\frac{2a\cos\alpha}{l}\right)\left(1+\frac{2a\sin\alpha}{s}\right); \quad V_B = \frac{Q}{4}\left(1+\frac{2a\cos\alpha}{l}\right)\left(1-\frac{2a\sin\alpha}{s}\right);$$

$$V_C = \frac{Q}{4}\left(1-\frac{2a\cos\alpha}{l}\right)\left(1+\frac{2a\sin\alpha}{s}\right); \quad V_D = \frac{Q}{4}\left(1-\frac{2a\cos l}{l}\right)\left(1-\frac{2a\sin\alpha}{s}\right).$$

În diagrama polară din figura 1.31, *b* este reprezentată variația apăsării suportate de roata *A* atunci cînd macaraua se rotește cu 360°.

1.14. O placă pătrată, avînd latura l și greutatea G, este susținută de trei fire ca în figura 1.32. Să se determine tensiunile din fire.

Rezolvare.

a) Metoda analitică. Se iau momentele forțelor date și de legătură în raport cu trei puncte din planul plăcii care nu sînt în linie dreaptă, pentru a obține trei ecuații independente între ele. Pentru simplificare se aleg punctele *B*, *A* și *E* (fig. 1.33), obținîndu-se tensiunile din fire:

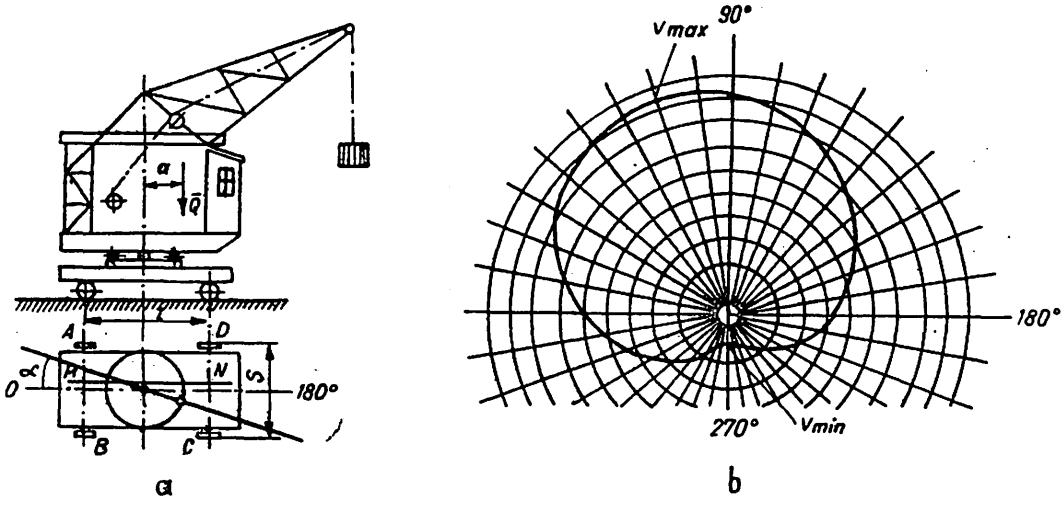
$$T_1 = \frac{G}{2\sin\alpha}; \quad T_2 = \frac{G}{2}; \quad T_3 = \frac{G}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

b) Metoda grafică. Se prelungește direcția forței $\overline{G}$ pînă în punctul *H* de intersecție cu una dintre forțe. Se descompune $\overline{G}$ după direcțiile *AH* și *HB*, ducînd din extremități, paralele la cele două direcții. Apoi se descompune componenta *GI* după direcțiile celorlalte fire *BE* și *BA*, obținînd astfel componentele greutății în fire, iar pe baza principiului acțiunii și reacțiunii, tensiunile din fire:

$$T_1 = IO; \quad T_2 = LI; \quad T_3 = ML,$$

care se citesc pe grafic. Poligonul *OILM* este poligonul de descompunere (fig. 1.33).

Fig. 1.31.



1.15. Un corp cu greutatea G (xyz) este așezat pe un plan orizontal în trei puncte de sprijin (fig. 1.34), de coordonate:

$$A_1(x_1y_1);\ A_2(x_2y_2);\ A_3(x_3y_3).$$

Să se afle apăsările greutății G pe cele trei puncte de sprijin.

Rezolvare. Din ecuația de proiecții pe direcția axei Oz se deduce:

$$R_1+R_2+R_3=G. \tag{1}$$

Teorema lui Varignon în raport cu axele de coordonate va da alte relații între forțe și punctele lor de aplicație.

Forțele fiind paralele cu axa Oz, momentele forțelor sînt nule în raport cu această axă.

Pentru aflarea momentelor în raport cu axa Ox, se proiectează forțele pe un plan perpendicular pe axă, deci pe planul yOz. Aplicînd teorema lui Varignon tuturor forțelor proiectate, în raport cu punctul O de intersecție a axei Ox cu planul, se obține ecuația:

$$y_1 \cdot R_1+y_2 \cdot R_2+y_3 \cdot R_3=G \cdot y. \tag{2}$$

În mod analog aplicînd teorema lui Varignon în raport cu axa Oy se obține:

$$x_1 \cdot R_1+x_2 \cdot R_2+x_3 \cdot R_3=G \cdot x. \tag{3}$$

Din rezolvarea sistemului de ecuații (1), (2) și (3) se obțin valorile reacțiunilor R_1, R_2 și R_3 și deci ale apăsărilor pe planul de sprijin.

1.16. Să se afle mărimea rezultantei unor forțe concurente și unghiurile pe care aceasta le face cu forțele. *Aplicație.* Pe muchiile unei piramide regulate (fig. 1.35) acționează o serie de forțe $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, $\overline{F_4}$, dirijate după muchii, între modulele cărora există relațiile:

$$\frac{F_1}{1}=\frac{F_2}{2}=\frac{F_3}{3}=\frac{F_4}{4}=F.$$

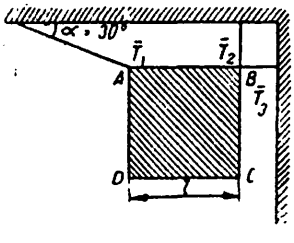


Fig. 1.32.

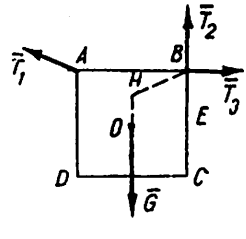


Fig. 1.33.

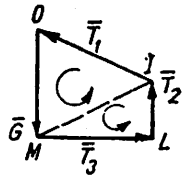


Fig. 1.34.

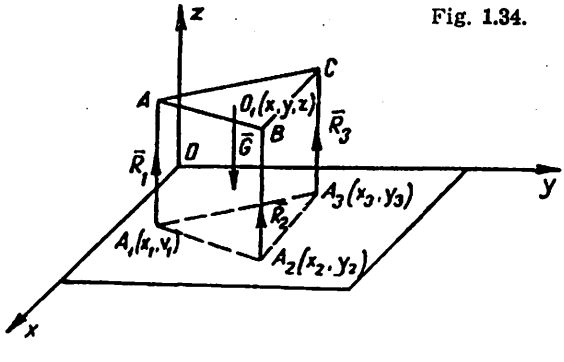
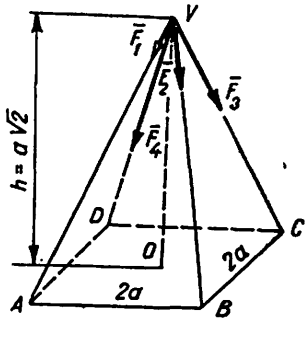


Fig. 1.35.



Rezolvare. În cazul general, ridicînd la pătrat relaţia vectorială:

$$\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n, \tag{1}$$

rezultă

$$R^2=\sum_1^n F_i^2+2\sum_1^n F_iF_j\cos(\overline{F}_i,\ \overline{F}_j). \tag{2}$$

Pentru a afla unghiul rezultantei $\overline{R}$ cu o forţă oarecare $\overline{F}_j$ din calculul produsului scalar $\overline{R}\cdot\overline{F}_j$ se obţine:

$$\cos(\overline{R},\ \overline{F}_j)=\frac{\sum F_i\cos(\overline{F}_i,\overline{F}_j)}{|\overline{R}|}. \tag{3}$$

În cazul aplicaţiei, prin consideraţii geometrice se obţine $VA=2a$, feţele laterale ale piramidei formează triunghiuri echilaterale şi unghiurile dintre forţele date sînt $\frac{\pi}{3}$. Ca urmare, rezultă:

$$R^2=\sum_1^4 F_i^2+2\sum_1^4 F_iF_j\cos(\overline{F}_i,\ \overline{F}_j)=54F^2$$

$$\cos(\overline{R},\ \overline{F}_1)=\frac{F_1\cos 0+F_2\cos\frac{\pi}{3}+F_3\cos\frac{\pi}{2}+F_4\cos\frac{\pi}{3}}{7{,}35F}=0{,}544$$

$$\cos(\overline{R},\ \overline{F}_2)=0{,}544\ ;\ \cos(\overline{R},\ \overline{F}_3)=0{,}816\ ;\ \cos(\overline{R},\ \overline{F}_4)=0{,}816$$

1.17. O bară AOB, îndoită sub un unghi α (fig. 1.36, *a*) de lungimile $AO=L_1$ şi $OB=L_2$, se poate roti fără frecare în jurul articulaţiei O. În A este atîrnată greutatea P. Se cere să se determine:

a) Greutatea Q care trebuie atîrnată în B pentru ca bara OA să fie orizontală.

b) Ce greutate suplimentară q trebuie adăugată lui P pentru ca braţul OB să fie orizontal.

Rezolvare. a) În poziţia cu braţul OA orizontal, din ecuaţia de momente în raport cu punctul O:

$$-QL_2\cos\alpha+L_1P=0,$$

rezultă:

$$Q=\frac{L_1}{L_2\cos\alpha}P.$$

b) Pentru această a doua poziţie a barei (fig. 1.36, *b*), rezultă:

$$(P+q)L_1\cos\alpha=QL_2,$$

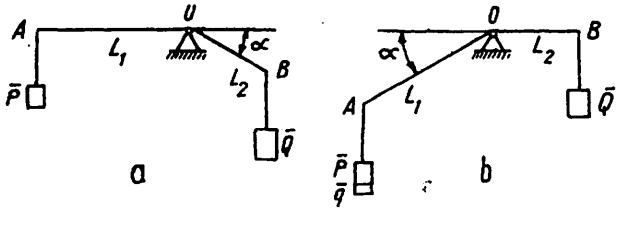


Fig. 1.36.

de unde:

$$q = \frac{L_2}{L_1 \cos \alpha} Q - P.$$

1.18. Un indicator de presiune are forma și dimensiunile din figura 1.37. Roata dințată, solidară cu indicatorul, este acționată de cremaliera C. Să se găsească variația unghiului α în funcție de presiunea p care se exercită asupra bazei cremalierei. Care este presiunea maximă care se poate măsura cu acest aparat?

Rezolvare. Forța care apasă asupra bazei cremalierei este:

$$P = \pi \frac{d^2}{4} p.$$

Datorită acestei forțe, prin intermediul dinților, se rotește roata cu indicator (R). Modulul momentului cuplului care produce rotirea este:

$$M_1 = P\left(e - \frac{d}{2}\right),$$

iar al cuplului rezistent M_2, produs de greutatea G, este

$$M_2 = Gl \sin \alpha.$$

Cînd indicatorul devine imobil, înseamnă că cele două momente care acționează sînt egale, de unde:

$$\sin \alpha = \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2e - d}{Gl} p.$$

Valoarea maximă a unghiului α fiind $\frac{\pi}{2}$ rezultă:

$$p_{max} = \frac{8Gl}{\pi d^2 (2e - d)},$$

valoare care permite gradarea scării indicatorului.

1.19. Pentru a pili vîrful unui corp C, se apasă pila la cele două capete cu forțele P și Q, făcînd cu direcția pilei unghiurile α, respectiv β. Lungimea pilei este l (fig. 1.38). Să se arate cum variază forța Q ca mărime, atunci cînd pila

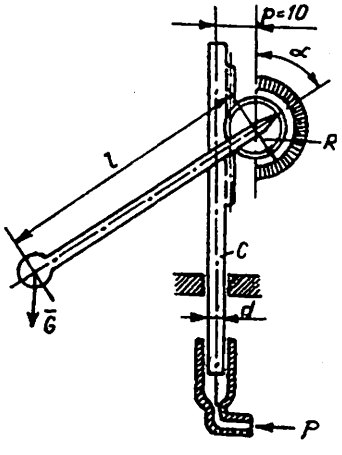
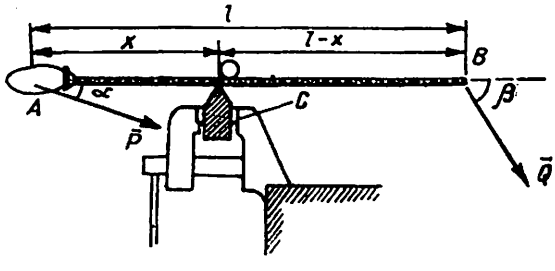


Fig. 1.37.

Fig. 1.38.



este deplasată pe toată lungimea ei, pentru ca să fie totuşi menţinută orizontal. (Se neglijează greutatea pilei). *Aplicaţie*: $P=90$ N; $\alpha=30°$; $\beta=60°$, $l=0{,}3$ m.

Rezolvare. Pentru ca pila să fie menţinută orizontal, trebuie ca momentul forţei $\overline{P}$ în raport cu punctul O să fie egal cu momentul forţei Q în raport cu acelaşi punct, adică:

$$P \cdot x \cdot \sin\alpha = Q\,(l-x)\sin\beta.$$

de unde:

$$Q = P\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,\frac{x}{l-x} = k\frac{x}{l-x},$$

şi apoi se reprezintă variaţia forţei Q.

1.20. La capătul B al unei bare cotite, încastrată în perete, acţionează o forţă $\overline{P}$, aflată în planul barei şi făcînd cu verticala un unghi α (fig. 1.39). Să se calculeze momentul forţei $\overline{P}$ în raport cu punctul de încastrare O.

Rezolvare.

a) Vectorial

$$M_0\overline{P} = \overline{OB}\times\overline{P} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l & h & 0 \\ P\sin\alpha & -P\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = -P\,(l\cos\alpha + h\sin\alpha)\,\bar{k}.$$

b) Varignon. Momentul forţei P este egal cu suma momentelor componentelor acestei forţe. Cum $\overline{P} = (P\sin\alpha)\bar{i} - (P\cos\alpha)\,\bar{j}$ rezultă $M_0\overline{P} = (-Ph\sin\alpha)\bar{k} + (Pl\cos\alpha)\bar{k}$.

c) Analitic. $M_0\overline{P} = -P\delta\bar{k} = -P(l\cos\alpha + h\sin\alpha)\,\bar{k}$ unde s-a notat cu δ distanţa de la punctul O la suportul forţei P.

1.21. Un cărucior, de greutate G, este susţinut de trei roţi. În punctul A, de coordonate (x_A, y_A), este plasată o sarcină concentrată P (fig. 1.40). Cunoscînd a, b, c, să se determine reacţiunile în dreptul roţilor.

Rezolvare. Luînd momentele tuturor forţelor în raport cu Oy, se poate scrie:

$$P\cdot x_A + G\cdot c - N_3\cdot a = 0,$$

de unde:

$$N_3 = \frac{P\cdot x_A + G\cdot c}{a}.$$

Luînd momentele tuturor forţelor în raport cu o axă paralelă cu Ox, trecînd prin roata 2, rezultă:

$$N_1\,2b + N_3\,b - Gb - P(b - y_A) = 0,$$

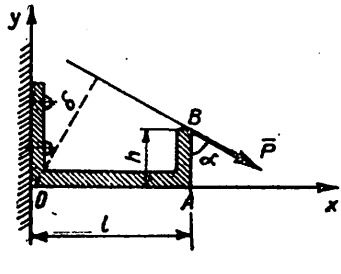
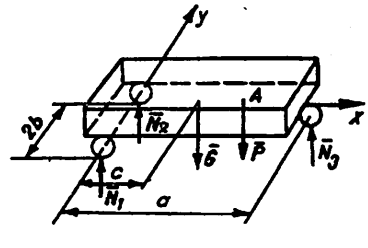


Fig. 1.39.

Fig. 1.40.



de unde:

$$N_1 = \frac{P(b-y_A)}{2b} + \frac{G(a-c)-Px_A}{2a}.$$

În sfîrșit, din ecuația de momente în raport cu axa Ox,

$$N_2 b - N_1 b - Py_A = 0.$$

Înlocuind pe N_1 cu valoarea obținută mai sus și scoțînd pe N_2, rezultă:

$$N_2 = \frac{P(b+y_A)}{2b} + \frac{G-N_3}{2} = \frac{P(b+y_A)}{2b} + \frac{G(a-c)-Px_A}{2a}.$$

1.22. Dîndu-se trei cupluri de forțe $(P, -P)$; $(Q, -Q)$; $(S, -S)$ care sînt îndreptate după laturile unui paralelipiped cu laturile a, b, c (fig. 1.41) să se afle rezultanta sistemului.

Rezolvare. Vectorul rezultant este nul. Componentele momentelor se află luînd momentele forțelor în raport cu axele de coordonate:

$$M_x = 0;\ M_y = (P+S)a;\ M_z = -Qa.$$

Momentul rezultant este:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = a\sqrt{(P+S)^2 + Q^2}.$$

Sistemul se reduce la un cuplu de moment $\overline{M}$. Rezultatul se poate obține direct printr-o însumare vectorială a cuplurilor date:

$$\overline{C}_1 = Pa\overline{j};\quad \overline{C}_2 = -Qa\overline{k};\quad \overline{C}_3 = Sa\overline{j}.$$

1.23. În situația în care un sistem de forțe are axă centrală, să se determine punctele în care aceasta înțeapă planele triedrului de referință (fig. 1.42).

Indicație și răspuns.

Intersectînd axa centrală (w):

$$\frac{M_x-(yZ-zY)}{X} = \frac{M_y-(zX-xZ)}{Y} = \frac{M_z-(xY-yX)}{Z} = \frac{\overline{R}\cdot\overline{M}}{R^2} = \lambda \qquad (w)$$

Fig. 1.41.

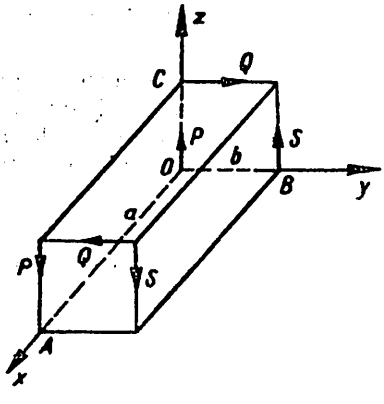
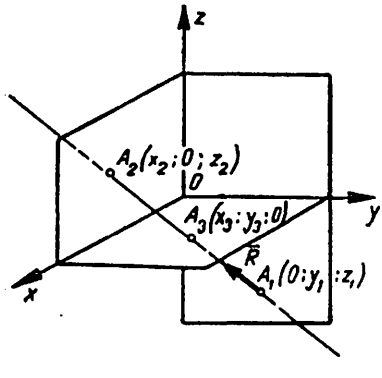


Fig. 1.42.



succesiv cu planele de coordonate $x=0$; $y=0$, $z=0$ se obţin coordonatele:

$$y_1=\frac{\lambda Z-M_z}{X};\quad z_1=\frac{M_y-\lambda Y}{X}$$

$$x_2=\frac{M_z-\lambda Z}{Y};\quad z_2=\frac{\lambda X-M_x}{Y}$$

$$x_3=\frac{\lambda Y-M_y}{Z};\quad y_3=\frac{M_x-\lambda X}{Z}.$$

În situaţia în care $\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{M}_0=0$ coordonatele punctelor de intersecţie cu planele de coordonate sînt:

$$A_1\left(0,\ -\frac{M_z}{X},\ \frac{M_y}{X}\right);\quad A_2\left(\frac{M_z}{Y},\ 0,\ -\frac{M_x}{Y}\right);\quad A_3\left(-\frac{M_y}{Z};\ \frac{M_x}{Z},\ 0\right).$$

1.24. Pe două muchii ale unui cub de latură a acţionează două forţe egale $\overline{P}$ (fig. 1.43). Să se afle torsorul de reducere, momentul minim şi ecuaţia axei centrale.

Rezolvare. Proiecţiile forţelor şi ale momentelor în raport cu sistemul de axe *Oxyz* sînt:

$$X=-P;\quad Y=0;\quad Z=P;\quad R=P\sqrt{2};$$

$$M_x=0;\quad M_y=0;\quad M_z=Pa;\quad M=Pa.$$

$$\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{M}_0=P^2\cdot a.$$

Momentul minim este:

$$M_{min}=\frac{XM_x+YM_y+ZM_z}{R}=\frac{Pa}{\sqrt{2}}.$$

Ecuaţia axei centrale este:

$$\frac{-yP}{-P}=\frac{+zP+xP}{0}=\frac{Pa-yP}{P}=\frac{a}{2},$$

din care rezultă:

$$x+z=0\quad\text{şi}\quad y=\frac{a}{2}.$$

Axa centrală este intersecţia planului bisector ce trece prin axa *Oy* cu planul vertical care trece prin centrul cubului şi paralel cu planul *xOz*.

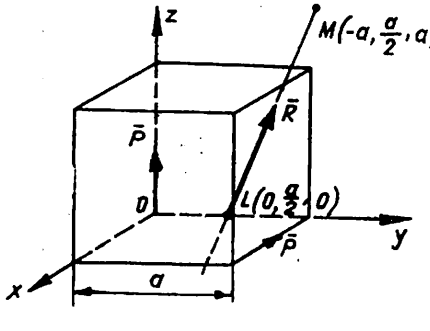


Fig. 1.43.

1.25. Să se reducă sistemul de forţe în spaţiu care acţionează asupra cubului de latură a (fig. 1.44). Punctele H şi I sînt mijloacele laturilor OA şi EF. Să se determine ecuaţia axei centrale.

Rezolvare. Proiecțiile forțelor pe axele de coordonate sînt:

$$X=0;\quad Y=Q\frac{\sqrt{2}}{2};\quad Z=Q\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Momentele în raport cu axele de coordonate se află proiectînd toate forțele succesiv pe un plan perpendicular pe axa respectivă și luînd momentul proiecțiilor în raport cu originea.

Se obține:

$$M_x=0;\quad M_y=-Q\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}-Pa;\quad M_z=Q\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}-Pa.$$

Sistemul se reduce la vectorul rezultant:

$$\overrightarrow{R}=\overrightarrow{Q}$$

și la momentul rezultant de modul:

$$M_0=a\sqrt{2P^2+\frac{Q^2}{4}}.$$

Ecuația axei centrale este:

$$\frac{-yQ\frac{\sqrt{2}}{2}+zQ\frac{\sqrt{2}}{2}}{0}=\frac{-Q\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2}-Pa+xQ\frac{\sqrt{2}}{2}}{Q\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{Q\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2}-Pa-xQ\frac{\sqrt{2}}{2}}{Q\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

din care rezultă $y=z$ și $x=\frac{a}{R}$.

Se observă că axa centrală este chiar dreapta HI.

1.36. Asupra unui paralelipiped cu laturile de 2, 3, 4 dm acționează trei forțe $F_1=110$ N, $F_2=100$ N, în lungul diagonalei AF și $F_3=60$ N (fig. 1.45). Să se reducă sistemul de forțe și apoi să se determine axa centrală.

Fig. 1.44.

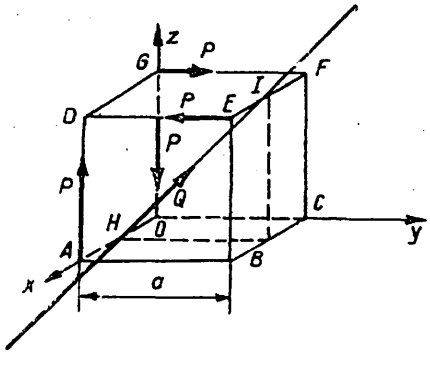
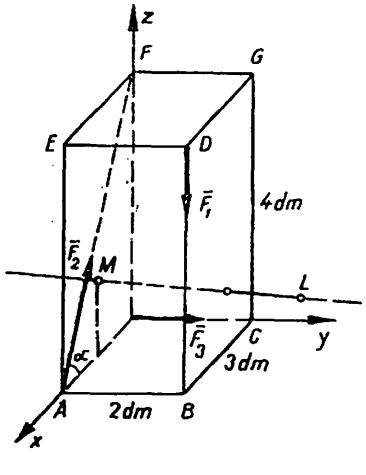


Fig. 1.45.



Rezolvare. Notînd cu α unghiul forței F_2 cu orizontala, rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}; \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}; \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}.$$

Proiecțiile forțelor pe axele de coordonate sînt:

$$X = -F_2\cos\alpha = -60\text{ N}; \quad Y = F_3 = 60\text{ N}; \quad Z = F_2\sin\alpha - F_1 = -30\text{ N},$$

de unde rezultanta este:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 90\text{ N}$$

Momentul rezultant este:

$$M_x = -2\ F_1 = -220\text{ N. dm};$$

$$M_y = 3\ F_1 - 3\ F_2\sin\alpha = 90\text{ N. dm};$$

$$M_z = 0,$$

de unde:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \neq 0$$

$$K = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{R} = \frac{620}{3}\text{ N. dm.}$$

Ecuația axei centrale este:

$$\frac{-22+3y+6z}{-6} = \frac{9+6z-3x}{6} = \frac{-6x-6y}{-3} = \frac{K}{R} = \frac{620}{3}\cdot\frac{1}{90},$$

de unde se deduce sistemul:

$$x+y = \frac{31}{27}; \quad x-2z = -\frac{43}{27}, \quad y+2z = \frac{74}{27}.$$

Axa centrală intersectează planele yOz și xOz în punctele L și M.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

1. 27. Forța motorului care pune în mișcare masa unei mașini de rindeluit este $F_1 = 6$ kN. Rezistența opusă cuțitului este $F_2 = 0{,}75$ kN. Care este forța care mișcă masa în timpul lucrului?

Răspuns. $F = F_1 - F_2 = 5{,}25$ kN.

1.28. Greutatea $\overline{Q}$, este ridicată cu ajutorul unui scripete acționînd cablul cu forța $\overline{P}$ astfel încît direcția firului să formeze unghiul α cu verticala (fig. 1.46). Neglijînd greutatea și frecarea în axul scripetelului, să se determine reacțiunea în locul de fixare a scripetelui.

Indicaţie şi răspuns. Neglijînd frecarea în lungul firului există o aceeaşi tensiune $T=P=Q$. Reacţiunea în suportul scripetelului este egală şi de sens contrar cu rezultanta celor două forţe P şi Q, ca urmare:

$$N=|\overline{R}|=2Q\cos\frac{\alpha}{2};\quad \theta=\frac{\alpha}{2}.$$

1.29. Antena unui post de radioemisie, avînd înălţimea H, greutatea G, este fixată prin trei ancore de lungimi egale. Punctele de ancorare A, B, C de pe sol, sînt vîrfurile unui triunghi echilateral de latură l, avînd centrul în O (fig. 1.47). Să se afle efortul P din cablu şi apăsarea V pe izolatorul de la baza acestuia.

Răspuns: $P=\dfrac{G\sqrt{H^2+\frac{l^2}{3}}}{3H}$; $V=G$.

1.30. Un cazan de formă cilindrică, de rază R şi greutate G, este rezemat fără frecare în punctele A şi B, aflate la distanţa l (fig. 1.48). Să se afle reacţiunile din A şi B.

Răspuns:

$$N_A=N_B=\frac{G}{2\cos\alpha}.$$

1.31. În momentul baterii ţesăturii de către vătala unui război de ţesut, aceasta este apăsată cu o forţă orizontală P. Piciorul BC al vătalei fiind în

Fig. 1.46.

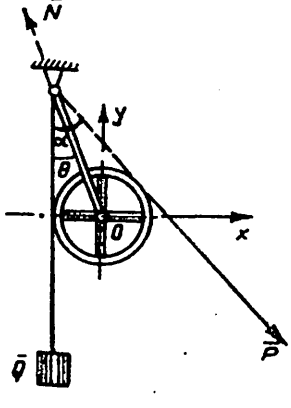


Fig. 1.47.

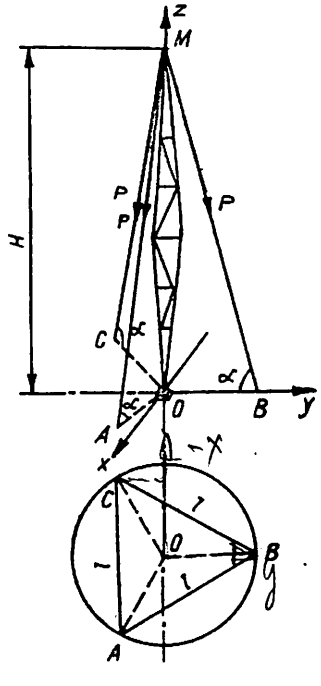
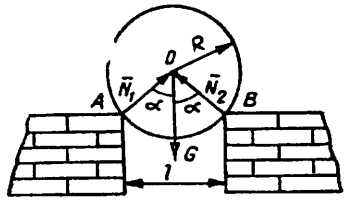


Fig. 1.48.



acel moment vertical, iar biela AB înclinată cu unghiul α față de orizontală (fig. 1.49, *a*) se cere:

a) efortul din bielă și din piciorul vătalei:

b) componentele efortului, după direcția manivelei și o direcție perpendiculară pe aceasta.

Indicație și răspuns. Descompunînd forța $\bar{F}$ după direcția bielei AB și vătalei BC, rezultă (fig. 1.49, *b*):

$$S_B=\frac{F}{\cos\alpha};\quad S_V=F\operatorname{tg}\alpha$$

b) Descompunînd efortul din bielă după direcția manivelei și o direcție perpendiculară pe aceasta se obține:

$$S_T=S_B\cos\beta;\quad S_M=S_B\sin\beta.$$

1.32. Două bare orizontale $AC=l_1$, $AD=l_2$ sînt articulate în A cu o a treia bară $AB=l$ și susțin o greutate $\bar{G}$ (fig. 1.50). Să se determine eforturile din cele trei bare.

Răspuns.

$$S_{AB}=\frac{G}{\cos\gamma};\quad S_{AC}=G\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi;\quad S_{AD}=G\operatorname{tg}\gamma\cos\varphi,$$

unde $\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}{l}$ și $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{l_2}{l_1}$.

1.33. Un glob electric, în greutate $G=250$ N, este suspendat în mijlocul unei străzi, cu ajutorul a trei cabluri. Unul dintre cabluri este fixat de zidul unei clădiri la o înălțime de 8 m; celelalte două cabluri, de aceeași lungime și dispuse simetric față de primul cablu, sînt fixate de zidul clădirii opuse, la o înălțime de 6,50 m (fig. 1.51). Distanța dintre punctele de suspensie ale acestor două cabluri este de 2,50 m. Lățimea străzii este de 9 m, iar nodul de legătură al cablurilor este la 5 m deasupra străzii. Să se determine tensiunile din cele trei cabluri.

Fig. 1.49.

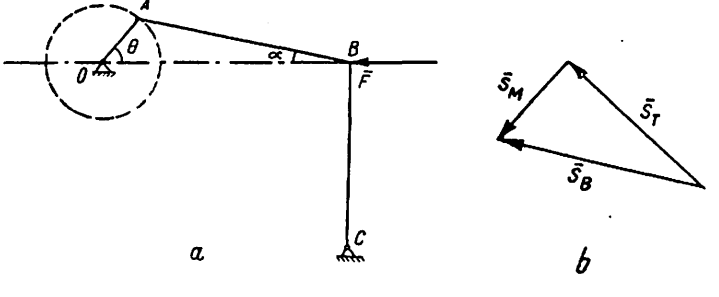
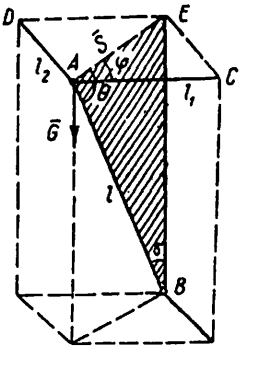


Fig 1.50.



Răspuns.

$$T_1=G\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)};\quad T_2=T_3=\frac{G}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\gamma}{2}};$$

$$\alpha=33°40';\quad \beta=18°27';\quad \gamma=29°30',$$

$$T_1=298\text{ N};\quad T_2=T_3=264\text{ N}.$$

1.34. În timpul strunjirii unei piese, asupra vîrfului cuțitului unui strung acționează:

— o forță verticală $P_z=18$ kN;

— o forță orizontală, perpendiculară pe axa piesei, $P_y=6{,}3$ kN.

— o forță orizontală după direcția axei piesei $P_x=4{,}5$ kN. Să se determine mărimea rezultantei și unghiurile pe care le face cu axele de coordonate (fig. 1.52).

Răspuns.

$$R=\sqrt{P_x^2+P_y^2+P_z^2}=19{,}6\text{ kN};\quad \alpha=\arccos\frac{P_x}{R}=76°41';$$

$$\beta=\arccos\frac{P_y}{R}=71°7';\quad \gamma=\arccos\frac{P_z}{R}=23°.$$

1.35. Un troliu are tamburul mare cu diametrul D și tamburul mic cu diametrul d. De tamburul mare sînt prinse două fire menținute paralele cu ajutorul a doi scripeți, avînd fiecare la capete o greutate P (fig. 1.53). Ce greutate Q trebuie atîrnată de firele ce pornesc de la tamburul mic, pentru ca troliul să nu se rotească?

Indicație și răspuns. Deoarece cuplurile acționează în planuri paralele, și sînt egale, rezultă:

$$Q=P\frac{D}{d}.$$

Fig. 1.51.

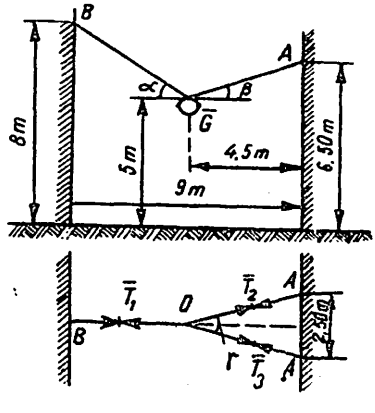


Fig. 1.52.

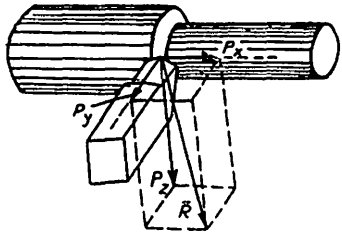
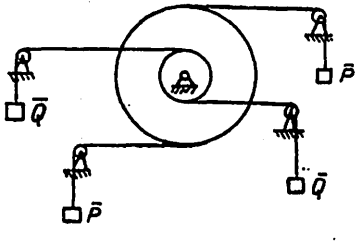


Fig. 1.53.



1.36. O grindă AB de greutate neglijabilă este susţinută de două bare verticale EC şi GD (fig. 1.54). Dacă la capetele grinzii se aplică forţele verticale $\overline{F}$, să se determine efortul S din bare.

Răspuns. $S=F\frac{l}{a}$. Bara EC este întinsă, iar bara DF este comprimată.

1.37. Să se afle mărimea momentului cuplului echivalent cu două cupluri situate în planuri care formează între ele un unghi α, mărimile forţelor cuplurilor fiind respectiv F_1 şi F_2, iar braţele lor d_1, d_2.

Răspuns: $|\overline{M}| = \sqrt{(F_1d_1)^2+(F_2d_2)^2+2F_1d_1F_2d_2\cos\alpha}$.

1.38. Pentru a ridica ancora unui vapor, patru mateloţi acţionează la capetele braţelor unui cabestan, cu forţele $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$ (fig. 1.55). Braţele A şi C, având lungimi egale l, iar braţele B şi D egale cu l', să se determine modulul cuplului care roteşte cabestanul.

Indicaţie şi răspuns. Cele două cupluri date de forţele $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$ fiind în acelaşi plan, cuplul rezultant, este egal cu suma algebrică a celor două cupluri:

$$C=2l\cdot P+2l'\cdot Q.$$

1.39. Să se determine analitic şi grafic modulul şi direcţia rezultantei forţelor plane indicate în tabela 1.3.

Tabela 1.3

Forţe plane

$\overline{F}$	coordonate cm		unghiul direcţiei forţei cu Ox
	x_i	y_i	
$F_1=10$	-2	2	240°
$F_2=6$	2	5	270°
$F_3=12$	-1	-4	0°
$F_4=16{,}2$	8	-6	115°40′

Indicaţie şi răspuns. Componentele X şi Y ale rezultantei forţelor fiind nule, rezultanta lor este zero. Deoarece $\sum M_0\overline{F}_i\neq 0$ sistemul de forţe se reduce la un cuplu.

Grafic (fig. 1.56) se verifică că poligonul forţelor se închide, iar poligonul funicular are laturile extreme α şi ω paralele şi diferite.

1.40. Pe un ax cu lungimea $l=1{,}60$ m se găsesc trei şaibe având greutăţile $G_1=120$ N, $G_2=180$ N şi $G_3=100$ N. Ştiind că $a_1=40$ cm, $a_2=60$ cm şi $a_3=16$ cm, să se determine rezultanta forţelor, poziţia acesteia faţă de reazemul A, şi reacţiunile din lagărele A şi B.

Indicaţie şi răspuns. Rezultanta forţelor este $R=G_1+G_2+G_3=400$ N. Din teorema lui Varignon $Rd=G_1a_1+G_2(a_1+a_2)+G_3(a_1+a_2+a_3)$, rezultă distanţa d de la reazemul A la rezultantă.

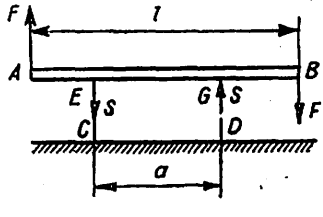


Fig. 1.54.

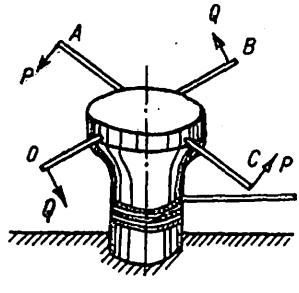


Fig. 1.55.

Luînd momentele forțelor și reacțiunilor în raport cu punctul B, respectiv A, se obțin reacțiunile R_A și R_B:

$$R_A = \frac{G_1(l-a_1)+G_2(l-a_1-a_2)+G_3(l-a_1-a_2-a_3)}{l} = 185 \text{ N}$$

$$R_B = \frac{G_1a_1+G_2(a_1+a_2)+G_3(a_1+a_2+a_3)}{l} = 215 \text{ N}.$$

Rezolvarea grafică este arătată în figura 1.57.

1.41. Doi muncitori duc pe umeri o traversă de greutate G, pe o grindă rezemată în A și B (fig. 1.58). Distanța dintre muncitori este a, iar muncitorii au

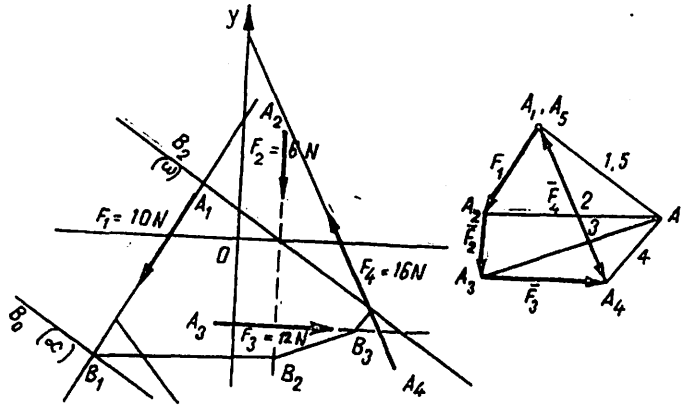


Fig. 1.56.

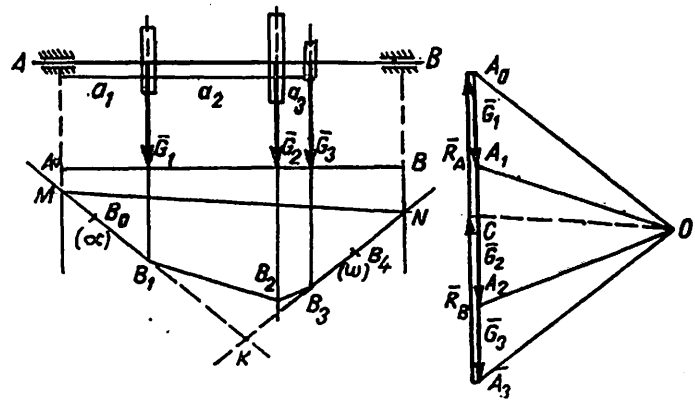


Fig. 1.57.

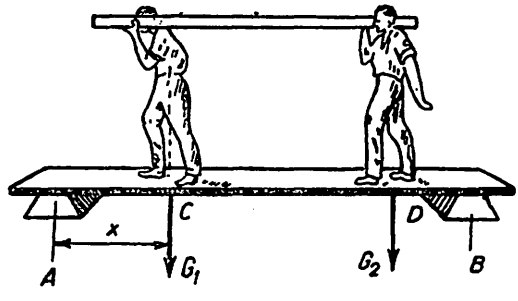


Fig. 1.58.

respectiv greutăţile G_1 şi G_2. Ştiind că distanţa dintre reazime este l, să se determine pentru ce poziţie (C) a muncitorului apăsarea pe reazemul A este de K ori mai mare decît aceea de pe reazemul B.

Indicaţie şi răspuns. Notînd cu x distanţa de la muncitorul aflat în C la reazemul A, luînd momentele în raport cu cele două reazeme, şi ţinînd seama de relaţia de condiţie:

$$R_A = K \cdot R_B,$$

rezultă:

$$x = \frac{l}{1+k} - a\,\frac{G_2 + \frac{G}{2}}{G_1+G_2+G}.$$

1.42. Un tractor are o greutate G concentrată în punctul C (fig. 1.59). Cunoscînd distanţele a şi b să se determine apăsările P şi Q respectiv pe fiecare roată din spate şi din faţă

Răspuns. $P = \frac{a-b}{2a} \cdot G$; $Q = \frac{b}{2a} \cdot G$.

1.43. Troleul OA al unui tramvai, în greutate de 110 N, aplicat la distanţa l=0,9 m de O, are forma unei bare cotite (fig. 1.60). Cablul exercită asupra rolei R, în greutate de 38 N, o apăsare de 90 N. Să se calculeze suma momentelor tuturor forţelor în raport cu articulaţia O.

Răspuns.

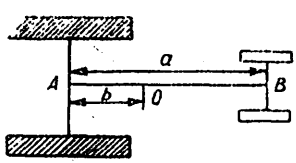
$$M_0 = T \cdot 230 \cos 15° - 110 \cdot 900 \cos 30° + (90+38)2\,700 \cos 30°.$$

1.44. Înşurubarea unei piese se face cu ajutorul unei chei de lungime l; la capătul căreia acţionează forţa $\overline{P}$ (fig. 1.61) care face cu planul orizontal unghiul β şi a cărei proiecţie orizontală formează cu axa cheii unghiul α. Să se determine momentul care răsuceşte piesa.

Răspuns. $\overline{OA} = \overline{l}\,\overline{j}$; $\overline{P} = (P\cos\beta\sin\alpha)\,\overline{i} - (P\cos\beta\cos\alpha)\,\overline{j}$

$$-(P\sin\beta)\,\overline{K};\quad \overline{M}_0 = \overline{OA}\times\overline{P} = -(Pl\cos\beta\sin\alpha)\,\overline{K} - (Pl\sin\beta)\,\overline{i}$$

Fig. 1.59.



Momentul căutat este $M_A = -Pl\cos\beta\sin\alpha$.

1.45. O bară cotită, încastrată în perete, are o greutate q pe unitatea de lungime (fig. 1.62). Ştiind că la

Fig. 1.60.

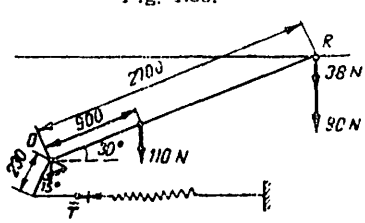


Fig. 1.61.

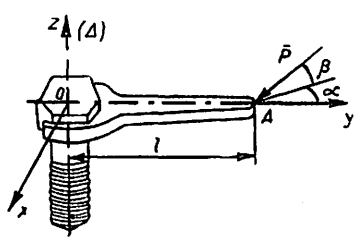
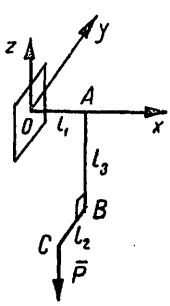


Fig. 1.62.



capătul ei acționează o forță $\overline{P}$, să se calculeze momentele forțelor în raport cu un sistem de axe ortogonale, cu originea în O.

Răspuns.

$$M_x=Pl_2+q\cdot\frac{l_2^2}{2};\quad M_y=Pl_1+ql_1\left(l_3+\frac{l_1}{2}+l_2\right);\quad M_z=0.$$

1.46. Asupra unui bloc de piatră de forma unei prisme drepte, avînd dimensiunile din figura 1.63, acționează o forță P de-a lungul muchiei AB. Să se calculeze momentul forței $\overline{P}$ în raport cu punctul O.

Răspuns.

$$\overline{M}_0\overline{P}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & h \\ -P\cos\alpha & P\sin\alpha & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(-Ph\sin\alpha)\,\overline{i}+(-Ph\cos\alpha)\,\overline{j}+P\,(a\sin\alpha+b\cos\alpha)\,\overline{k}$$

$$|\overline{M}_0\overline{P}|=P\sqrt{h^2+(a\sin\alpha+b\cos\alpha)^2}.$$

1.47. Asupra manivelei M acționează o forță $\overline{P}$, înclinată față de planul orizontal cu unghiul α (fig. 1.64). Cunoscînd distanțele l, h, a, să se determine momentul forței $\overline{P}$ în raport cu punctul O.

Răspuns.

$$\overline{M}_0\overline{P}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & a+l & h \\ P\cos\alpha & 0 & P\sin\alpha \end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}\cdot P\,(a+b)\sin\alpha+\overline{j}\cdot Ph\cos\alpha-\overline{k}P\,(a+l)\cos\alpha$$

și

$$|\overline{M}_0\overline{P}|=P\sqrt{(a+l)^2+h^2\cos^2\alpha}.$$

1.48. Să se reducă în O sistemul de forțe din figura 1.65 $\overline{P}$, $a\overline{P}$, $\overline{M}$, unde a este o constantă pozitivă. Discuție.

Răspuns. $\overline{R}=P\overline{i}+aP\overline{k}$; $\overline{M}_0=-M\overline{j}$.

Fig. 1.63.

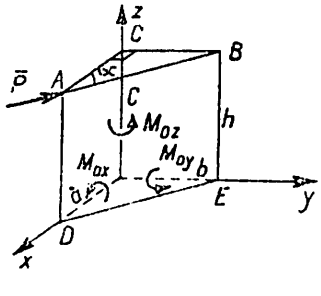


Fig. 1.64.

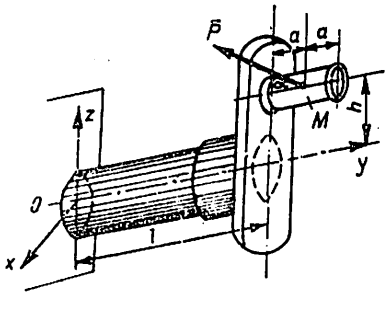
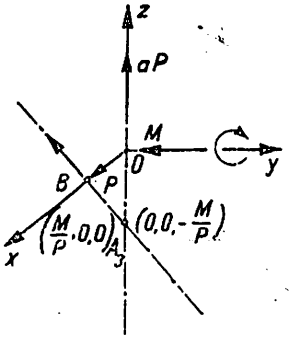


Fig. 1.65.



Deoarece $\overline{R}\cdot\overline{M}_0=0$; sistemul se reduce la o rezultantă unică; axa centrală este definită de ecuațiile:

$$y=0;\quad ax-z=\frac{M}{P}$$

ce trece prin punctele $A_3\left(0,\ 0,\ -\frac{M}{P}\right)$ și $B\left(\frac{M}{aP},\ 0,\ 0\right)$ și e paralelă cu planul yOz.

1.49. Să se efectueze reducerea sistemului de forțe din figura 1.66,*a*.

Răspuns. $\overline{R}=2P\overline{k}$; $\overline{M}_0=M\overline{j}$, $\overline{R}\cdot\overline{M}_0=0$. Sistemul se reduce la o rezultantă unică.

Axa centrală a sistemului

$$\frac{-y\,2P}{0}=\frac{M+x\,2P}{0}=0$$

trece prin punctul $A\left(-\frac{M}{2P},\ 0,\ 0\right)$ și e paralelă cu axa Oz (fig. 1.66, *b*).

1.50. Să se reducă sistemul de forțe din figura 1.67 în originea O.

Răspuns.

$$\overline{R}=2P\overline{i}+4P\overline{j}-3P\overline{k}$$
$$\overline{M}_0=-12aP\overline{i}+6aP\overline{j}$$
$$\overline{R}\cdot\overline{M}_0=0.$$

Sistemul se reduce la o forță unică a cărei axă centrală trece prin punctul $A_3(2a,\ 4a,\ 0)$ și $E(0,\ 0,\ 3a)$.

1.51. Să se reducă sistemul de forțe din figura 1.68 determinînd intersecția axei centrale cu planele de coordonate.

Răspuns. $\overline{R}=-4P\overline{i}+4P\overline{j}+5P\overline{k}$

$$\overline{M}_0=-30aP\overline{j}+24aP\overline{k}$$
$$\overline{R}\cdot\overline{M}_0=0.$$

Fig. 1.66.

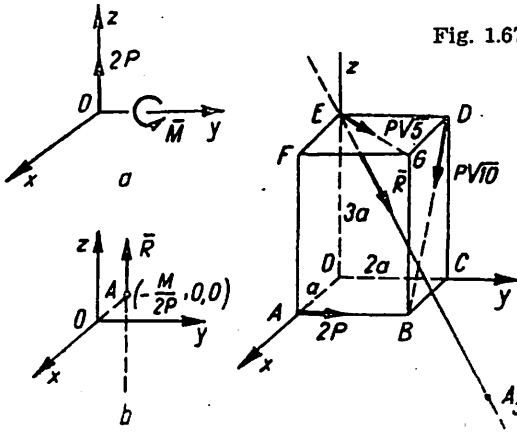
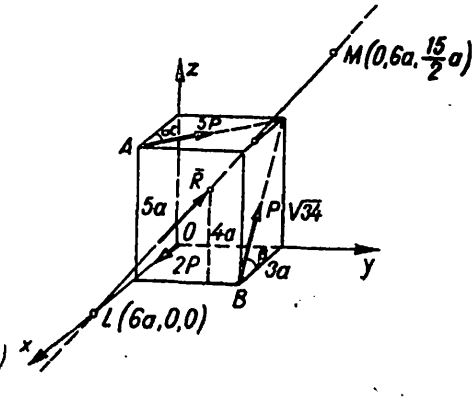


Fig. 1.67.

Fig. 1.68.



Sistemul este echivalent cu o forță unică.

Ecuația axei centrale este:

$$\frac{-5y+4z}{-4}=\frac{-30a+4z+5x}{4}=\frac{24a-4x-4y}{5}=\frac{0}{57P}$$

Axa centrală trece prin punctele de coordonate

$$L(6a,\ 0,\ 0);\ M\left(0,\ 6a,\ \frac{15}{2}a\right).$$

1.52. Să se reducă sistemul de forțe din figura 1.69. *Aplicație*: $a=2$ dm; $b=3$ dm; $c=4$ dm; $F_1=40$ N; $F_2=10$ N; $F_3=50$ N.

Indicație și răspuns. $X=40$ N; $Y=10$ N; $Z=-50$ N; $R=118{,}7$ N; $\cos(\overline{R},\overline{i})=\frac{X}{R}=0{,}337$; $\cos(\overline{R},\overline{j})=\frac{Y}{R}=0{,}842$; $\cos(\overline{R},\overline{k})=\frac{Z}{R}=-0{,}421$; $M_x=-150$ N dm; $M_y=160$ N dm; $M_z=200$ N dm; $\overline{R}\cdot\overline{M}_0=0$.

Sistemul se reduce la o forță unică în lungul axei centrale, a cărei suport taie planul xOy în punctul de coordonate $L(3{,}2;\ 3;\ 0)$, iar planul xOz în punctul $M(2;\ 0,\ 1,\ 5)$ dm.

1.53. Să se reducă în punctul O sistemul de patru forțe aplicate asupra unui rigid care are componentele și punctele de aplicație din tabela 1.4.

Tabela 1.4

Reduceri de forțe în spațiu

	X_i N	Y_i N	Z_i N	x_i m	y_i m	z_i m
F_1	4	5	6	1	2	3
F_2	4	0	2	2	3	1
F_3	2	1	7	0	−1	2
F_4	−6	1	−2	5	4	−1

Răspuns. $\overline{R}=4\overline{i}+7\overline{j}+13\overline{k}$; $|\overline{R}|=15{,}297$ N.

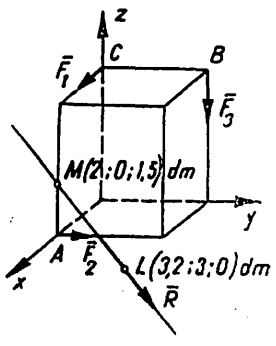
Cosinusurile directoare ale direcției rezultantei sînt:

$$\cos\alpha=\frac{X}{R}=\frac{4}{15{,}297};\quad \alpha=74°50';$$

$$\cos\beta=\frac{Y}{R}=\frac{7}{15{,}297};\quad \beta=62°46';$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{R}=\frac{13}{15{,}297};\quad \gamma=31°43';$$

Fig. 1.69.



$$\overline{M}_0=M_x\bar{i}+M_y\bar{j}+M_z\bar{k}=-13\ \bar{i}+26\ \bar{j}+16\ \bar{k}.$$

$\overline{R}\cdot\overline{M}_0=338$ N²m. Sistemul se reduce la un torsor minimal. Valoarea minimală a momentului este:

$$M_{min}=\frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_0}{|\overline{R}|}=220{,}96\text{ N.m.}$$

Axa centrală are ecuaţia:

$$\frac{-13-13y+7z}{4}=\frac{26-4z+13x}{7}=\frac{16-7x+4y}{13}=1{,}435.$$

1.54. Să se reducă sistemul de forţe din figura 1.70 precizînd torsorul de reducere în O, trinomul invariant, elementele torsorului minim şi ecuaţia axei centrale.

Răspuns.

$$\overline{R}=P\bar{i}-2P\bar{j}-6P\bar{k};\quad \overline{M}_0=9aP\bar{j}$$

$$\overline{R}\cdot\overline{M}_0=-18aP^2\neq 0.$$

Sistemul se reduce la un torsor minimal, a căror elemente sînt $\overline{R}$ şi $\overline{M}$, unde

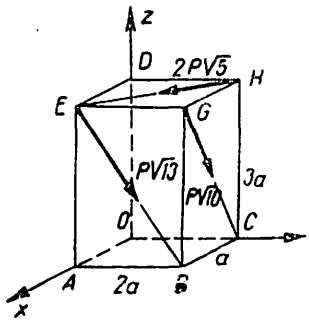


Fig. 1.70.

$$\overline{M}_{min}=M_{min}\frac{\overline{R}}{R}=\frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_0}{R}\cdot\frac{\overline{R}}{R}=-\frac{18aP}{41}(\bar{i}-2\bar{j}-6\bar{k})$$

axa centrală are ecuaţia:

$$\frac{6y-2z}{1}=\frac{9a-z-6x}{-2}=\frac{y+2x}{-6}=-\frac{18}{41}a.$$

Capitolul 2

CENTRE DE MASĂ

A. CONSIDERAŢII TEORETICE

1. **Centrul de masă (greutate)** (ξ, η, ζ) **al unui corp** este centrul forţelor paralele corespunzătoare tuturor greutăţilor punctelor materiale care constituie corpul. Notînd cu p_i greutatea particulei de volum v_i, se poate scrie:

$$\xi=\frac{\Sigma x_i p_i}{\Sigma p_i};\quad \eta=\frac{\Sigma y_i p_i}{\Sigma p_i};\quad \zeta=\frac{\Sigma z_i p_i}{\Sigma p_i}, \tag{a}$$

în care (x_i, y_i, z_i) sînt coordonatele centrului de greutate al particulei materiale elementare. Sume de forma celor de la numărători se numesc *momente statice.*

Deoarece $p_i=m_i g$, în care m_i este masa elementară, iar g acceleraţia gravitaţională, din (*a*) rezultă:

$$\xi=\frac{\Sigma x_i m_i}{\Sigma m_i};\quad \eta=\frac{\Sigma y_i m_i}{\Sigma m_i};\quad \zeta=\frac{\Sigma z_i m_i}{\Sigma m_i}, \tag{b}$$

fapt pentru care centrul de greutate al unui corp se mai numeşte şi *centrul maselor.*

Prin introducerea greutăţii volumice $\gamma=p_i/v_i$, în care v_i este volumul elementar, rezultă *pentru corpurile omogene* relaţiile:

$$\xi=\frac{\Sigma x_i v_i}{\Sigma v_i};\quad \eta=\frac{\Sigma y_i v_i}{\Sigma v_i};\quad \zeta=\frac{\Sigma z_i v_i}{\Sigma v_i}; \tag{c}$$

care arată că, pentru *corpuri omogene*, centrul de greutate *depinde numai de forma geometrică a corpului*, fiind independent de greutatea volumică (γ).

În mod analog, pentru suprafeţe plane se poate scrie:

$$\xi=\frac{\Sigma x_i A_i}{\Sigma A_i};\quad \eta=\frac{\Sigma y_i A_i}{\Sigma A_i};\quad \zeta=\frac{\Sigma z_i A_i}{\Sigma A_i}.$$

iar pentru linii omogene :

$$\xi = \frac{\Sigma x_i \cdot l_i}{\Sigma l_i}; \quad \eta = \frac{\Sigma y_i \cdot l_i}{\Sigma l_i}; \quad \zeta = \frac{\Sigma z_i \cdot l_i}{\Sigma l_i}.$$

2. **Poziţia centrului de greutate** nu depinde de sistemul de axe ales şi este independentă de direcţia forţelor.

Dacă un corp omogen are un plan de simetrie, centrul lui de greutate se găseşte în acel plan. Corpul care are două planuri de simetrie, are centrul de greutate pe dreapta de intersecţie a planurilor de simetrie, care este o axă de simetrie a corpurilor. Un corp cu centru de simetrie are centrul de greutate în centrul de simetrie.

Dacă un element geometric (volum, suprafaţă, linie) este format din suma sau diferenţa mai multor elemente, cărora li se cunoaşte poziţia centrelor de greutate, centrul de greutate total se află în centrul forţelor paralele, egale cu greutăţile părţilor componente şi aplicate în centrele lor de greutate.

3. **Pentru determinarea** centrelor de greutate se folosesc : *teorema momentelor statice, calculul integral, metoda grafică.*

4. **Teorema momentelor statice.** Pentru aflarea centrului de greutate al unui element geometric (linie, suprafaţă, volum) :

— se descompune corpul în mai multe părţi ale căror centre de greutate sînt cunoscute, sau pot fi uşor determinate ;

— se precizează axele de coordonate, alegînd pe cele care aduc simplificări în calcule (axe de simetrie etc.) ;

— se aplică relaţiile :

$$\xi = \frac{\Sigma x_i F_i}{\Sigma F_i}; \quad \eta = \frac{\Sigma y_i F_i}{\Sigma F_i}; \quad \zeta = \frac{\Sigma z_i F_i}{\Sigma F_i}, \qquad (d)$$

în care F_i pot fi elementele de greutate p, masă m, volum v, arie A, linie l;

— în cazul cînd elementele din care este compus corpul sînt numeroase, este bine ca sumele $\sum F_i$, $\sum x_i F_i$, $\sum y_i F_i$, $\sum z_i F_i$, care intră în calcule, să fie scrise sub formă de tabelă cu dublă intrare (tabela 2.1) :

Tabela 2.1

Model de tabelă pentru calculul centrelor de greutate

Corpul	x_i	y_i	z_i	F_i	$x_i F_i$	$y_i F_i$	$z_i F_i$

Coordonatele x_i, y_i, z_i ale centrelor de greutate ale corpurilor componente se determină faţă de sistemul de axe ales.

La calculul sumelor trebuie să se dea atenţie atît la semnele forţelor (care pot fi pozitive sau negative, după cum corpurile componente se adaugă sau se scot), cît şi la semnele coordonatelor x_i, y_i, z_i, în raport cu sistemul de axe ales. De asemenea, deşi poziţia centrului de greutate este aceeaşi în raport cu corpul,

coordonatele lui diferă în raport cu axele alese, deci cînd se definesc coordonatele centrului de greutate, trebuie să se precizeze neapărat sistemul de referinţă.

5. **În cazul mediilor continui,** sumele din formulele de mai sus se transformă în integrale.

Notînd cu μ masa specifică a elementului de volum (dV), respectiv de suprafaţă (dA) sau de linie (dL), aceasta este un scalar care depinde în general de poziţia punctului considerat:

$$\mu=\frac{dm}{dV} \text{ sau } \mu=\frac{dm}{dA} \text{ sau } \mu=\frac{dm}{dL}.$$

Poziţia centrului de greutate este dată pentru linii, suprafeţe sau volume, respectiv de relaţiile:

$$\xi=\frac{\int \mu x\, dL}{\int \mu\, dL};\quad \eta=\frac{\int \mu y\, dL}{\int \mu\, dL};\quad \zeta=\frac{\int \mu z\, dL}{\int \mu\, dL};$$

$$\xi=\frac{\int \mu x\, dA}{\int \mu\, dA};\quad \eta=\frac{\int \mu y\, dA}{\int \mu\, dA};\quad \zeta=\frac{\int \mu z\, dA}{\int \mu\, dA}; \qquad (e)$$

$$\xi=\frac{\int \mu x\, dV}{\int \mu\, dV};\quad \eta=\frac{\int \mu y\, dV}{\int \mu\, dV};\quad \zeta=\frac{\int \mu z\, dV}{\int \mu\, dV}.$$

Pentru corpurile omogene, masa specifică μ fiind constantă, se poate da factor comun în formulele precedente şi simplifica.

6. **Teoremele lui Guldin.** Există două teoreme, una referitoare la centrul de greutate al arcelor de curbă plană şi alta referitoare la centrul de greutate al suprafeţelor plane, cu ajutorul cărora se poate determina, în unele cazuri simple, poziţia centrelor de greutate.

Teorema I. Aria A, obţinută prin rotirea completă a unei curbe AB plane oarecare de lungime L, în jurul unei axe (xx') situată în planul curbei şi pe care nu o traversează (fig. 2.1, *a*) este egală cu produsul dintre lungimea curbei şi lungimea cercului pe care îl descrie centrul de greutate G al curbei:

$$A=L\,2\pi\eta, \quad \text{de unde} \quad \eta=\frac{A}{2\pi L}. \qquad (f)$$

Teorema a II-a. Volumul V, generat de o suprafaţă plană care se roteşte complet în jurul unei axe (xx') din planul ei şi pe care nu o traversează (fig. 2.1, *b*), este egal cu produsul dintre aria A şi lungimea cercului pe care îl descrie centrul de greutate G:

$$V=A\cdot 2\pi\eta, \text{ de unde } \eta=\frac{V}{2\pi A}. \qquad (g)$$

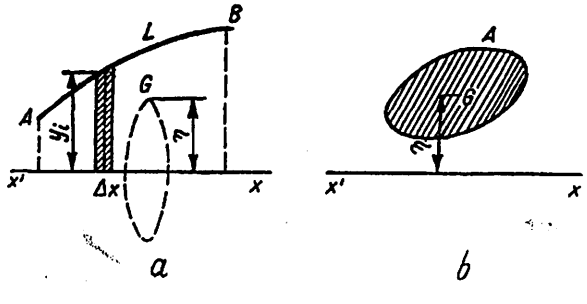


Fig. 2.1.

7. **Metoda grafică** constă în descompunerea corpului în elemente componente, ale căror centre de greutate se cunosc sau pot fi determinate cu uşurinţă şi apoi, grafic, cu ajutorul poligonului forţelor şi funicular, se determină rezultanta forţelor, pe care se află centrul de greutate.

Reluînd construcţia pentru o direcţie perpendiculară, la intersecţia celor două direcţii ale rezultantelor se află centrul de greutate căutat.

8. În anexa 1, sînt date coordonatele centrelor de greutate ale unor corpuri uzuale.

B. PROBLEME REZOLVATE

2.1. Să se determine centrul de greutate al barei omogene $OABC$ (fig. 2.2 şi tabela 2.2).

Tabela 2.2

Calculul centrului de greutate

x_i	y_i	l_i	$x_i l_i$	$y_i l_i$
$\frac{a}{2}\sin\alpha$	$\frac{a}{2}\cos\alpha$	a	$\frac{a^2}{2}\sin\alpha$	$\frac{a^2}{2}\cos\alpha$
$a\sin\alpha$	$a\cos\alpha+\frac{b}{2}$	b	$ab\sin\alpha$	$b\left(a\cos\alpha+\frac{b}{2}\right)$
$a\sin\alpha-\frac{c}{2}$	$a\cos\alpha+b$	c	$\left(a\sin\alpha-\frac{c}{2}\right)c$	$(a\cos\alpha+b)\,c$

$$\xi=\frac{\left(\frac{a^2}{2}+ab+ac\right)\sin\alpha-\frac{c^2}{2}}{a+b+c};\quad \eta=\frac{\left(\frac{a^2}{2}+ab+ac\right)\cos\alpha+bc+\frac{b^2}{2}}{a+b+c}.$$

2.2. O placă omogenă are forma din figura 2.3. Să se determine locul de prindere al plăcii, pentru ca aceasta să stea în echilibru cu latura AB în poziţie orizontală, ştiind că $a=0{,}3$ m, $b=0{,}4$ m şi $R=0{,}5$ m.

Rezolvare. Pentru ca placa să stea în echilibru în poziţia impusă trebuie ca axa de susţinere să treacă prin centrul de greutate al acestuia de coordonate ξ, η, faţă de axele fixate în figură.

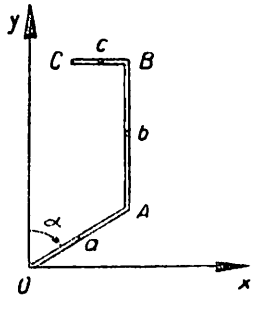


Fig. 2.2.

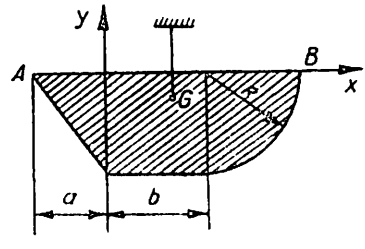


Fig. 2.3.

Descompunînd placa în trei părţi componente, se poate întocmi tabela 2.3.

Tabela 2.3

Calculul centrului de greutate

	x_i	y_i	A_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{R}{3}$	$\frac{aR}{2}$	$-\frac{a^2R}{6}$	$-\frac{aR^2}{6}$
2	$\frac{b}{2}$	$-\frac{R}{2}$	bR	$\frac{b^2R}{2}$	$-\frac{bR^2}{2}$
3	$b+\frac{4R}{3\pi}$	$-\frac{4R}{3\pi}$	$\frac{\pi R^2}{4}$	$\frac{\pi R^2}{4}\left(b+\frac{4R}{3\pi}\right)$	$-\frac{R^3}{3}$

din care se deduce:

$$\zeta=\frac{-\frac{a^2R}{6}+\frac{b^2R}{2}+\frac{\pi R^2}{4}\left(b+\frac{4R}{3\pi}\right)}{\frac{aR}{2}+bR+\frac{\pi R^2}{4}}=0{,}323 \text{ m};$$

$$\eta=-\frac{\frac{aR^2}{6}+\frac{bR^2}{2}+\frac{R^3}{3}}{\frac{aR}{2}+bR+\frac{\pi R^2}{4}}=-0{,}221 \text{ m}.$$

2.3. Se dă o placă omogenă de forma unui trapez oarecare de baze B şi b. Să se afle pe mediana EF, de lungime m, un punct M, definit de relaţia $EM=x$, care să coincidă cu centrul de greutate al ariei rămase după scoaterea triunghiului AMB (fig. 2.4).

Rezolvare. Notînd cu y_t, y', y_M, respectiv ordonatele centrelor de greutate ale trapezului, triunghiului şi figurii rămase, faţă de baza mare a trapezului, cu α înclinarea medianei trapezului faţă de înălţime, prin aplicarea teoremei momentelor statice faţă de baza mare avem:

$$y_M=\frac{A_1y_1-A_2y'}{A_1-A_2}=\frac{\frac{B+b}{2}h\frac{1}{3}\frac{B+2b}{B+b}h-\frac{B\cdot y_M}{2}y'}{\frac{B+b}{2}h-\frac{B\cdot y_M}{2}}. \qquad (1)$$

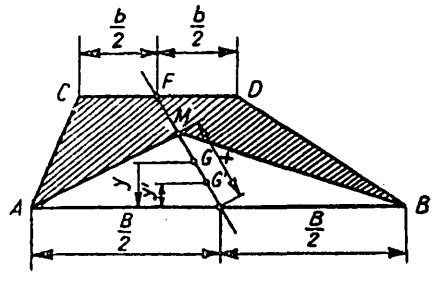


Fig. 2.4.

Ţinînd seamă de relaţiile:

$$\cos\alpha = \frac{h}{m} = \frac{y_1}{y_1'} = \frac{y_M}{x} = \frac{3y'}{x} \quad \text{şi} \quad y_1 = \frac{1}{3}\frac{B+2b}{B+b}h, \tag{2}$$

rezultă ecuaţia

$$x = \frac{\frac{B+2b}{6}m^2 - \frac{Bx^2}{6}}{\frac{B+b}{2}m - \frac{Bx}{2}},$$

cu valoarea convenabilă

$$x = \frac{m}{4B}\left[3(B+b) + \sqrt{B^2+9b^2+2B\cdot b}\right].$$

2.4. Să se determine centrul de greutate al secţiunii din figura 2.5, compus din profile cornier, profil *U* şi o platbandă.

Rezolvare. În standarde sînt date ariile şi coordonatele centrului de greutate al fiecărui profil, care alcătuieşte îmbinarea din figură. Cu aceste elemente s-a întocmit tabela 2.4

Tabela 2.4

Centre de greutate ale profilelor folosite

Profil	x_i cm	y_i cm	A_i cm²	$x_i A_i$ cm³	$y_i A_i$ cm³
1	−2,82	27−2,82	19,2	−54,14	464,25
2	−2,82	1+2,82	19,2	−54,14	73,34
3	2,36	1+13	48,3	113,99	676,20
4	0	0,5	20	0	10
Σ	—	—	106,7	5,71	1 223,79

Fig. 2.5.

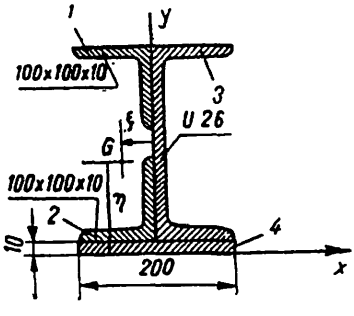
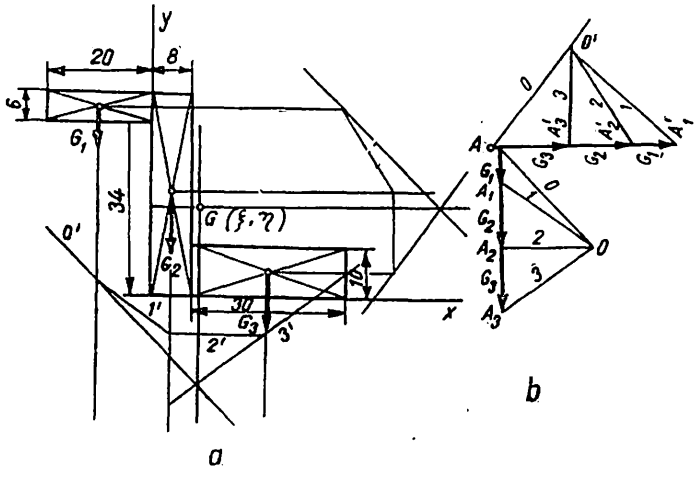


Fig. 2.6.



Ca urmare:

$$\xi = \frac{-2 \cdot 54{,}14 + 113{,}99}{106{,}7} = -0{,}053 \text{ cm},$$

$$\eta = \frac{464{,}25 + 73{,}34 + 676{,}2 + 10}{106{,}7} = 11{,}47 \text{ cm}.$$

2.5. Să se determine grafic centrul de greutate al unei plăci avînd forma din figura 2.6, *a*.

Rezolvare. Construcţia grafică pentru determinarea centrului de greutate al plăcii date este arătată în figura 2.6, *b*.

Se obţine:

$$\xi = 9{,}45 \text{ cm},$$

$$\eta = 16{,}7 \text{ cm}.$$

2.6. Să se afle centrul de greutate al plăcii omogene din figura 2.7.

Rezolvare. Aplicînd teorema momentului static se poate întocmi tabela 2.5:

Tabela 2.5

Centre de greutate ale ariilor componente

Aria	x_s	y_s	z_s	A_s	$x_s A_s$	$y_s A_s$	$z_s A_s$
1	$\frac{3a}{2}$	$-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{3a}{2}\right)$	$4a$	$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3a}{2}\right)^2$	$\frac{\pi}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)^3$	$-\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)^2$	$4a\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)^2$
2	$\frac{3a}{2}$	0	$2a$	$12a^2$	$18a^3$	—	$24a^3$
3	a	$2a$	0	$9a^2$	$9a^3$	$18a^3$	—

obţinîndu-se

$$\xi = 1{,}72\,a\,;\quad \eta = 0{,}462\,a\,;\quad \zeta = 0{,}975\,a.$$

2.7. Un cablu telefonic este întins între punctele A şi B aflate la aceeaşi înălţime faţă de orizontală (fig. 2.8).

Fig. 2.7.

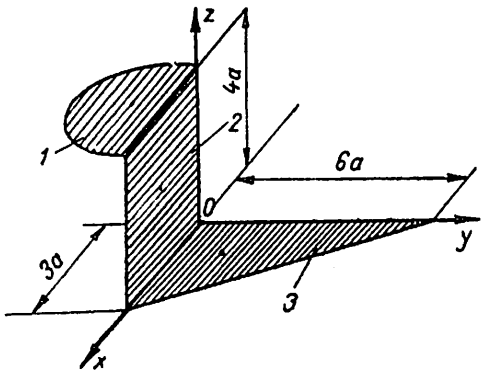
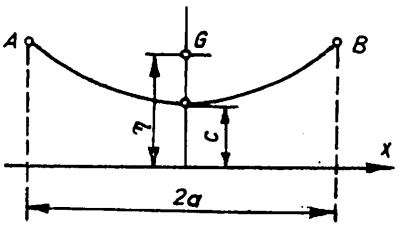


Fig. 2.8.



Ecuația curbei făcute de cablu fiind:

$$y=\frac{c}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

să se determine poziția centrului de greutate al cablului.

Rezolvare. Ordonata centrului de greutate va fi:

$$\eta=\frac{\int y\,ds}{\int ds},$$

în care

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)\frac{dx}{2}.$$

Deci:

$$\eta=\frac{\frac{c}{4}\int_0^a\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)^2dx}{\frac{1}{2}\int_0^a\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)dx}=\frac{a+\frac{c}{4}\left(e^{2\frac{a}{c}}-e^{-2\frac{a}{c}}\right)}{e^{\frac{a}{c}}-e^{-\frac{a}{c}}}.$$

2.8. Să se determine centrul de greutate al unei porțiuni de coroană formată din jumătăți de elipsă (fig. 2.9).

Rezolvare. Se vor calcula mai întîi poziția ordonatei centrului de greutate al unei jumătăți de elipsă de ecuație

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\eta=\frac{\int\frac{1}{2}y^2\,dA}{\int dA}=\frac{\int\frac{1}{2}a^2\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx}{\int dA}=\frac{\frac{1}{2}a^2\left(x-\frac{x^3}{3b^2}\right)\Big|_{-b}^{+b}}{\frac{\pi ab}{2}}=\frac{4a}{3\pi}.$$

Ca urmare, ordonata η a centrului de greutate a porțiunii de coroană este:

$$\eta=\frac{\eta_1A_1-\eta_2A_2}{A_1-A_2}=\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{a^2b-a_1^2b_1}{ab-a_1b_1},$$

unde s-a notat cu η_1 și η_2 ordonatele centrelor de greutate ale jumătăților de elipsă.

2.9. Să se determine centrul de greutate al suprafeței cuprinsă între curba definită de ecuația $y=x^n$, axa Ox și o paralelă la axa Oy, dusă la distanța $x=a$ (fig. 2.10).

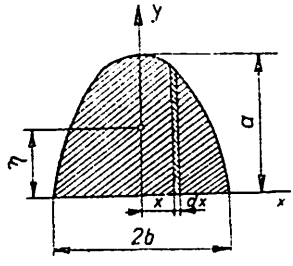


Fig. 2.9.

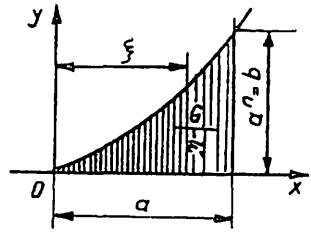


Fig. 2.10.

Rezolvare. Abscisa centrului de greutate este:

$$\xi = \frac{\int\limits_{(A)} x\,dA}{\int\limits_{(A)} dA}.$$

Cum $dA = dx \cdot dy$ și ținînd seamă de domeniul de calcul al integralelor duble, se poate scrie:

$$\xi = \frac{\int\limits_0^a x\,dx \cdot \int\limits_0^{x^n} dy}{\int\limits_0^a dx \cdot \int\limits_0^{x^n} dy} = \frac{\int\limits_0^a x^{n+1}\,dx}{\int\limits_0^a x^n\,dx} = \frac{n+1}{n+2}a.$$

Ordonata centrului de greutate se poate determina analog:

$$\eta = \frac{\int\limits_0^a dx \cdot \int\limits_0^{x^n} y\,dy}{\int\limits_0^a dx \cdot \int\limits_0^{x^n} dy} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^a x^{2n}\,dx}{\int\limits_0^a x^n\,dx} = \frac{n+1}{2(2n+1)}a^n.$$

Notînd $a^n = b$, ordonata se mai poate scrie:

$$\eta = \frac{n+1}{2(2n+1)}b.$$

Cazuri particulare:

$n=1$ (dreaptă, bisectoarea întîi):

$$\xi = \frac{2}{3}a; \quad \eta = \frac{1}{3}b;$$

$n=2$ (parabolă):

$$\xi = \frac{3}{4}a; \quad \eta = \frac{3}{10}b;$$

$n=3$ (parabolă cubică):

$$\xi = \frac{4}{5}a; \quad \eta = \frac{2}{7}b.$$

2.10. Să se afle centrul maselor unui volum omogen de rotație în jurul unei axe (fig. 2.11) cunoscînd ecuația curbei meridiane $y=f(z)$. Aplicație pentru segment sferic (fig. 2.12, *a*), calotă sferică (fig. 2.12, *b*), și emisferă (fig. 2.12, *c*).

Rezolvare. Elementul de volum fiind $dV=\pi y^2 dz$, aplicînd teorema momentului static avem:

$$\zeta=\frac{\int\limits_{z_1}^{z_2} z\,dV}{\int\limits_{z_1}^{z_2} dV}=\frac{\int\limits_{z_1}^{z_2} z\,[f(z)]^2\,dz}{\int\limits_{z_1}^{z_2}[f(z)]^2\,dz}.$$

În cazul segmentului sferic (fig. 2.12, *a*) avem $y^2=R^2-z^2$ și ca urmare:

$$\zeta=\frac{\int\limits_{a}^{a'} z\,(R^2-z^2)\,d}{\int\limits_{a}^{a'}(R^2-z^2)\,dz}=\frac{3}{4}\cdot\frac{(a'+a)\,(2R^2-a'^2-a^2)}{3R^2-a'^2-a^2-aa'}.$$

Pentru calota sferică (fig. 2.12, *b*) $a'=R$, avem

$$\zeta=\frac{3}{4}\,\frac{(R+a)^2}{2R+a},$$

iar pentru semisferă (fig. 2.12, *c*) se obține:

$$\zeta=\frac{3}{8}R.$$

2.11. Un arc de cerc, cu deschiderea 2α, are masa specifică proporțională cu distanța de la centrul O la coardă (fig. 2.13). Să se găsească centrul său de greutate.

Rezolvare. Centrul de greutate va fi pe axa Ox la o distanță de centru:

$$\xi=\frac{\int x\,dm}{\int dm}.$$

Conform enunțului problemei,

$$dm=k\,(x-r\cos\alpha)\,ds.$$

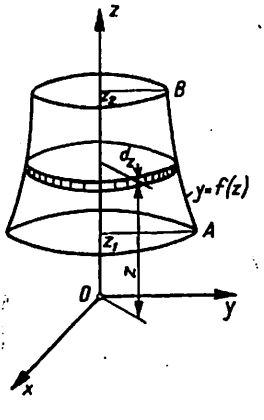
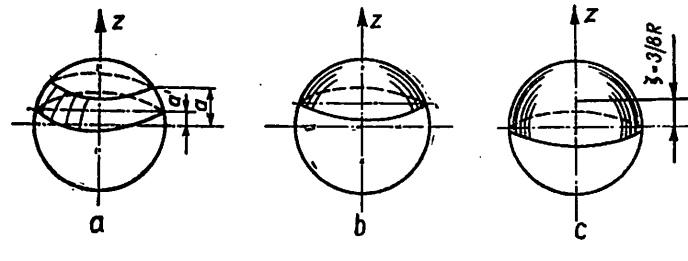


Fig. 2.11.

Fig. 2.12.



Trecînd la coordonate polare:

$$x=r\cos\theta;\quad ds=r\,d\theta,$$

avem succesiv

$$\zeta=\frac{\int x\,dm}{\int dm}=r\frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta(\cos\theta-\cos\alpha)\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha}(\cos\theta-\cos\alpha)\,d\theta}=r\frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{4(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}.$$

2.12. Să se determine centrul de greutate al unui con circular drept, cu înălțimea h și raza bazei r, știind că greutatea sa volumică variază proporțional cu cota z (fig. 2.14).

Rezolvare. Volumul elementar cu înălțimea dz, este $dV=\pi\rho^2dz$, iar masa lui va fi:

$$dm=kz(\pi\rho^2dz).$$

Din asemănarea triunghiurilor care se formează, se poate scrie:

$$\rho=\frac{r}{h}z.$$

Din teorema momentelor statice avem succesiv:

$$\zeta=\frac{\int_0^h z\,dm}{\int_0^h dm}=\frac{k\pi\int_0^h z^2\cdot\rho^2\,dz}{k\pi\int_0^h z\rho^2\,dz}=\frac{k\pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\cdot\int_0^h z^4\,dz}{k\pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\cdot\int_0^h z^3\,dz}=\frac{4}{5}h.$$

Deci, în cazul conului neomogen a cărui greutate volumică variază liniar cu cota z, centrul de greutate se va găsi într-un plan paralel cu baza, la distanța $h/5$ de planul bazei.

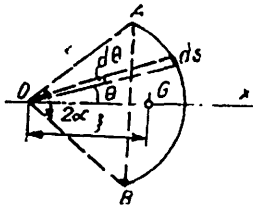
C. PROBLEME NEREZOLVATE

2.13. Să se afle centrul de greutate al barei omogene din figura 2.15, la care p este greutatea pe unitatea de lungime.

Răspuns:

$$\xi=\frac{b\,(b+2c)}{2\,(a+b+c)};\quad \eta=\frac{a^2+c^2}{2\,(a+b+c)}.$$

Fig. 2.13.



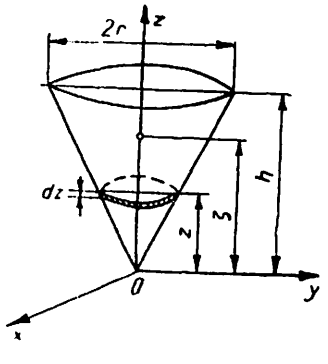
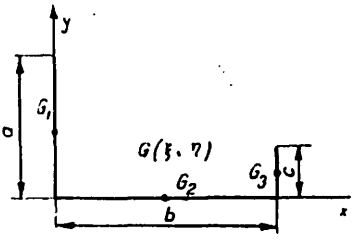


Fig. 2.14.

Fig. 2.15.



2.14. Să se determine centrul de greutate al unei bare avînd forma din figura 2.16.

Răspuns:

$$\eta = \frac{2b^2 \sin\alpha + a^2 + 2ab\alpha - a^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{2(2b \sin\alpha + 2c \sin\alpha + a\alpha)}.$$

2.15. Să se determine centrul de greutate al secțiunii unei piese de forma și dimensiunile din figura 2.17.

Indicație și răspuns. Secțiunea avînd o axă de simetrie, centrul de greutate G se va găsi pe această axă, iar ordonata este

$$\eta = \frac{\frac{2R^3}{3} - \frac{2r^3}{3} - a^2(R-r)}{\frac{\pi}{2}(R^2-r^2) + 2a(R-r)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2(R^2+Rr+r^2) - 3a^2}{\pi(R+r) + 4a}.$$

2.16. Să se găsească centrul de greutate al secțiunii plane din figura 2.18.

Răspuns:

$$\xi = \frac{\frac{2R^3}{3} - \frac{r^3}{2} + \frac{ab(2R+a)}{2}}{\frac{R^2}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 + ab} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4R^3 - 3r^3 + 3ab(2R+a)}{2R^2 - 3\sqrt{3}r^2 + 4ab}.$$

2.17. Să se determine tensiunile din firele de susținere ale unei plăci omogene de fier, avînd forma și dimensiunile din figura 2.19. Grosimea plăcii este 4 cm.

Răspuns. $\xi = -1{,}1$ cm; $\eta = -0{,}66$ cm; Greutatea plăcii $G = 1\,338{,}80$ N,

$T_1 = \frac{G}{a}\left(\frac{a}{2} + \xi\right) = 687{,}90$ N; $T_2 = \frac{G}{a}\left(\frac{a}{2} - \xi\right) = 650{,}40$ N.

Fig. 2.16.

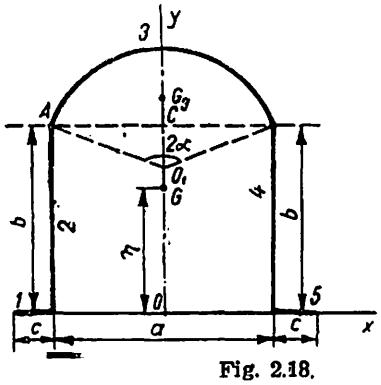


Fig. 2.18.

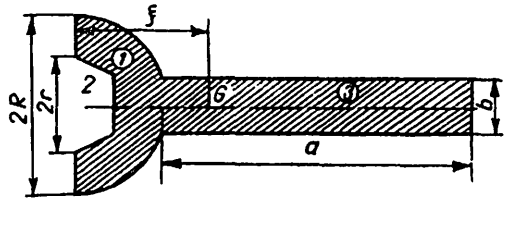


Fig 2.17.

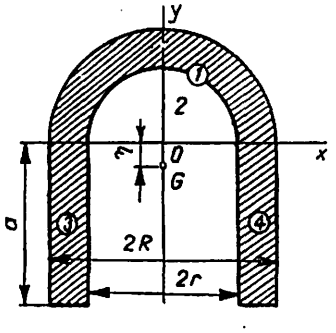
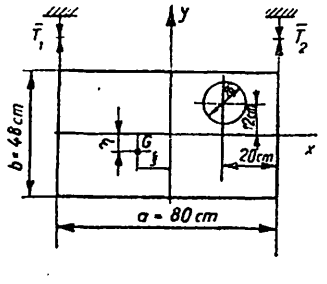


Fig. 2.19.



2.18. Cît de mare trebuie să fie depărtarea x pentru ca centrul de greutate al plăcii din figura 2.20, să fie pe latura BC?

Răspuns. $x=a\sqrt{3}$.

2.19. Aplicînd teorema lui Guldin, să se determine centrul de greutate al unei secţiuni, avînd forma şi dimensiunile din figura 2.21.

Răspuns. $\eta=1{,}06\,r$.

2.20. Se consideră o placă omogenă de forma unui trapez oarecare $ABCD$ (fig. 2.22). Să se demonstreze că dreptele ce unesc vîrfurile A şi C ale plăcii cu punctele L şi M care împart mediana EF a trapezului în trei părţi egale $EL=LM=MF$ se întretaie într-un punct P, astfel încît paralela la baze dusă prin acest punct trece prin centrul de greutate al trapezului.

Răspuns. Se obţine pentru ordonata centrului de greutate faţă de baza mare valoarea $y_P=y_G=\frac{1}{3}\frac{B+2b}{B+b}\cdot h$.

2.21. Să se determine grafic centrul de greutate al unei plăci avînd forma din figura 2.23, *a*

Indicaţie şi răspuns. Construind poligonul forţelor şi poligonul funicular pe două direcţii perpendiculare (fig. 2.23, *b*) se obţine $\xi=-7{,}05$ cm; $\eta=25{,}5$ cm.

Fig. 2.20.

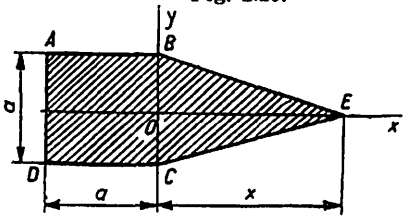


Fig. 2.21.

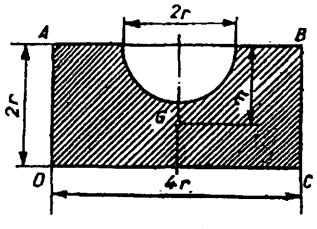


Fig. 2.22.

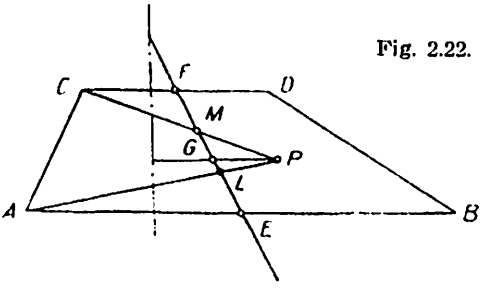
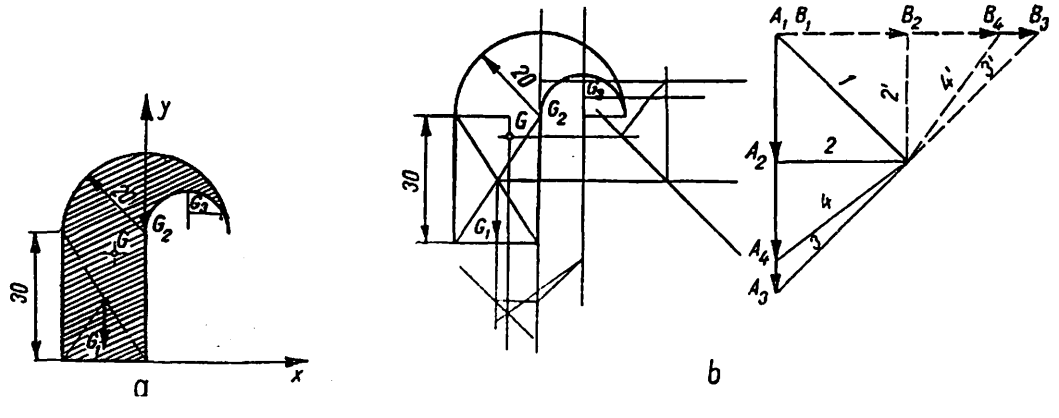


Fig. 2.23.



2.22. Să se determine centrul maselor din figura 2.24, aplicate în vîrfurile cubului de latură a.

Răspuns. $\xi=0{,}4\ a$; $\eta=0{,}3\ a$; $\zeta=0{,}3\ a$.

2.23. Să se determine centrul de greutate al unui arbore de lungime $2l$ și rază r, avînd două roți pline la capete (fig. 2.25).

Răspuns.

$$\xi=\frac{R_2^2a_2(a_2+l)-R_1^2a_1(a_1+l)}{R_1^2a_1+r^2l+R_2^2a_2}.$$

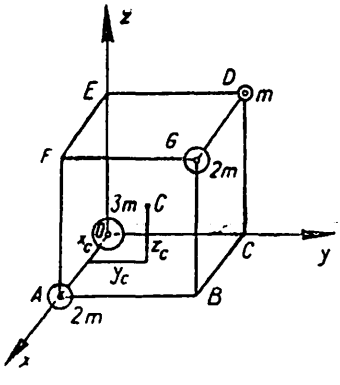
2.24. Să se determine centrul de greutate al nitului din figura 2.26, asimilat cu o semisferă și un cilindru avînd: $D=40$ mm; $d=22$ mm; $l=50$ mm.

Răspuns.

$$\xi=\frac{\frac{\pi D^2}{64}-\frac{\pi d^2l^2}{8}}{\frac{\pi D^3}{12}+\frac{d^2l}{4}}=-1 \text{ mm}.$$

2.25. Să se afle centrul de greutate al ariei cuprinsă între axa Ox și bucla de sinusoidă $y=a\sin x$ (fig. 2.27).

Fig. 2.24.



Indicație și răspuns. Datorită simetriei $\xi=\frac{\pi}{2}$, iar

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi}y\,dA}{\int_0^{\pi}dA}=\frac{\frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx}{a\int_0^{\pi}\sin x\,dx}=\frac{\pi}{8}a.$$

2.26. Să se determine centrul de greutate al volumului unui rezervor de forma unui paraboloid (fig. 2.28) cunoscînd raza bazei R și înălțimea h.

Fig. 2.25.

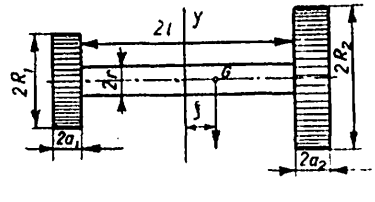


Fig. 2.26.

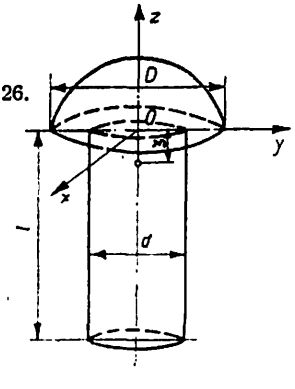
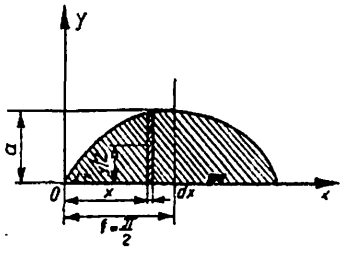


Fig. 2.27.



Indicație și răspuns. Curba generatoare a paraboloidului fiind $y^2=2pz$, poziția centrului de greutate ζ este:

$$\zeta=\frac{\int_0^h z\,y^2\,dz}{\int_0^h y^2\,dz}=\frac{\int_0^h 2pz^2\,dz}{\int_0^h 2pz\,dz}=\frac{2}{3}h.$$

2.27. Să se determine coordonatele centrului de greutate al arcului omogen al buclei de cicloidă (fig. 2.29) definită de ecuațiile:

$$x=R(\theta-\sin\theta);\quad y=R(1-\cos\theta);\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

Răspuns.

$$\xi=\frac{\pi R}{2};\quad \eta=\frac{4}{3}R.$$

2.28. Să se afle centrul de greutate al octantului elipsoidului omogen (fig. 2.30) definit de ecuațiile:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\quad x\geqslant 0;\quad y\geqslant 0;\quad z\geqslant 0.$$

Indicație și răspuns. Notînd cu ρ masa unității de volum, volumul elementar de înălțime dz este:

$$dm=\rho\frac{\pi}{4}ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz.$$

Secțiunea bazei volumului elementar este un sfert din aria elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1,$$

a cărei mărime este:

$$A=\frac{1}{4}\pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}.$$

De aici rezultă:

$$\zeta=\frac{\int z\,dm}{\int dm}=\frac{\int_0^c \rho\frac{\pi}{4}ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z\,dz}{\int_0^c \rho\frac{\pi}{4}ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz}=\frac{3}{8}c;$$

și analog

$$\xi=\frac{3}{8}a;\quad \eta=\frac{3}{8}b.$$

Fig. 2.28.

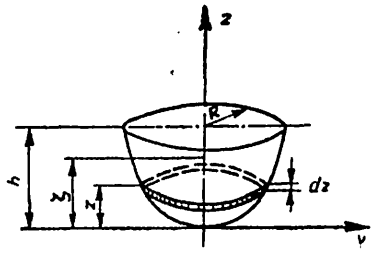


Fig. 2.29.

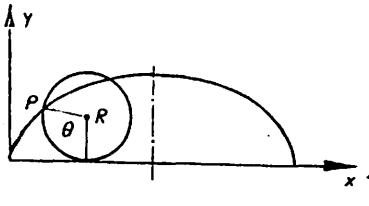
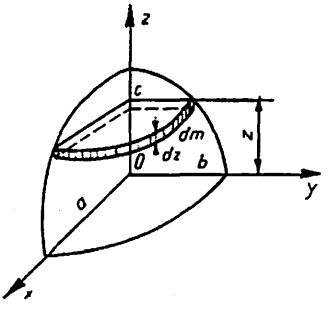


Fig. 2.30.



Capitolul 3

STATICA PUNCTULUI MATERIAL

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Punctul material liber** în spațiu are, față de un triedru de referință trei grade de libertate, iar poziția poate fi determinată prin coordonatele sale: (fig. 3.1), carteziene, cilindrice, sferice (fig. 3.1, *a*, *b* și *c*), sau curbilinii oarecare.

Condițiile de echilibru ale punctului material liber, identice cu condițiile de echilibru ale vectorilor concurenți, sînt reprezentate prin ecuația vectorială:

$$\overline{R}=(\sum X)\,\overline{i}+(\sum Y)\,\overline{j}+(\sum Z)\,\overline{k}=0, \qquad (a)$$

echivalentă *în spațiu* cu trei ecuații scalare:

$$\sum X=0;\quad \sum Y=0;\quad \sum Z=0, \qquad (a')$$

în plan cu două ecuații scalare:

$$\sum X=0;\quad \sum Y=0, \qquad (a'')$$

iar pe axă cu o singură ecuație scalară.

În problemele de echilibru ale punctului material numărul de ecuații scalare corespunde numărului maxim de necunoscute ce pot fi determinate.

2. **Legăturile** restrîng numărul pozițiilor pe care un punct le poate ocupa în spațiu.

Dacă punctul material nu poate părăsi *o suprafață fixă* figura 3.2 de ecuație $f(x, y, z)=0$, acesta are numai două grade de libertate, în raport de care se pot exprima coordonatele sale; parametric $x=x(u, v)$; $y=y(u, v)$; $z=z(u, v)$,

Fig. 3.1.

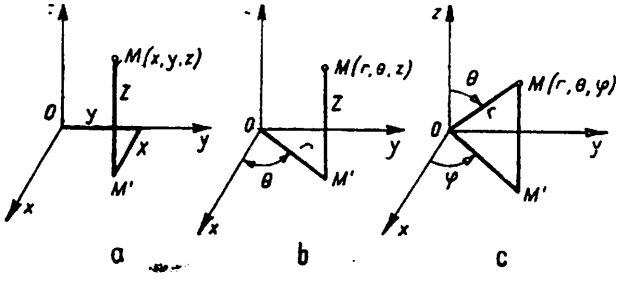
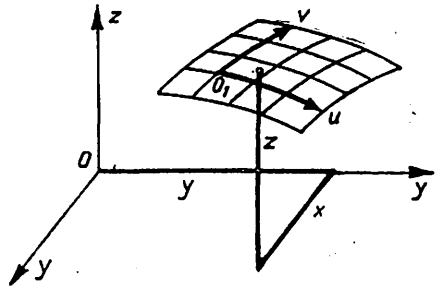


Fig. 3.2.



Pentru punctul material ce nu *părăseşte o curbă fixă*, reprezentată prin intersecţia a două suprafeţe

$$f(x, y, z)=0\,;\ g(x, y, z)=0,$$

coordonatele carteziene ale punctului depind de un singur parametru $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$, şi punctul material are un singur grad de libertate.

Punctul material care *nu poate părăsi un anumit punct fix* din spaţiu nu mai are nici un grad de libertate.

Legăturile pot fi *bilaterale* cînd punctul material nu poate părăsi legătura şi *unilaterale* care în anumite condiţii pot fi părăsite. Condiţia ca echilibrul să fie asigurat în cazul unei legături unilaterale este dată de inegalitatea:

$$\overline{R}\cdot\operatorname{grad} f<0, \quad \text{sau} \quad X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}<0.$$

3. **Condiţia de echilibru** a punctului material se bazează pe **axioma legăturilor** care permite înlocuirea legăturilor cu o reacţiune.

a) Simpla rezemare a punctului M pe o suprafaţă lucie (legături ideale) de ecuaţie $f(x, y, z)=0$ este:

$$\overline{R}+\overline{L}=0$$

unde $\overline{R}$ este rezultanta tuturor forţelor aplicate, iar $\overline{L}=\lambda$ grad f, reacţiunea suprafeţei asupra punctului.

b) Pentru simpla rezemare pe o curbă de ecuaţie:

$$f(x, y, z)=0\,;\ g(x, y, z)=0$$

reacţiunea $\overline{L}$ a curbei asupra punctului este dată de relaţia:

$$\overline{L}=\lambda\ \operatorname{grad} f+\mu\operatorname{grad} g,$$

unde λ şi μ sînt doi scalari.

Expresiile analitice privind echilibrul punctului pe o suprafaţă şi pe o curbă lucie sînt centralizate în tabela 3.1.

4. **Echilibrul cu frecare.** Pentru o suprafaţă aspră un punct material poate fi în echilibru în toate punctele unei anumite regiuni, iar în cazul unei curbe aspre, poziţiile de echilibru limită sînt în general bine determinate.

Pentru echilibru, suportul rezultantei $\overline{R}$ a forţelor efectiv aplicate trebuie să fie situate în interiorul conului de frecare.

Tabela 3.1

Expresii analitice privind echilibrul punctului pe o suprafață și pe o curbă lucie

Ecuații	Sistemul ecuațiilor de echilibru	Necunoscute	Măsura reacțiunii normale[1])	Ecuațiile care definesc pozițiile de echilibru
a) Suprafețe $f(x, y, z)=0$	$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0$ $Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0$ $Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0$ $f(x, y, z)=0$	x, y, z, λ	$N_n=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$	$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ $f(x, y, z)=0$
$z=f(x, y)$	$X+\lambda\frac{\partial z}{\partial x}=0$ $Y+\lambda\frac{\partial z}{\partial y}=0$ $Z-\lambda=0$ $z=f(x, y)$		$N_n=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}$	$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z}{-1}$ $z=z(x, y)$
$x=x(u, v)$ $y=y(u, v)$ $z=z(u, v)$	$X+\lambda\frac{D(y, z)}{D(u, v)}=0$ $Y+\lambda\frac{D(z, x)}{D(u, v)}=0$ $Z+\lambda\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=0$	u, v, λ	$N_n=\lambda\sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2+\left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2+\left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}$	$\frac{X}{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}}=\frac{Y}{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}}=\frac{Z}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}}$

b) Curbe $f(x,y,z)=0$ $g(x,y,z)=0$	$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\nu\frac{\partial g}{\partial x}=0$ $Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\nu\frac{\partial g}{\partial y}=0$ $Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\nu\frac{\partial g}{\partial z}=0$ $f(x,y,z)=0$ $g(x,y,z)=0$	x, y, z, λ, ν	$N_n=\sqrt{\lambda^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]+}$ $\overline{+\nu^2\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2\right]+}$ $\overline{+2\lambda\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right)}$	$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ Z & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}=0$
$z=f(x,y)$ $z=g(x,y)$	$X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\nu\frac{\partial g}{\partial x}=0$ $Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0$ $Z-\lambda-\nu=0$ $z=f(x,y)$ $z=g(x,y)$		$N_n=\sqrt{\lambda^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1\right]+}$ $\overline{+\nu^2\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+1\right]+}$ $\overline{+2\lambda\nu\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+1\right)}$	$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ Z & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$
$x=x(t)$ $y=y(t)$ $z=z(t)$	$X+\mu z'-\nu y'=0$ $Y+\nu x'-\lambda z'=0$ $Z+\lambda y'-\mu x'=0$ $Xx'+Yy'+Zz'=0$	μ, ν, λ, t	$N_n=\sqrt{(\mu z'-\nu y')^2+(\nu x'-\lambda z')^2+}$ $\overline{+(\lambda y'-\mu x')^2}$	$Xx'+Yy'+$ $+Zz'=0$

[1]) În expresiile aflate sub radical se vor înlocui valorile coordonatelor x, y, z și ale parametrilor λ, ν, μ, t, corespunzătoare poziţiilor de echilibru.

Analitic, condiția geometrică de mai înainte se exprimă:

— în cazul unei suprafețe (fig. 3.3) de ecuație $f(x, y, z)=0$ prin relația $\alpha \leqslant \varphi$, sau:

$$\frac{\left|X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}};$$

— în cazul unei curbe aspre (fig. 3.4), definită prin ecuațiile parametrice $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$, prin inegalitatea $\beta \geqslant \frac{\pi}{2}-\varphi$, sau:

$$\frac{|Xx'+Yy'+Zz'|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \leqslant \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

5. **Rezolvarea problemelor** de echilibru ale unui punct material se face astfel:

— Se eliberează corpul sau punctul material al cărui echilibru se studiază de restul corpurilor cu care vine în contact, înlocuindu-se legăturile prin forțe de legătură. În cazul legăturilor unilaterale, trebuie examinat și sensul reacțiunilor.

— Se face analiza tuturor forțelor care acționează asupra punctului material, forțe exterioare (date), și de legătură.

— Se scriu ecuațiile de echilibru ca și la punctul material liber, ținînd seamă în afară de forțele exterioare și de forțele de legătură.

Din ecuațiile de echilibru se poate determina fie poziția de echibru a punctului, cînd se dau forțele, fie forțele care acționează asupra punctului aflat în poziție de echilibru.

În plan există două ecuații de echilibru și în spațiu trei ecuații, deci se pot deduce respectiv două sau trei necunoscute, fie reacțiuni, fie poziția de echilibru.

6. **Legătura de rezemare** pe o suprafață sau pe o curbă se înlocuiește cu o *forță de direcție cunoscută* (direcția normală la plan sau curbă) și de *mărime necunoscută.*

7. **Un mijloc comod de realizare a legăturilor** sînt firele, care se consideră *inextensibile* și *flexibile.* Supuse la *tensiune* firele se întind, dar nu se pot comprima.

Legătura cu fire se înlocuiește de asemenea cu o forță de *direcție cunoscută* (direcția firului) și de *mărime necunoscută.*

Fig 3.3.

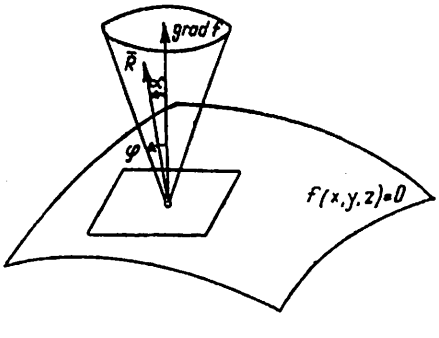
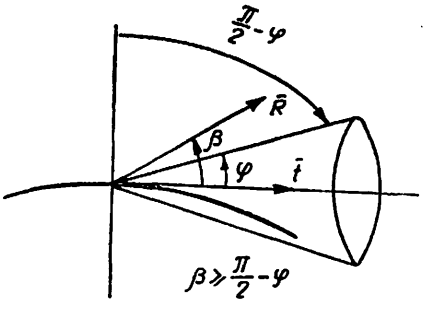


Fig. 3.4.



8. **În cazul a trei forțe concurente,** în echilibru, ele trebuie să se găsească în același plan, iar triunghiul forțelor să se închidă. Analitic, această ultimă condiție se scrie:

$$\frac{F_1}{\sin(\overline{F_2}, \overline{F_3})} = \frac{F_2}{\sin(\overline{F_3}, \overline{F_1})} = \frac{F_3}{\sin(\overline{F_1}, \overline{F_2})}.$$

9. **Pozițiile de echilibru** pot fi stabile sau nu. Acestea sînt stabilite dacă pentru pozițiile de echilibru este satisfăcută inegalitatea:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} < 0,$$

unde U este funcția de forțe, iar t parametrul ce definește poziția de echilibru

B. PROBLEME REZOLVATE

3.1. La capetele unui fir trecut peste doi scripeți mici și bine lustruiți, aflați la același nivel, sînt legate greutățile P și Q (fig. 3.5). Dacă de punctul C se prinde o greutate G să se determine poziția de echilibru a firului.

Rezolvare. Izolînd nodul C prin tăieturi făcute în fir, rezultă forțele care acționează asupra lui: greutatea G: tensiunea P în firul CA și tensiunea $\overline{Q}$ în firul CB.

a) Metoda grafică. Problema se reduce la construirea unui triunghi cînd de cunosc cele trei laturi (forțele P, Q, și G) (fig. 3.6).

Pentru ca problema să admită o soluție, construcția triunghiului trebuie să fie posibilă, adică:

$$P > G - Q\,;\; P < G + Q.$$

b) Metoda analitică. Ecuațiile de echilibru a nodului C în raport cu axele arătate în figura 3.6 sînt:

$$(\sum X);\quad -P\sin\alpha + Q\sin\beta = 0\,;$$
$$(\sum Y);\quad P\cos\alpha + Q\cos\beta - G = 0,$$

din care se obțin relațiile: $\cos\beta = \frac{G^2+Q^2-P^2}{2GQ}$; $\cos\alpha = \frac{G^2+P^2-Q^2}{2GP}$.

Pentru ca problema să admită soluții, trebuie ca:

$$-1 \leqslant \cos\beta \leqslant 1 \quad \text{sau} \quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

obținîndu-se aceleași condiții ca cele stabilite mai sus, prin metoda grafică.

3.2. Un balon captiv, avînd greutatea $\overline{G}$, este legat printr-un cablu care formează cu verticala un unghi α (fig. 3.7). Să se

Fig. 3.5.

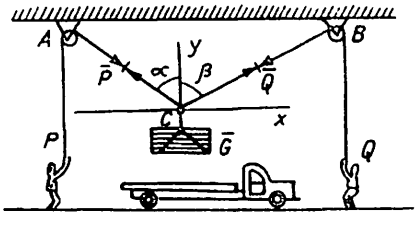


Fig. 3.6.

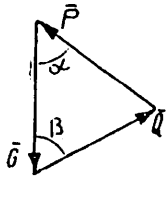
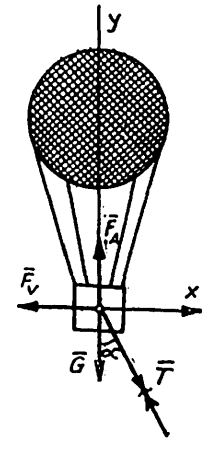


Fig. 3.7.



determine mărimea forței ascensionale și tensiunea din cablu, atunci cînd balonul se găsește în echilibru.

Rezolvare. Considerînd balonul redus la un punct material și izolîndu-l printr-o tăietură în cablu, forțele care acționează asupra lui sînt:

— greutatea proprie $\overline{G}$; tensiunea în cablu $\overline{T}$;

— forța vîntului $\overline{F}_v$; forța ascensională $\overline{F}_A$.

Metoda grafică. Cele patru forțe fiind în echilibru, trebuie ca poligonul forțelor să se închidă. Forțele cunoscute ca mărime și direcție sînt $\overline{G}$ și $\overline{F}$, iar forțele $\overline{T}$ și $\overline{F}_A$ au numai direcția cunoscută, mărimea fiind necunoscută.

Printr-un punct O se duce la scară un vector OA, echipolent cu forța $\overline{F}_v$. Prin extremitatea A se duce un vector echipolent cu forța $\overline{G}$. Prin extremitatea B se duce o paralelă la direcția tensiunii $\overline{T}$, iar prin originea O o paralelă la direcția forței ascensionale. Cele două direcții se intersectează în C, astfel încît $BC=T$ și $CO=F_A$ (fig. 3.8).

Metoda analitică. Luînd ca axe de coordonate, axele xGy, ecuațiile de echilibru sînt:

$$(\sum X);\quad T\sin\alpha - F_v = 0;$$

$$(\sum Y);\quad F_A - G - T\cos\alpha = 0.$$

Din rezolvarea sistemului, se obține:

$$T=\frac{F_v}{\sin\alpha} \quad \text{și} \quad F_A = G + F_v \operatorname{ctg}\alpha.$$

3.3. Un inel I foarte mic, de greutate neglijabilă, alunecă fără frecare pe un fir metalic curbat în formă de cerc (fig. 3.9). De inel sînt legate două fire: de unul este legată greutatea G, iar celălalt trece peste un scripete foarte mic S, fixat în A la extremitatea diametrului orizontal OA de care este atîrnată greutatea Q. Să se determine poziția de echilibru a inelului, definit de unghiul $AOI=2\theta$.

Rezolvare. Asupra inelului acționează reacțiunea cercului, reacțiune normală pe suprafața de reazem, îndreptată după raza IO a acestuia. De asemenea tensiunea în cablu IA este egală cu Q.

Fig. 3.8.

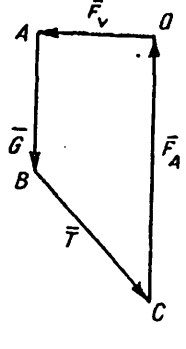
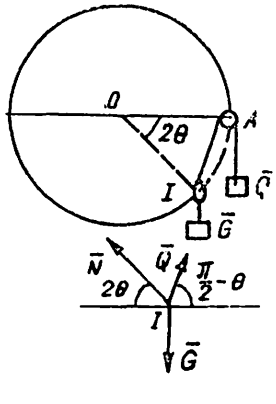


Fig. 3.9.



Din condițiile de echilibru a inelului:

$$-N\cos 2\theta + Q\sin\theta = 0$$

$$N\sin 2\theta + Q\cos\theta - G = 0.$$

Prin eliminarea reacțiunii N rezultă ecuația care definește poziția de echilibru:

$$f(\theta)=2G\cos^2\theta - Q\cos\theta - G = 0$$

Ţinînd seamă de domeniul de variaţie pentru $\cos\theta$, rezultă că există două poziţii de echilibru dacă $G>Q$ şi numai o poziţie dacă $G<Q$.

3.4. De un cîrlig A este prins un fir AC, de al cărui capăt C este legat un inel. De cîrligul B, situat pe orizontala lui A, este prins alt fir $BDCE$ care trece prin inelul C şi susţine greutatea P. Un al doilea inel D, mobil în lungul firului CDB, susţine o greutate Q (fig. 3.10, *a*). Să se determine poziţia de echilibru a sistemului şi tensiunile din fire.

Rezolvare. Poziţia de echilibru a sistemului este definită de unghiurile α, β, γ_1 şi γ_2. Separînd corpurile şi studiind echilibrul nodului C şi al inelului D (fig. 3.10, *a*, *b*), se pot scrie ecuaţiile de echilibru:

nodul C

$$(\sum X);\quad -T_1\cos\gamma_1+T\sin 2\beta=0;$$

$$(\sum Y);\quad T_1\sin\gamma_1-T\cos 2\beta-P=0;$$

inelul D

$$(\sum X);\quad -T\sin 2\beta+T_2\cos\gamma_2=0;$$

$$(\sum Y);\quad T\cos 2\beta+T_2\sin\gamma_2-Q=0.$$

Cum însă tensiunea în lungul firului $BDCE$ este aceeaşi şi egală cu P, rezultă că $T=P=T_2$. Ţinînd seamă de aceste egalităţi şi rezolvînd sistemul, se obţine:

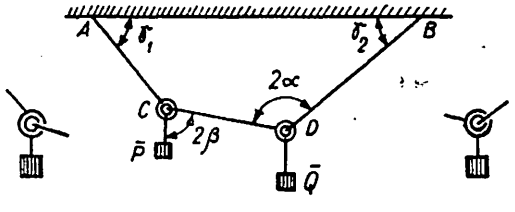
$$\cos 2\beta=\frac{Q}{2P};\quad \alpha=2\beta;\quad \gamma_1=\frac{\pi}{2}-\beta;\quad \gamma_2=\frac{\pi}{2}-2\beta;$$

iar

$$T_1=2P\cos\beta.$$

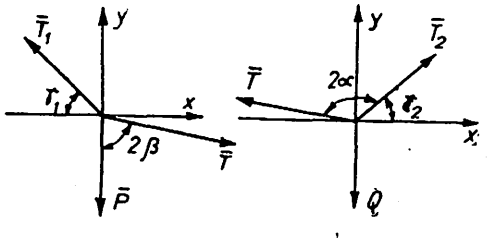
Pentru ca probelema să fie posibilă trebuie ca $Q<2P$.

3.5. Asupra unui suport, format din trei bare concurente în A, acţionează o forţă P într-un plan paralel cu peretele. Să se determine eforturile din cele trei bare, ştiind că barele AB şi AC sînt orizontale (fig. 3.11), iar bara AD se află într-un plan vertical perpendicular pe perete.



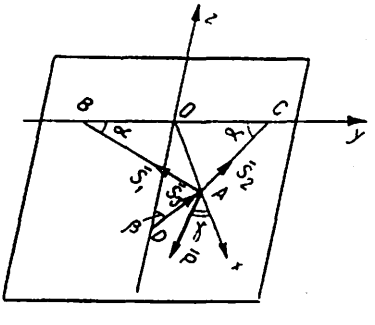
a

Fig. 3.10.



b *c*

Fig. 3.11.



Rezolvare. Notînd cu $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$, $\overline{S_3}$ eforturile din barele AB, AC, AD, din ecuațiile de echilibru a nodului A față de triedrul $xoyz$;

$$-S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\alpha + S_3 \sin\beta = 0$$
$$-S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\alpha - P \sin\gamma = 0$$
$$+S_3 \cos\beta - P\cos\gamma = 0$$

rezultă:

$$S_{1,2} = \frac{P}{2}\left[\operatorname{tg}\beta \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} \mp \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha}\right]; \quad S_3 = P\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}.$$

3.6. Să se determine poziția de echilibru al unui punct material, atras de către puncte fixe cu forțe proporționale cu distanța.

Rezolvare. Forța corespunzătoare punctului $A_i(x_i\ y_i\ z_i)$ este:

$$\overline{F_i} = -km_i[(x-x_i)\bar{i} + (y-y_i)\bar{j} + (z-z_i)\bar{k}]$$

Din condiția de echilibru $\overline{R} = \sum \overline{F_i} = 0$ rezultă:

$$\sum m_i(x-x_i) = \sum m_i(y-y_i) = \sum m_i(z-z_i) = 0,$$

care definește drept poziție de echilibru punctul de coordonate:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad \bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

ce corespunde centrului de greutate al maselor m_i situate în centrele de atracție.

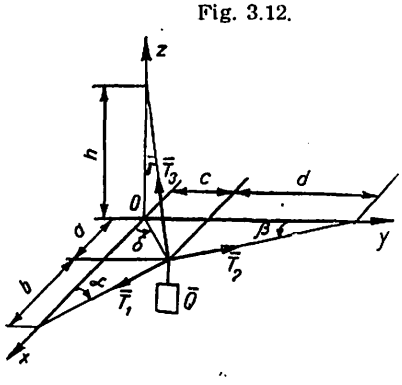
3.7. Să se determine tensiunile T_1, T_2, T_3 din cablurile de prindere a greutății $\overline{Q}$ (fig. 3.12).

Rezolvare. Izolînd corpul Q, avem următoarele condiții de echilibru:

$$(\sum X);\quad T_1\cos\alpha - T_2\sin\beta - T_3\sin\gamma\cos\delta = 0$$
$$(\sum Y);\quad -T_1\sin\alpha + T_2\cos\beta - T_3\sin\gamma\sin\delta = 0$$
$$(\sum Z);\quad T_3\cos\gamma - Q = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obțin valorile:

Fig. 3.12.



$$T_1 = Q\operatorname{tg}\gamma\frac{\cos(\beta-\delta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{Q}{h}\cdot\frac{a(d+c)}{bd-ac}\sqrt{b^2+c^2};$$

$$T_2 = Q\operatorname{tg}\gamma\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{Q}{h}\cdot\frac{c(a+b)}{bd-ac}\sqrt{a^2+d^2};$$

$$T_3 = \frac{Q}{\cos\gamma} = \frac{Q}{h}\sqrt{a^2+c^2+h^2}.$$

3.8. Un fir de lungime l, fără greutate proprie, este fixat cu extremităţile sale în punctele A şi B ($AB=d$), aflate pe aceeaşi orizontală (fig. 3.13, *d*). Să se afle punctele C şi D de pe fir unde ar trebui fixate greutăţile în aşa fel încît distanţa CD de lungime dată a să rămînă orizontală.

Rezolvare. Condiţiile de echilibru ale nodurilor C şi D (fig. 3.13, *b*) sînt:

$$-T_1\cos\alpha+T=0;\quad T_2\cos\beta-T=0;$$

$$T_1\sin\alpha-P=0;\quad T_2\sin\beta-Q=0,$$

din care rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{Q}{P}\operatorname{tg}\beta. \tag{1}$$

Cu notaţia $AC=x$; $BD=y$, din datele problemei se pot scrie următoarele condiţii geometrice:

$$x\sin\alpha=y\sin\beta \tag{2}$$

$$x\cos\alpha+y\cos\beta=d-a=h \tag{3}$$

$$x+y=l-a=b \tag{4}$$

Din rezolvarea sistemului de patru ecuaţii cu necunoscutele x, y, α, β se obţine:

$$x=\frac{1}{2}\left[b+h^2\cdot\frac{Q-P}{b(Q+P)}\right];\quad y=b-x.$$

3.9. Să se afle poziţia de echilibru a unui punct material greu obligat să rămînă pe o elice circulară dreaptă de ax vertical cînd acesta este atras de către un punct fix O aflat pe axa elicei cu o forţă elastică (fig. 3.14). Apoi să se verifice stabilitatea poziţiei de echilibru.

Rezolvare. Coordonatele unui punct al elicei se pot scrie:

$$x=a\cos t;\quad y=a\sin t;\quad z=a\,h\,t.$$

Rezultanta forţelor date este:

$$\bar{R}=-mg\bar{k}-mk(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}),$$

de unde rezultă proiecţiile forţelor pe axe:

$$X=-mkx;\quad Y=-mky;\quad Z=-m(g+kz).$$

Cum $x'=-a\sin t$; $y'=a\cos t$; $z'=ah$, poziţia de echilibru (tabela 3.1) definită de ecuaţia:

$$Xx'+Yy'+Zz'=0$$

conduce la valoarea $z=-\frac{g}{k}$, şi ca urmare $t=-\frac{g}{ahk}$.

Fig 3.13.

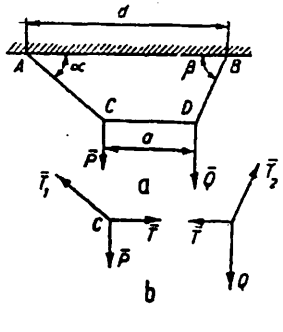
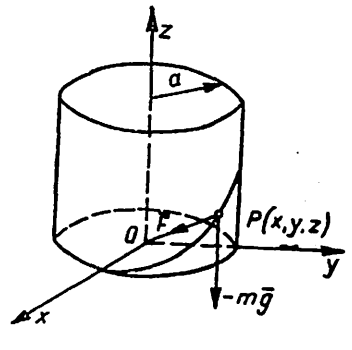


Fig. 3.14.



Pentru a verifica stabilitatea poziției de echilibru scriem funcția de forțe:

$$U=-mgz-mk\frac{r^2}{2}=-m\left[gz+\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)\right]=-m\frac{a^2}{2}\left(kh^2t^2+\frac{2}{a}gkt+k\right).$$

Se observă că pentru poziția de echilibru aflată

$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=-ma^2kh^2<0$$

și ca urmare poziția de echilibru este stabilă.

3.10. Să se determine poziția de echilibru și reacțiunea N a curbei asupra unui punct material greu M ce se mișcă fără frecare pe hiperbola de ecuație $xy=k^2$ (fig. 3.15), punct care este acționat de forța orizontală cunoscută $\overline{H}$.

Rezolvare. În cazul general al unei curbe plane ecuațiile curbei (tabela 3.1) sînt $f(x, y)=0$; $g(xyz)=z$. Ca urmare $\frac{\partial f}{\partial z}=0$; $\frac{\partial g}{\partial x}=0$; $\frac{\partial g}{\partial y}=0$; $\frac{\partial g}{\partial z}=1$ și sistemul de ecuații de echilibru se reduce la $X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0$; $Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0$; $Z+\lambda=0$.

Reacțiunea este:

$$N=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{X^2+Y^2}.$$

În cazul aplicației avem $f(x, y, z)=xy-k^2$; $g(x, y, z)=z$; $\frac{\partial f}{\partial x}=y$; $\frac{\partial f}{\partial y}=x$; $\frac{\partial g}{\partial z}=1$; și $N=\sqrt{H^2+G^2}$.

3.11. Să se afle poziția de echilibru al unui punct material greu, obligat să rămînă pe o elice circulară dreaptă de axă verticală, respins de către un punct de pe axa cilindrului cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței (fig. 3.16). Discuție privitoare la pozițiile de echilibru și stabilitatea lor.

Rezolvare. Notînd cu r distanța unui punct al elicei, de coordonate $x=a\cos t$, $y=a\sin t$; $z=aht$ față de axa elicei, funcția de forțe este:

$$U=m\int\left(-g\,dz+\frac{k}{r^2}dr\right)=-m\left(gz+\frac{k}{r}\right)=-m\left(agh\cdot t+\frac{k}{a\sqrt{1+h^2t^2}}\right).$$

Pentru echilibru trebuie ca $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ ca urmare

$$gah=\frac{kh^2t}{a(1+h^2t^2)^{3/2}}. \qquad (1)$$

Notînd $(ht)^{\frac{2}{3}}=v$ ecuația (1) devine

$$v^3-\left(\frac{k}{ga^2}\right)^{2/3}v+1=0$$

Fig. 3.15.

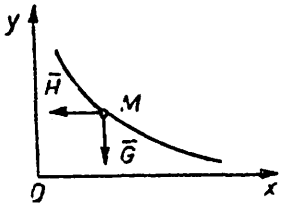
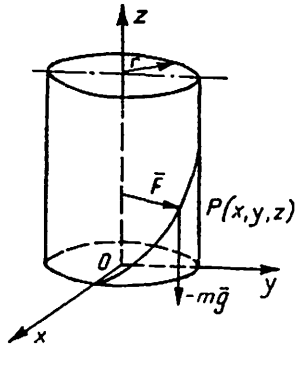


Fig. 3.16.



Calculînd derivata a doua avem $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 1 - 2h^2t^2$. Echilibrul este stabil dacă funcţia de forţă U este maximă, deci cînd $2h^2t^2>1$. Dacă

$$\left(\frac{k}{ga^2}\right)^2 < \frac{27}{4},$$

v are o rădăcină reală negativă, t este imaginară şi nu există poziţie de echilibru.

Dacă

$$\left(\frac{k}{ga^2}\right)^2 > \frac{27}{4},$$

parametrul v are trei rădăcini distincte separate de valorile $-\infty$, 0, $\frac{1}{3\sqrt{2}}$, $+\infty$ şi la fiecare rădăcină pozitivă corespunde cîte o valoare pentru parametrul t. În această situaţie există o poziţie de echilibru stabilă şi alta nestabilă.

3.12. Un punct material P de greutate $\overline{G}$, poate aluneca fără frecare pe curba plană $y=f(x)$, fiind respectiv respins (atras) de o forţă $\overline{H}=\pm k\,x\,\overline{i}$ proporţională cu abscisa punctului (fig. 3.17). Să se afle poziţia de echilibru a punctului şi reacţiunea $\overline{N}$ a curbei asupra punctului. *Aplicaţie.* 1) parabola $y=ax^2$. 2) parabola $y^2=2px$. 3) hiperbola $xy=a^2$.

Rezolvare. Notăm cu α unghiul pe care tangenta la curbă o face cu axa Ox. Proiectînd condiţia vectorială de echilibru

$$\overline{G}+\overline{H}+\overline{N}=0$$

pe direcţia tangentei şi normalei la curbă se obţin ecuaţiile scalare:

$$-G\sin\alpha+H\cos\alpha=0 \quad (2); \qquad N-G\cos\alpha-H\sin\alpha=0. \quad (3)$$

Rezultă ecuaţia ce defineşte poziţia de echilibru:

$$Gy'=H=\pm kx. \quad (4)$$

şi reacţiunea

$$N=G\sqrt{1+y'^2} \quad (5)$$

În cazul aplicaţiilor:

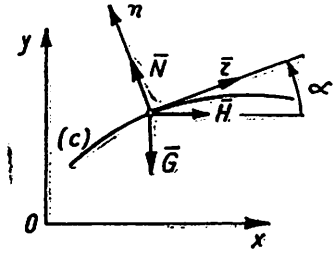
1) Pentru parabola $y=ax^2$, se obţine soluţia $x=0$ şi condiţia $k=2aG$ care corespunde unei poziţii de echilibru independente de x.

Reacţiunea este $N=G\sqrt{1+4a^2x^2}$.

2) $x=\sqrt[3]{\frac{G}{k}\sqrt{\frac{p}{2}}}$; $N=G\sqrt{1+\frac{p}{2x}}$.

3) $x=\sqrt[3]{\frac{6a^2}{k}}$; $N=G\sqrt{1+\frac{a^4}{x^4}}$.

Fig 3.17.



3.13. Un punct material A, de greutate $\overline{P}$, care se află pe curba plană de ecuație $y=f(x)$, este acționat de o forță $\overline{Q}$ având direcția tangentei la curbă (fig. 3.18, *a*). Să se determine între ce limite variază raportul $\frac{Q}{P}$, dacă punctul ocupă o poziție de echilibru într-un punct de abscisă cunoscută $x=x_0$, iar coeficientul de frecare la alunecare pe curbă este μ.

Aplicație pentru următoarele situații: *a)* $y=\sin\theta$; $\mu=0{,}2$; $\theta_0=\frac{\pi}{3}$. b) $y=x^3$; $\mu=0{,}5$; $x_0=2$. *c)* $y=\frac{x^3}{2}-1$; $\mu=0{,}3$; $x_0=1$.

Rezolvare. Izolînd punctul (fig. 3.18, *b*), scriind forțele de legătură și de frecare, ecuațiile de echilibru pentru tendința de mișcare corespunzătoare săgeții sînt:

$$(A_\tau);\quad Q-F_f-P\sin\alpha=0 \tag{1}$$

$$(A_\nu);\quad N-P\cos\alpha=0 \tag{2}$$

$$F_f\leqslant\mu N, \tag{3}$$

din care rezultă $Q\leqslant P(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ (4)

Deoarece $\operatorname{tg}\alpha=y'$, ținînd seamă și de cealaltă tendință de mișcare, rezultă dubla inegalitate:

$$\frac{y_0'-\mu}{\sqrt{1+y_0'^2}}\leqslant\frac{Q}{P}\leqslant\frac{y_0'+\mu}{\sqrt{1+y_0'^2}}.$$

Pentru aplicațiile numerice se obțin valorile:

a) $0{,}268\leqslant\frac{Q}{P}\leqslant0{,}627$; *b)* $0{,}95\leqslant\frac{Q}{P}\leqslant1{,}04$; *c)* $0{,}496\leqslant\frac{Q}{P}\leqslant0{,}925$.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

3.14. Pentru a se putea turna fontă topită în forme, un cubilou de greutate $\overline{G}$, manevrat de o macara, se înclină cu un unghi α față de verticală (fig. 3.19). Să se determine forța orizontală $\overline{F}$ necesară pentru a înclina oala de turnare și tensiunea $\overline{T}$ din cablul de susținere.

Răspuns. $F=T\sin\alpha$; $T=\frac{G}{\cos\alpha}$.

Fig. 3.18.

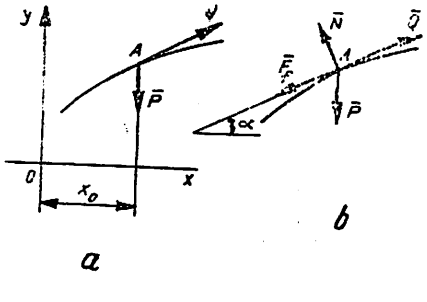
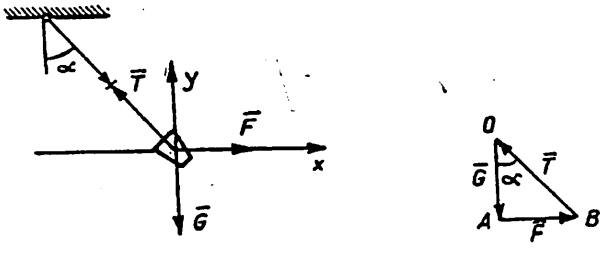


Fig. 3.19.



3.15. La o cardă [1]), capacul şi tamburul cu ace se deplasează în sens contrar şi prind între ace o bucată de lînă care opune destrămării o forţă P (fig. 3.20, *a*). Coeficientul de frecare dintre lînă şi ac fiind μ iar înclinarea acului faţă de orizontală fiind θ, să se determine:

a) forţa S cu care bucata de lînă este apăsată în lungul acului (fig. 3.20, *b*);

b) cît ar trebui să fie înclinarea acului pentru ca această forţă să fie zero?

Răspuns: $S=P(\cos\theta-\mu\sin\theta)$; $\operatorname{ctg}\theta=\mu$.

3.16. Pe o calotă sferică, de rază R, pot aluneca fără frecare două bile cu greutatea respectiv $\overline{P}$ şi $\overline{Q}$, legate între ele cu un fir de lungime l (fig. 3.21). Să se determine poziţia de echilibru a bilelor, definită de unghiul α, şi tensiunea în fir.

Rezolvare: Separînd corpurile, scriind echilibrul fiecărei bile şi ţinînd seamă că tensiunea din fir este aceeaşi, se obţine:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\theta+\frac{P}{Q}\operatorname{cosec}\theta;\quad T=P\cos\alpha.$$

3.17. Un punct aflat pe suprafaţa paraboloidului $xy=az$, de axă verticală Oz, este respins de axa Oz cu o forţă proporţională cu distanţa. Să se determine poziţia de echilibru, ţinînd seama de frecarea de alunecare.

Indicaţie şi răspuns. $\overline{R}=k\,x\,\overline{i}+k\,y\,\overline{j}$; $f(x, y, z)=xy-az$. Folosind tabela 3.1 rezultă:

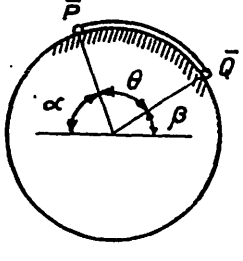
$$\cos\theta=\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

3.18. Un inel I, de greutate $\overline{G}$, (fig. 3.22) alunecă fără frecare pe elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. El este atras de axa Oy cu o forţă $\overline{F}$ proporţională cu abscisa punctului. Să se determine poziţiile de echilibru ale punctului şi reacţiunile respective.

Răspuns. Aplicînd relaţiile (4) şi (5) din problema 3.12. se obţin poziţiile de echilibru $B(0, b)$; $B'(0, -b)$ cu reacţiunea $N=G$, şi poziţiile definite de abscisele:

$$x=\pm\frac{1}{ak}\sqrt{k^2a^4-b^2G^2}$$

Fig. 3.21.



[1]) Maşină textilă

Fig. 3.20.

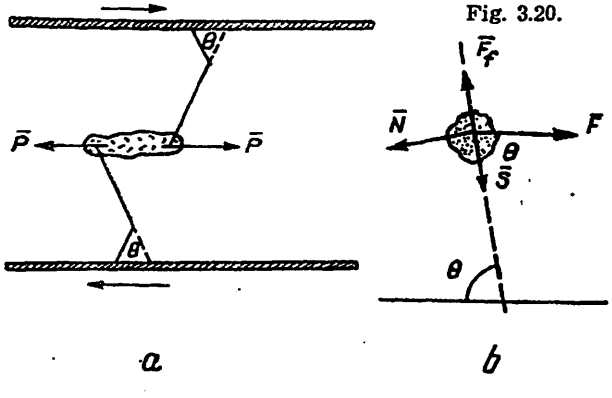
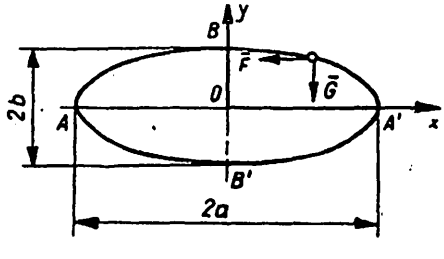


Fig. 3.22.



cu reacțiunea:

$$N=\pm G\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}.$$

3.19. O sferă de greutate G și raza R este rezemată pe un plan înclinat și oprită de un prag de înălțime a (fig. 3.23). Să se determine înclinarea ce trebuie dată planului, astfel încît sfera să treacă peste prag.

Indicație și răspuns. Punînd condiția ca în momentul trecerii peste plan reacțiunea din B să fie nulă, ținînd seama că

$$\sin\beta=\frac{R-a}{R},$$

se obține:

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a(2R-a)}}{R-a}.$$

3.20. Un cursor de greutate Q, poate aluneca fără frecare în lungul unei bare verticale. De cursor este prins un fir trecut peste un scripete, iar la capătul firului este o greutate (fig. 3.24). Să se determine mărimea acestei greutăți, astfel ca firul în poziția de echilibru să facă cu bara un unghi α.

Răspuns: $P=T=\frac{Q}{\cos\alpha}$; $N=Q\operatorname{ctg}\alpha$.

3.21. Să se studieze echilibrul unui punct material greu:

a) pe o elice aspră (de coeficient de frecare μ), de ecuații parametrice $x=R\cos\theta$; $y=R\sin\theta$; $z=k\theta$;

b) pe o sferă aspră de ecuație $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-R^2=0$.

Răspuns. a) Punctul material rămîne în echilibru în orice punct pe elice pentru $k\leqslant R\mu$.

b) Dacă $z>0$ regiunea în care punctul material stă în echilibru este calota sferică aflată deasupra planului de cotă $\frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$, iar dacă $z<0$, regiunea de echilibru este calota sferică situată dedesubtul planului de cotă:

$$-\frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Fig. 3.23.

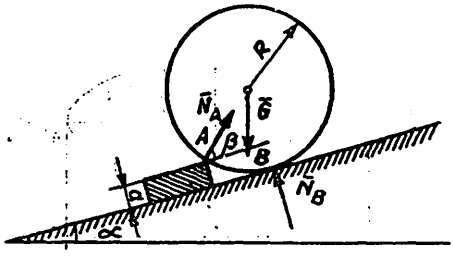
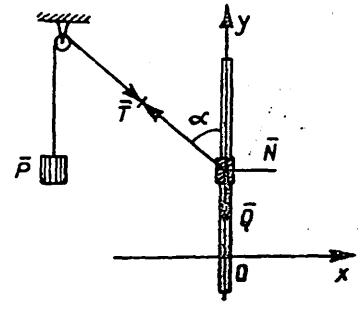


Fig. 3.24.



Capitolul 4

STATICA RIGIDULUI

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Un corp rigid** se află în echilibru cînd torsorul de reducere $\tau_0(\overline{R}, \overline{M}_0)$ a tuturor forțelor ce acționează asupra rigidului, într-un punct oarecare O din spațiu, este nul. Rigidul poate fi *liber* sau supus la *legături.* Condițiile vectoriale de echilibru pentru rigidul liber sînt:

$$\overline{R}=0\,;\quad \overline{M}_0=0 \tag{a}$$

Sub formă scalară, pentru diferite sisteme de forțe condițiile de echilibru se arată în tabela 4.1.

Tabela 4.1.

Condiții de echilibru

Sistemul de forțe	In plan		In spațiu	
	Numărul condițiilor de echilibru	Ecuațiile	Numărul condițiilor de echilibru	Ecuațiile
Forțe concurente	două	$X=\Sigma X_i=0$ $Y=\Sigma Y_i=0$	trei	$X=\Sigma X_i=0\,;\ Y=\Sigma Y_i=0\,;$ $Z=\Sigma Z_i=0$
Forțe paralele	două	$Y=\Sigma Y_i=0$ $M_0=\Sigma x_i Y_i=0$	trei	$Z=\Sigma Z_i=0$ $M_x=\Sigma(y_i Z_i-z_i Y_i)=0$ $M_y=\Sigma(z_i X_i-x_i Z_i)=0$
Forțe oarecare	trei	$X=\Sigma X_i=0$ $Y=\Sigma Y_i=0$ $M_0=(x_i Y_i-y_i X_i)=0$	șase	$X=\Sigma X_i=0\,;\ M_x=\Sigma(y_i Z_i-z_i Y_i)=0$ $Y=\Sigma Y_i=0\,;\ M_y=\Sigma(z_i X_i-x_i Z_i)=0$ $Z=\Sigma Z_i=0\,;\ M_z=\Sigma(x_i Y_i-y_i X_i)=0$
Cupluri oarecare	una	$M=0$	trei	$M_x=0\,;M_y=0\,;\ M_z=0$
Forțe și cupluri oarecare	trei	$X=0;\ Y=0;\ M_z=0$	șase	$X=0\,;\ Y=0\,;\ Z=0$ $M_x=0\,;\ M_y=0\,;\ M_z=0$

Ca şi la statica punctului material, în statica rigidului liber se rezolvă două categorii de probleme, după cum trebuie aflată poziţia de echilibru cunoscînd forţele, sau invers.

2. **În cazul solidului rigid** supus la **legături geometrice,** bazat pe axioma legăturilor, condiţiile vectoriale de echilibru sînt:

$$\overline{R}+\overline{L}=0\,;\ \overline{M}_0+\overline{M}_{0L}=0 \qquad (b)$$

unde $\tau_{0L}(\overline{L},\ \overline{M}_{0L})$ este torsorul forţelor *de legătură.*

Legăturile geometrice ale rigidului sînt: *reazemul simplu, articulaţia* şi *încastrarea.*

Reazemul simplu poate fi înlocuit cu o reacţiune N normală pe suprafaţa de rezemare. În ecuaţiile de echilibru un reazem simplu introduce o singură necunoscută scalară — mărimea reacţiunii — şi suprimă solidului rigid un grad de libertate.

Articulaţia poate fi *sferică* şi *cilindrică.* Articulaţia sferică asigură rigidului un punct fix şi suprimă rigidului trei grade de libertate. În ecuaţiile de echilibru, o asemenea articulaţie introduce *trei necunoscute scalare*: componentele triortogonale ale reacţiunii, sau alte mărimi — modulul reacţiunii, unghiurile reacţiunii cu axele, sau coordonatele în diferite sisteme de axe — (fig. 4.1 şi relaţiile *c*):

$$L=\sqrt{L_x^2+L_y^2+L_z^2}\,;\quad L=\frac{L_x}{\cos(\overline{L}\,;\,\overline{i})}=\frac{L_y}{\cos(\overline{L}\,;\,\overline{j})}=\frac{L_z}{\cos(\overline{L}\,;\,\overline{k})}\,. \qquad (c)$$

Articulaţia cilindrică (articulaţia simplă) suprimă unui rigid două grade de libertate şi poate fi înlocuită cu o reacţiune al cărui suport se află în planul forţelor şi a cărei direcţie este necunoscută. În ecuaţiile de echilibru, articulaţia cilindrică introduce două necunoscute: componentele reacţiunii după două axe din planul forţelor, sau mărimea reacţiunii şi unghiul reacţiunii cu una din axe (fig. 4.2):

$$L=\sqrt{L_x^2+L_y^2}\ (d)\,;\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{L_y}{L_x} \qquad (e)$$

Încastrarea: suprimă rigidului toate gradele sale de libertate şi introduce în general pentru forţele din spaţiu, în ecuaţiile de echilibru, şase necunoscute scalare, componentele L_x, L_y, L_z, M_{Lx}, M_{Ly}, M_{Lx} ale torsorului de legătură $\tau_0(L,\ M_L)$.

În cazul unui sistem de forţe plane se introduc trei necunoscute scalare: mărimea şi direcţia reacţiunii, sau componentele reacţiunii şi momentul cuplului:

$$L=\sqrt{L_x^2+L_y^2};\quad M_{zL}; \qquad (f)$$

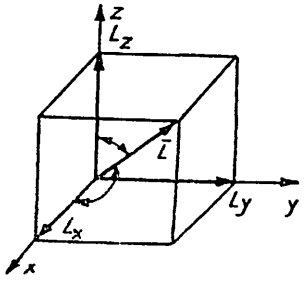


Fig. 4.1.

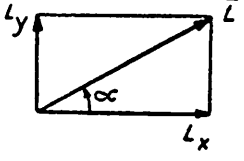


Fig. 4.2.

3. **Pentru rezolvarea problemelor de echilibru al rigidului se procedează astfel:**

a) se precizează forţele exterioare:

b) se izolează corpul al cărui echilibru se studiază înlocuind legăturile cu elementele mecanice de legătură (forţe şi cupluri) corespunzătoare sistemului de forţe;

c) se scriu condiţiile de echilibru ale forţelor care acţionează corpul, alegînd axele în mod convenabil pentru a se obţine maximum de simplificări;

d) condiţiile de echilibru pot varia de la una la şase, după cum forţele şi cuplurile acţionează în plan sau în spaţiu, conform tabelei de mai înainte;

e) în ecuaţiile de echilibru se introduc toate forţele şi cuplurile date, precum şi forţele şi cuplurile de legătură. Punctul în raport cu care se iau momentele forţelor este un punct oarecare, însă este bine ca el să fie ales astfel încît să permită maximum de simplificări în calcule;

f) se rezolvă sistemul de ecuaţii, găsind valorile necunoscutelor; reacţiunile legăturilor sau poziţia de echilibru a corpurilor; apoi se discută şi se interpretează rezultatele obţinute;

g) este bine, în rezolvarea problemelor de echilibru, să se ţină seamă şi de consideraţiile geometrice care rezultă din schiţarea forţelor respective, care aduc simplificări în calcule.

În cazul echilibrului a trei forţe concurente, acestea trebuie să se afle în acelaşi plan, să fie concurente sau paralele şi una dintre ele să fie egală şi de sens opus cu suma geometrică a celorlalte două.

Dacă numărul necunoscutelor este mai mare decît numărul ecuaţiilor de echilibru, problema este static nedeterminată şi pentru rezolvarea ei se folosesc ecuaţiile de deformaţii date de Rezistenţa materialelor.

4. **Legăturile cu frecare,** în cazul rezemării, fac să apară la contactul dintre corpuri : *frecarea de alunecare, frecarea de rostogolire, frecarea de pivotare.*

Frecarea de alunecare introduce o forţă de frecare *de sens contrar mişcării sau tendinţei de mişcare,* dată de inegalitatea:

$$0 \leqslant F \leqslant \mu N, \qquad (g)$$

unde μ este coeficientul de frecare la alunecare, $\overline{N}$ reacţiunea normală, pe planul tangent comun, în punctul de contact (fig. 4.3).

Frecarea de rostogolire apare la rotirea sau la tendinţa de rostogolire a corpului în jurul unei axe aflată în planul tangent comun corpurilor în punctul de contact. Mărimea variabilă a cuplului de frecare la rostogolire este:

$$0 \leqslant M_r \leqslant sN, \qquad (h)$$

unde s este coeficientul de frecare la rostogolire.

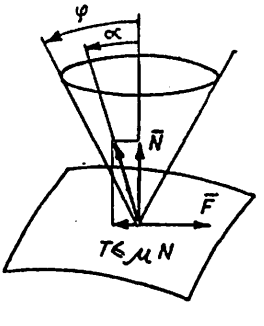


Fig. 4.3.

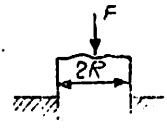
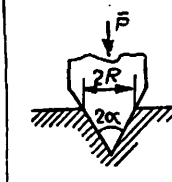
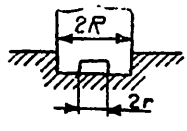
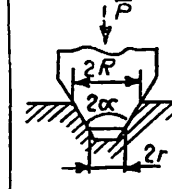
Frecarea de pivotare, apare la rotirea sau la tendința de rotire a corpului în jurul unei axe normale pe suprafața de contact. Cuplul de frecare de pivotare, are mărimea variabilă:

$$0 \leqslant M_p \leqslant M_{pmax} \qquad (i)$$

cuprinsă între zero și o valoare maximă dedusă experimental. În tabela 4.2 sînt date unele valori ale cuplului de frecare de pivotare.

Tabela 4.2

Expresii ale momentelor de frecare

Tipul pivotării	Momentul maxim	Tipul pivotării	Momentul maxim
 Pivotare plană	$M_f = \frac{2}{3}\mu PR$	 Pivotare conică	$M_f = \frac{2}{3}\mu P \frac{R}{\sin\alpha}$
 Pivotare plană	$M_f = \frac{2}{3}\mu P \frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}$	 Pivotare tronconică	$M_f = \frac{2}{3}\mu P \frac{R^3-r^3}{(R^2-r^2)\sin\alpha}$

În cazul frecării în articulații (ax, palier, fus), apare un cuplu de frecare de moment variabil:

$$0 \leqslant M_f \leqslant \mu' rR \qquad (j)$$

unde μ' este coeficientul de frecare, r raza articulației și R mărimea reacțiunii din articulație.

5. Problemele de echilibru cu frecare se rezolvă ca și celelalte probleme de echilibru arătate mai înainte, cu singura deosebire că se introduc în ecuațiile de echilibru forțele sau, momentele de frecare. Cum la ecuațiile de echilibru cu frecare se adaugă, datorită frecărilor, o inegalitate, exceptînd cazurile limită, problemele de echilibru cu frecare sînt în general nedeterminate.

Pentru aplicații practice valorile diferiților coeficienți de frecare se găsesc în anexa 2.

B. PROBLEME REZOLVATE

4.1. Să se afle poziția de echilibru, definită prin unghiul φ, al unei bare de greutate $\overline{P}$, și lungime $2\,l$, rezemată fără frecare pe planurile înclinate ce fac unghiurile α și β față de orizontală (fig. 4.4).

Rezolvare. Forțele care acționează bara sînt greutatea proprie $\overline{P}$ și reacțiunile din A și B. Ecuațiile de echilibru ale barei sînt:

$$(\Sigma X);\ N_A \sin\alpha - N_B \sin\beta = 0$$

$$(\Sigma Y);\ N_A \cos\alpha + N_B \cos\beta - P = 0$$

$$(\Sigma M_B F);\ Pl\cos(\alpha-\varphi) - N_A 2l\cos\varphi = 0.$$

Din ecuațiile precedente rezultă:

$$N_A = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}P;\quad N_B = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}P;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} - \operatorname{ctg}\alpha.$$

La echilibru forțele N_A, N_B și P sînt concurente.

4.2. Pentru a întinde cureaua de transmisie a două șaibe, se folosește o pîrghie cotită OAB, articulată în O, care are în A o rolă ce vine în contact cu cureaua, iar în B o greutate Q (fig. 4.5). Cunoscînd l_1, l_2, α, Q, să se determine tensiunile în curea și reacțiunile din articulație.

Rezolvare. Eliberînd bara de legături, asupra acesteia vor acționa:

— greutatea $\overline{Q}$;

— componentele reacțiunii din articulație (X_0, Y_0) și

— reacțiunea $\overline{N}$ a curelei în A dirijată după direcția bisectoarei unghiului OAB.

Scriind echilibrul acestor forțe, rezultă ecuațiile:

$$(\Sigma X);\quad X_0 - N\sin\frac{\alpha}{2} = 0;$$

$$(\Sigma Y);\quad Y_0 + N\cos\frac{\alpha}{2} - Q = 0;$$

$$(\Sigma M_0);\quad Nl_1\cos\frac{\alpha}{2} - Q(l_1+l_2) = 0,$$

Fig. 4.4.

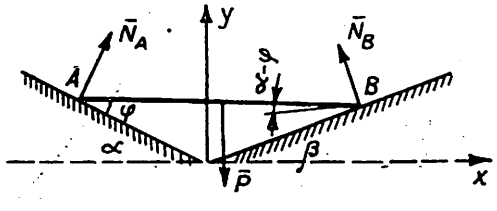
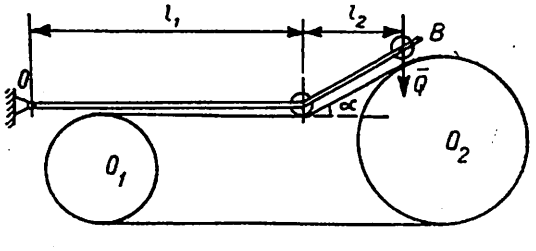


Fig. 4.5.



din care se deduce:

$$X_0=N\sin\frac{\alpha}{2};\quad Y_0=Q-N\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$N=\frac{Q(l_1+l_2)}{l_1\cos\frac{\alpha}{2}};\quad T=\frac{Q(l_1+l_2)}{l_1\sin\alpha}.$$

4.3. O scară de pompier, avînd lungimea de 13 m şi greutarea $G=2{,}5$ kN, este înclinată faţă de orizontală cu un unghi $\alpha=25°$ (fig. 4.6). Asupra scării acţionează forţele:

$$P_1=0{,}9\text{ kN};\quad P_2=0{,}75\text{ kN};$$

$$P_3=0{,}7\text{ kN};\quad Q=1{,}1\text{ kN}.$$

Să se determine reacţiunea din articulaţia C şi tensiunea $\overline{T}$ din cablul ce acţionează scara, sub unghiul β.

Rezolvare.

Metoda grafică. Se construieşte poligonul forţelor şi poligonul funicular, obţinîndu-se rezultanta $\overline{R}$ a forţelor exterioare. Scara fiind în echilibru, cele trei forţe $\overline{R}$, $\overline{T}$ şi $\overline{R_C}$ (reacţiunea din articulaţia C) trebuie să fie concurente. În felul acesta, se determină în poligonul funicular direcţia forţei $\overline{R_C}$ (fig. 4.7). În poligonul forţelor, ducînd paralele la direcţiile CE şi AE, se obţin mărimile reacţiunii $\overline{R_C}$ şi a tensiunii $\overline{T}$ în cablu.

Metoda analitică. În raport cu un sistem de axe de coordonate ortogonale, ecuaţiile de echilibru sînt:

$$(\Sigma X);\ X_C+T\cos(\beta-\alpha)+Q\sin\alpha=0;$$

$$(\Sigma Y);\ Y_C-P_1-P_2-P_3-G-T\sin(\beta-\alpha)-Q\cos\alpha=0;$$

$$(\Sigma M_C F);\ 4T\sin\beta+3P_1\cos\alpha-2{,}5G\cos\alpha-4{,}5\,P_2\cos\alpha-$$
$$-8P_3\cos\alpha-9Q=0.$$

Rezolvînd sistemul, se obţine:

$$T=7{,}5\text{ kN};\quad X_C=-7{,}515\text{ kN};\quad Y_C=8{,}2\text{ kN}.$$

4.4. Un pod de lungime l şi greutate $\overline{G}$ poate fi ridicat cu ajutorul unui cablu trecut peste un scripete, aşezat la înălţimea h faţă de articulaţia podului O

Fig. 4.6.

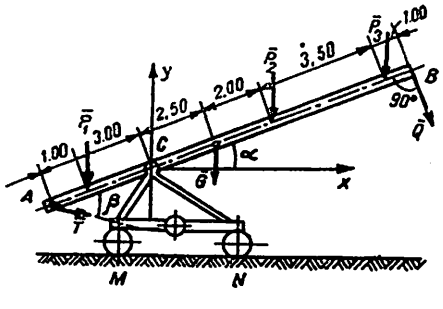
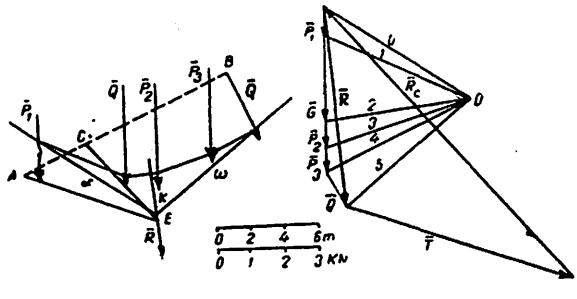


Fig. 4.7.



(fig. 4.8). Să se determine forța de tracțiune $\overline{P}$ în funcție de α, unghiul de înclinare al podului. Se neglijează frecările.

Rezolvare. Forța $\overline{P}$ se află din ecuația de momente:

$$(\Sigma M_0 \overline{F});\quad G\frac{l}{2}\cos\alpha - P\sin\alpha = 0.$$

Din teorema sinusului aplicată triunghiului $OB'C$ rezultă:

$$P = G\frac{l}{2a}\sqrt{a^2+h^2-2ah\cos\alpha}.$$

Cu ajutorul ecuațiilor de proiecție se determină reacțiunea din articulația O.

4.5. O bară rigidă, avînd forma din figura 4.9, *a*, este articulată în A și simplu rezemată în B. În D acționează forța $\overline{P}$. Cunoscînd unghiul α, relațiile $AC=BC=CD=2a$ și admițînd că bara omogenă are greutatea q pe unitatea de lungime, să se afle reacțiunile din A și B.

Rezolvare. Izolînd corpul (fig. 4.9,*b*) și introducînd forțele exterioare și de legătură, se pot scrie ecuațiile de echilibru:

$$(\Sigma X);\ -X_A+X_B=0;$$

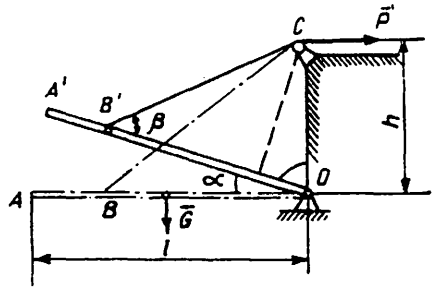
$$(\Sigma Y);\ Y_A-6qa-P=0$$

$$(\Sigma M_A);\ X_B\cdot 4a\cos\alpha - P(2a+2a\sin\alpha) - 2qa\,(a+ +2a\sin\alpha) - 2\cdot 2qa\cdot a\sin\alpha = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se obține pentru reacțiuni următoarele valori:

$$Y_A = P+6qa;\quad X_A = X_B = \frac{P+qa+(P+4qa)\sin\alpha}{2\cos\alpha}.$$

Fig. 4.8.



4.6. Un cadru $ACDB$, articulat în A și rezemat în B, suportă cîte o sarcină concentrată în C și D (fig. 4.10). Să se determine reacțiunile din A și B. În ce condiții reacțiunea din B devine nulă?

Fig. 4.9.

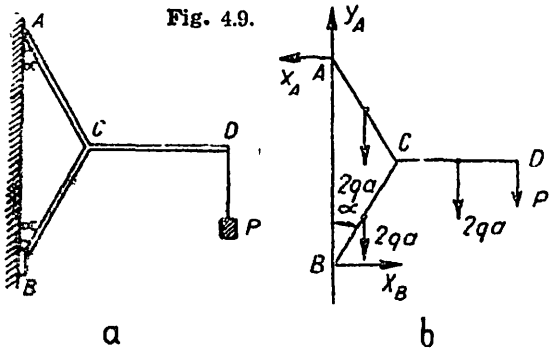
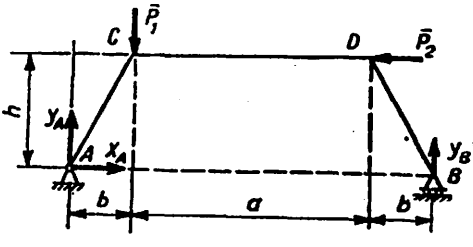


Fig. 4.10.



Rezolvare. Ecuațiile de echilibru devin în acest caz:

$$(\Sigma X);\ X_A - P_2 = 0;$$
$$(\Sigma Y);\ Y_A + Y_B - P_1 = 0;$$
$$(\Sigma \overline{M}_A \overline{F});\ P_1 b - P_2 h - Y_B(a+2b) = 0$$

de unde:

$$X_A = P_2;\quad Y_A = \frac{P_1(a+b)+P_2 h}{a+2b};\quad Y_B = \frac{P_1 \cdot b - P_2 \cdot h}{a+2b}.$$

Reacțiunea în reazemul B devine nulă cînd:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{h}{b}.$$

4.X. O placă orizontală de formă dreptunghiulară, de dimensiune a, b și greutate P, este prinsă în A și B cu articulații cilindrice și susținută cu o bară $CD = l$. Să se determine reacțiunile din articulații și efortul din bara CD (fig. 4.11).

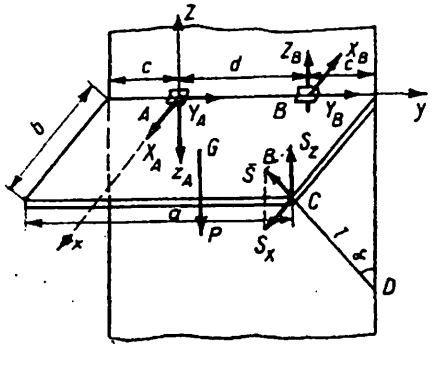
Rezolvare. Componentele forțelor care acționează asupra plăcii, precum și coordonatele punctelor lor de aplicație în raport cu sistemul de axe ales, cu originea în A, sînt:

$$\overline{P}(0,\ 0,\ -P);\quad G\left(\frac{b}{2},\ \frac{d}{2},\ 0\right);$$
$$\overline{F}_A(X_A,\ Y_A,\ Z_A);\quad A(0,\ 0,\ 0)$$
$$\overline{F}_B(X_B,\ Y_B,\ Z_B);\quad B(0,\ d,\ 0);$$
$$\overline{S}(S_x,\ 0,\ S_z);\quad C(b,\ d+c,\ 0).$$

Din ecuațiile de echilibru:

$$(\Sigma X);\ X_A + X_B + S_x = 0; \tag{1}$$
$$(\Sigma Y);\ Y_A + Y_B = 0; \tag{2}$$
$$(\Sigma Z);\ Z_A + Z_B + S_z - P = 0; \tag{3}$$

Fig. 4.11.



$$(\Sigma M_x \overline{F});\quad -P\frac{d}{2} + dZ_B + (d+c)S_z = 0; \tag{4}$$

$$(\Sigma M_y \overline{F});\quad P\frac{b}{2} - bS_x = 0; \tag{5}$$

$$(\Sigma M_z F);\quad -d \cdot X_B - (d+c)S_x = 0. \tag{6}$$

rezultă reacțiunile:

$$S_z=\frac{P}{2};\quad Z_B=+\frac{P}{2}\cdot\frac{c}{d};\quad Z_A=\frac{P}{2}\cdot\frac{c+d}{d};\quad S_x=\frac{P}{2}\frac{b}{\sqrt{l^2-b^2}};$$

$$X_B=\frac{d+c}{d}\cdot\frac{b}{\sqrt{l^2-b^2}}\cdot\frac{P}{2}.$$

4.8. Un paralelipiped de dimensiuni a, b, c și greutate G, este articulat în A, sprijinit în B și D și ancorat în H (fig. 4.12). În colțurile F și I este acționat de două forțe $\overline{P}_1$ și $\overline{P}_2$. Să se determine reacțiunile din A, B și D, precum și tensiunea din cablul de ancorare.

Rezolvare. Componentele forțelor, care acționează asupra corpului în raport cu un sistem de axe de coordonate avînd originea în A, precum și coordonatele punctelor lor de aplicație sînt:

$$\overline{G}\ (0,\ 0,\ -G);\qquad G\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{c}{2}\right);$$

$$\overline{P}_1(0,\ P_1,\ 0);\qquad F(a,\ 0,\ c);$$

$$\overline{P}_2(-P_2,\ 0,\ 0);\qquad I(0,\ b,\ c);$$

$$\overline{F}_A(X_A,\ Y_A,\ Z_A);\qquad A(0,\ 0,\ 0);$$

$$\overline{F}_B(0,\ 0,\ N_B);\qquad B(a,\ 0,\ 0);$$

$$\overline{F}_D(0,\ 0,\ N_D);\qquad D(0,\ b,\ 0);$$

$$\overline{T}(T,\ 0,\ 0);\qquad H(a,\ b,\ c).$$

Componentele torsorului de reducere în punctul A sînt:

$$\overline{R}=(-P_2+X_A+T)\,\overline{i}+(P_1+Y_A)\,\overline{j}+(-G+N_B+N_D+Z_A)\,\overline{k}$$

$$\overline{M}_A=\overline{r}_G\times\overline{G}+\overline{r}_F\times\overline{P}_1+\overline{r}_I\times\overline{P}_2+\overline{r}_H\times\overline{T}+\overline{r}_B\times\overline{N}_B+\overline{r}_D\times\overline{N}_D=$$

$$=\left(-\frac{G}{2}b+b\,N_D-P_1c\right)\overline{i}+\left(a\frac{G}{2}-P_2c-aN_B+cT\right)\overline{j}+$$

$$+(aP_1+bP_2-bT)\,\overline{k}$$

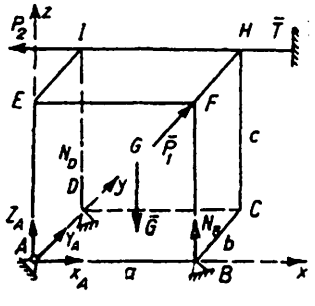
Din condiția de echilibru — torsorul nul — rezultă șase ecuații de echilibru din care se obțin reacțiunile N_B, N_D, X_A, Y_A, Z_A, T, R_A:

$$N_D=\frac{1}{2}G+\frac{c}{b}P_1;\quad T=P_2+\frac{a}{b}P_1;\quad N_B=\frac{1}{2}G+\frac{c}{b}P_1$$

$$X_A=-\frac{a}{b}P_1;\quad Y_A=-P_1;\quad Z_A=-2\frac{c}{b}P_1;\quad |\overline{R}_A|=$$

$$=\frac{P_1\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}{b}.$$

Fig. 4.12.



4.9. O placă dreptunghiulară simetrică este suspendată, prin intermediul unui cablu, de un perete vertical, astfel încît marginea CD orizontală se reazemă de perete (fig. 4.13). Mijlocul cablului este legat de un cui al peretelui, iar cele două extremităţi ale cablului sînt legate de marginile E şi F ale plăcii. Cunoscînd greutatea plăcii G şi mărimile geometrice: $AB=CD=2d$ $AP=BC=2b$; $IL=a$ şi lungimea firului $2l$, se cere să se determine: poziţia de echilibru a plăcii definită de unghiul α, reacţiunea zidului asupra plăcii şi tensiunile din fir.

Indicaţie şi răspuns. Din ecuaţiile de echilibru

$$(\Sigma X);\ -N+T_1\sin\beta=0$$

$$(\Sigma Y);\ T_1\cos\beta-G=0$$

$$(\Sigma\overline{M}_0\overline{F});\ Gb\sin\alpha-Na\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=0$$

rezultă:

$$N=G\frac{b}{a}\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};$$

$$T=\frac{T_1}{2\sin\delta}=\frac{l}{\sqrt{l^2-d^2}}\cdot\frac{Gb}{a}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)};$$

iar poziţia de echilibru în afară de poziţia banală $\alpha=0$, este dată de ecuaţia:

$$\cos\alpha=\pm\frac{b-a}{a}\cdot\sqrt{\frac{l^2-d^2-d^2}{2a-b}}.$$

4.10. Să se studieze echilibrul unui cilindru cu raza R şi greutatea $\overline{G}$ pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală şi tras de o forţă $\overline{F}$ paralelă cu planul. Se va ţine seama de frecarea de alunecare şi de cea de rostogolire (roţi trase). Discuţie.

Rezolvare. Problema se va trata ţinînd seama de toate tendinţele de mişcare posibile.

a) Tendinţa de alunecare în sus. Ecuaţiile de echilibru ale forţelor care acţionează asupra cilindrului sînt (fig. 4.14):

$$(\Sigma X);\ F_1-F_f-G\sin\alpha=0;$$

$$(\Sigma Y);\ N-G\cos\alpha=0.$$

Cum la limită $F_f=\mu N$, rezultă:

$$F_1=G(\sin\alpha+\mu\cos\alpha). \qquad (1)$$

Fig. 4.13.

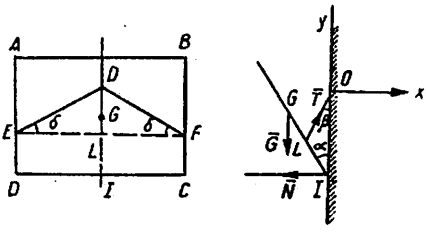
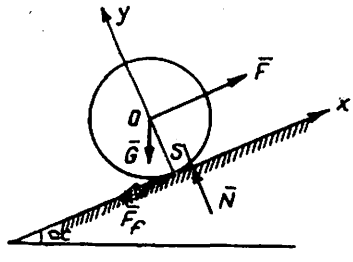


Fig. 4.14.



b) Tendința de alunecare în jos. Procedînd analog, se obține ecuația:

$$F_2=G(\sin\alpha-\mu\cos\alpha). \tag{2}$$

c) Tendința de rostogolire în sus sub acțiunea forței F_3, aplicată în centrul secțiunii cilindrului. Ecuația de momente este:

$$(\Sigma M);\ F_3R+GR\sin\alpha+M_f=0.$$

Cum la limită $M_f=N\cdot s$, rezultă:

$$F_3=G\left(\sin\alpha+\frac{s}{R}\cos\alpha\right). \tag{3}$$

d) Tendința de rostogolire în jos. Procedînd analog, se obține ecuația:

$$F_4=G\left(\sin\alpha-\frac{s}{R}\cos\alpha\right). \tag{4}$$

Discuție. Luînd un sistem de axe de coordonate ortogonal, în care abscisa reprezintă valori pentru μ, respectiv s/R, iar ordonata reprezintă valori pentru forțe, se pot reprezenta grafic cele patru ecuații determinate mai sus (fig. 4.15).

Din examinarea graficului rezultă următoarele situații posibile, prezentate în tabela 4.3.

Tabela 4.3

Discutarea condițiilor de echilibru

$\frac{s}{R}<\mu$	Rostogolire cu alunecare în jos (F_2)	Rostogolire în jos fără alunecare (F_4)	Echilibru (F_3)	Rostogolire în sus fără alunecare (F_1)	Rostogolire cu alunecare în sus
$\frac{s}{R}=\mu$	Rostogolire cu alunecare în jos (F_4) (F_2)		Echilibru (F_3) (F_1)	Rostogolire cu alunecare în sus	
$\frac{s}{R}>\mu$	Rostogolire cu alunecare în jos (F_4)	Alunecare în jos fără rostogolire (F_2)	Echilibru (F_1)	Alunecare în sus fără rostogolire (F_3)	Rostogolire cu alunecare în sus

din care rezultă că în cazul în care $F=0$, dacă:

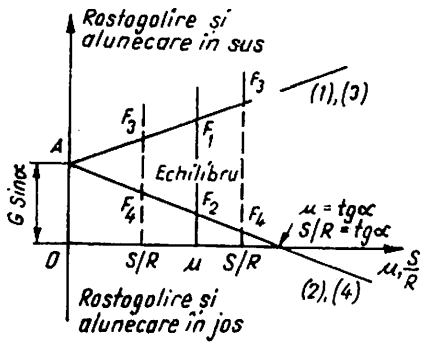
$\mu>\operatorname{tg}\alpha, \frac{s}{R}>\operatorname{tg}\alpha$ echilibru;

$\mu>\operatorname{tg}\alpha, \frac{s}{R}<\operatorname{tg}\alpha$ rostogolire în jos fără alunecare;

$\mu<\operatorname{tg}\alpha, \frac{s}{R}>\operatorname{tg}\alpha$ alunecare în jos fără rostogolire:

$\mu<\operatorname{tg}\alpha, \frac{s}{R}<\operatorname{tg}\alpha$ alunecare cu rostogolire în jos.

Fig. 4.15.



4.11. Să se studieze echilibrul pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, al unui cilindru de rază R și greutate $\overline{G}$, acționat de un cuplu motor C_m, și care în același timp trage după sine o sarcină care acționează cu o forță $\overline{F}$ (fig. 4.16).

Rezolvare. Datorită cuplului motor, cilindrul are tendința fie de a se urca pe plan rostogolindu-se în sus, fie de a coborî, rostogolindu-se în jos și în același timp alunecînd în jos.

Ecuațiile de echilibru sînt:

$$(\Sigma X);\ F_f - F - G\sin\alpha = 0;$$

$$(\Sigma Y);\ N - G\cos\alpha = 0;$$

$$(\Sigma M);\ C_m - M_f - F_f \cdot R = 0,$$

în care semnul minus corespunde tendinței de rostogolire în sus, iar semnul plus tendinței de rostogolire în jos.

Ținînd seama de condițiile frecării limită,

$$F_f = \mu N \text{ și } M_f = N \cdot s,$$

de unde:

$$F = G(\mu\cos\alpha - \sin\alpha). \tag{1}$$

$$\frac{C_m}{R} = G\left(\mu \pm \frac{s}{R}\right)\cos\alpha. \tag{2}$$

Se notează:

$$G(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) = A;$$

$$G\left(\mu + \frac{s}{R}\right)\cos\alpha = B_1;\quad G\left(\mu - \frac{s}{R}\right)\cos\alpha = B_2.$$

Luînd un sistem de axe de coordonate ortogonal, în care abscisa reprezintă valori pentru μ, iar ordonata valori pentru F, respectiv $\frac{C_m}{R}$, se pot reprezenta grafic funcțiile A, B_1 și B_2 (fig. 4.17).

Din examinarea graficului, rezultă diferitele situații care se pot întîlni în practică, prezentate în tabela 4.4.

Fig. 4.16.

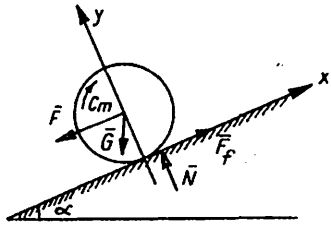


Fig. 4.17.

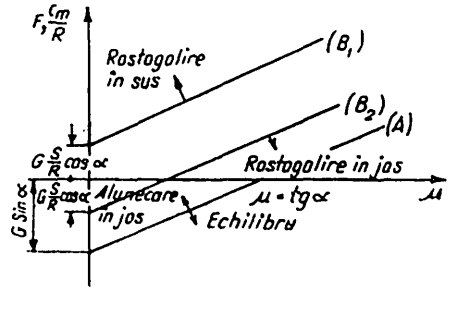


Tabela 4.4

Discutarea condițiilor de echilibru

Valoarea tracțiunii F	Valoarea cuplului motor C_m	Valoarea coeficientului de frecare μ	Natura mișcării
$F \leqslant A$	$B_2 < \frac{C_m}{R} < B_1$	—	Echilibru
	$\frac{C_m}{R} > B_1$	—	Rostogolire în sus fără alunecare
	$\frac{C_m}{R} < B_2$	—	Rostogolire în jos fără alunecare
$F > A$	$B_2 < \frac{C_m}{R} < B_1$	—	Alunecare în jos fără rostogolire
	$\frac{C_m}{R} > B_2$	—	Alunecare în sus și rostogolire în sus
	$\frac{C_m}{R} < B_2$	—	Alunecare în jos și rostogolire în jos
$F=0$	—	$\mu > \operatorname{tg}\alpha$	Se realizează primul caz de mai sus ($F \leqslant A$)
	—	$\mu < \operatorname{tg}\alpha$	Se realizează cazul al doilea de mai sus ($F > A$)

C. PROBLEME NEREZOLVATE

4.12. O balanță are brațele egale $AC=CB=a$, iar suportul OC de lungime b este articulat în O (fig. 4.18). Greutatea brațelor și suportului este p N/m. Știind că la capetele balanței se atîrnă greutățile $\overline{Q_1}$ și $\overline{Q_2}$ ($Q_2 > Q_1$), să se determine unghiul α cu care s-a înclinat balanța.

Indicație și răspuns. Din ecuația de momente, în raport cu punctul O, a tuturor forțelor care acționează asupra balanței,

$$Q_1 (a\cos\alpha + b\sin\alpha) + (p\ 2a)\, b\sin\alpha +$$

$$+ (p \cdot b)\frac{b}{2}\sin\alpha - Q_2 (a\cos\alpha - b\sin\alpha) = 0,$$

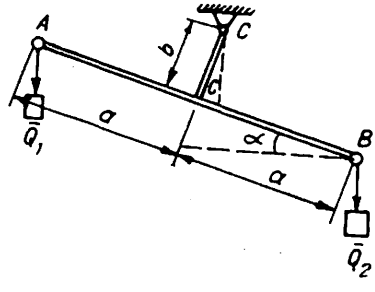


Fig. 4.18.

rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{Q_2 - Q_1}{Q + Q + p\left(2a + \frac{b}{2}\right)}.$$

Din această relaţie se constată că, cu cît b este mai redus, cu atît unghiul α este mai mare, deci balanţa mai sensibilă.

4.13. Cît de mare trebuie să fie contragreutatea Q a macaralei turn (fig. 4.19) pentru a nu se răsturna în momentul ridicării sarcinii P.

Indicaţie şi răspuns. Punînd condiţia ca momentul stabilizator produs de contragreutate să fie de k ori mai mare decît cel de răsturnare în raport cu punctul A, (k fiind coeficientul de siguranţă) rezultă:

$$Q = \frac{1}{a}(kP_c - G_e).$$

4.14. Un cărucior de greutate P este ridicat pe o rampă, înclinată faţă de orizontală cu un unghi α, de către un motor avînd o greutate G (fig. 4.20). Să se determine reacţiunile din articulaţia B şi reazemul A.

Răspuns

$$V_A = \frac{G}{2} + P\sin^2\alpha; \quad H_B = \frac{P}{2}\sin 2\alpha; \quad V_B = \frac{G}{2}.$$

4.15. O bară avînd greutatea P, articulată în punctul O, este susţinută de un fir la cealaltă extremitate (fig. 4.21). Să se determine tensiunea în fir şi reacţiunile din articulaţie, atunci cînd bara stă în echilibru sub un unghi β, iar firul face cu orizontala un unghi α.

Răspuns.

$$T = P\frac{\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}; \qquad H = P\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)};$$

$$V = P\left[1 - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}\right].$$

Fig 4.19.

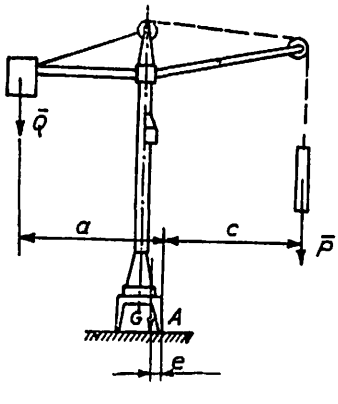


Fig. 4.20.

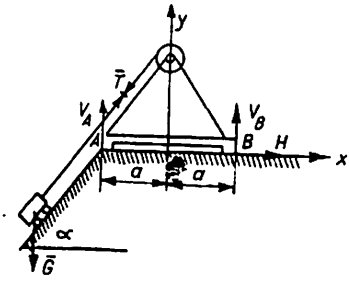
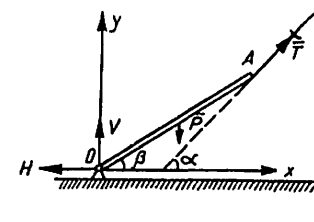


Fig. 4.21.



4.16. În punctul C al unei grinzi, cu lungimea l, acționează un cuplu de moment M_0 (fig. 4.22). Să se determine reacțiunile din articulația A și reazemul B.

Răspuns.

$$Y_B=\frac{M_0}{l} \quad \text{și} \quad Y_A=\frac{M_0}{l}.$$

Oricare ar fi punctul în care acționează cuplul reacțiunile rămîn aceleași.

4.17. Un stîlp, încastrat în A, suportă la extremitatea C o forță verticală Q (fig. 4.23). Forța vîntului fiind considerată o sarcină P pe unitatea de lungime, uniform distribuită în lungul porțiunii AB, să se determine reacțiunile din A.

Răspuns.

$$X_A=ph; \quad Y_A=Q; \quad M_A=Ql+\frac{ph^2}{2}.$$

4.18. Bara AB omogenă, de greutate $\overline{G}$ și lungime $2l$, (fig. 4.24) este rezemată, fără frecare, pe planul orizontal și vertical și legată cu un fir de originea O. Se cer reacțiunile din A și B și tensiunea T din firul OC.

Răspuns.

$$N_A=\frac{G}{2}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}; \quad N_B=G+\frac{G}{2}\cdot\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)};$$

$$T=\frac{G}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)}.$$

4.19. Se dă presa mecanică din figura 4.25. Asupra brațului DK, legat rigid cu latura DC a paralelogramului articulat $ABCD$, acționează forța $\overline{P}$. Cunoscînd elementele geometrice ale sistemului mecanic să se determine forța $\overline{Q}$ și reacțiunea $\overline{N}$.

Răspuns.

$$Q=\frac{Pl\cos\beta}{a\sin(\alpha+\beta)}; \quad N=Q\operatorname{tg}\beta.$$

Fig. 4.22.

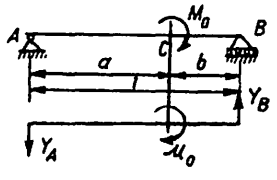


Fig. 4.23.

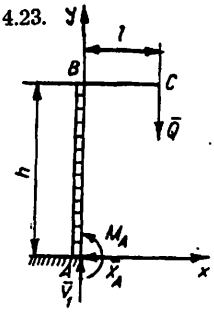


Fig. 4.24.

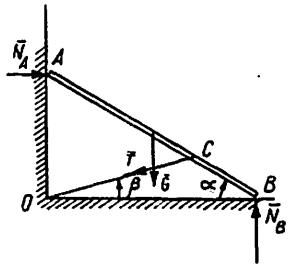
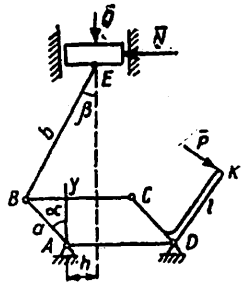


Fig. 4.25.



4.20. Bara omogenă $AB=l$, avînd greutatea p pe unitatea de lungime, prinsă cu trei fire, este în echilibru în poziţie orizontală (fig. 4.26). Să se afle tensiunile din fire.

Rezolvare. Izolînd bara prin tăierea firelor, se pot scrie următoarele condiţii de echilibru:

$$(\Sigma X);\quad -T_1\cos\alpha+T_3\cos\beta=0$$

$$(\Sigma Y);\quad T_1\sin\alpha+T_2+T_3\sin\beta-pl=0$$

$$(\Sigma M_A);\quad T_2a+T_3l\sin\beta-p\frac{l^2}{2}=0.$$

Din rezolvarea sistemului de ecuaţii, se obţine:

$$T_1=\frac{pl}{2}\cdot\frac{(l-2a)\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta-a\sin(\alpha+\beta)};$$

$$T_2=\frac{pl}{2}\cdot\frac{l\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta-a\sin(\alpha+\beta)};$$

$$T_3=\frac{pl}{2}\cdot\frac{(l-2a)\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\beta-a\sin(\alpha+\beta)}.$$

4.21. Bara OC, de greutate neglijabilă, articulată în O este prinsă cu cablurile AD şi BE, iar în extremitatea C este fixată greutatea $\overline{Q}$ (fig. 4.27). Se cere să se determine tensiunile T_1 şi T_2 din cablurile AD şi BE, precum şi reacţiunile din articulaţia O, bara rămînînd în poziţie orizontală.

Aplicaţie: $a=d=e=4$ m; $b=c=5$ m; $f=g=2$ m. $Q=10$ kN.

Răspuns. $R_x=3{,}26$ kN; $R_y=17{,}60$ kN; $R_z=7{,}40$ kN

$T_1=18{,}4$ kN; $T_2=11{,}4$ kN.

4.22. Dispozitivul din figura 4.28, de dimensiuni cunoscute, are greutatea $\overline{G}$. Să se determine reacţiunile A şi B, precum şi forţa minimă $\overline{P}$ necesară pentru ca dispozitivul să nu alunece pe stîlp, μ fiind coeficientul de frecare.

Răspuns.

$$P\leqslant\frac{h-2\mu e}{2\mu a-h}G.$$

4.23. O scară, avînd lungimea l şi greutatea $\overline{G}$, este rezemată pe un perete vertical şi pe un plan orizontal (fig. 4.29). Coeficienţii de frecare în A şi B fiind

Fig. 4.26

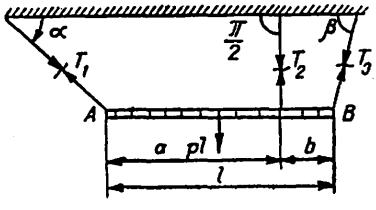


Fig. 4.27.

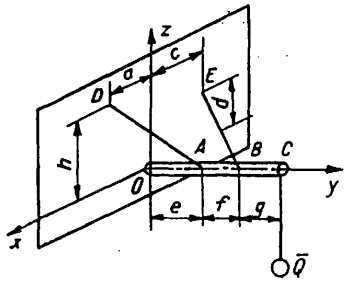
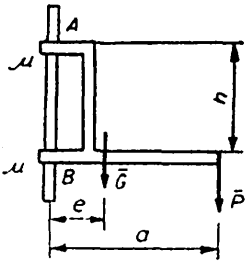


Fig. 4.28.



respectiv μ_1 și μ_2, se cere să se determine reacțiunile în punctele de rezemare, precum și înclinarea maximă ce poate fi dată scării, dacă pe scară se urcă o persoană, avînd greutatea P, pînă la distanța $AC=a$.

Răspuns. $N_A=\frac{G+P}{1+\mu_1\mu_2}$; $N_B=\frac{\mu_1}{1+\mu_1\mu_2}(G+P)$;

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{Pa+G\frac{l}{2}}{(G+P)}\left(\frac{1}{\mu_1}+\mu_2\right)-\mu_2.$$

4.24. Să se determine mărimea forței $\overline{P}$, necesară menținerii în echilibru a corpului de greutate $\overline{Q}$ pe un plan înclinat cu unghiul α, față de orizontală, cunoscîndu-se unghiurile α și β și unghiul de frecare $\varphi>\alpha$ (fig. 4.30, *a*).

Indicație și răspuns. Izolînd corpul — asimilat unui punct material — de legături (fig. 4.30, *b*), din ecuațiile de echilibru și inegalitatea frecării rezultă, pentru cele două tendințe de mișcare, inegalitățile:

$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)}\leqslant\frac{P}{Q}\leqslant\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}.$$

Prima inegalitate corespunde tendinței de mișcare dată de săgeată.

4.25. Bara omogenă $AB=2l$, de greutate $\overline{G}$ (fig. 4.31, *a*), se sprijină cu frecare cu capătul A pe un plan orizontal și în C, fără frecare, pe o suprafață circulară de centru O și raza r. Să se determine reacțiunile N_1 și N_2, precum și coeficientul de frecare μ pentru ca bara să rămînă în echilibru.

Răspuns.

$$N_2=\frac{\mu G}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha};\quad N_1=\frac{G\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha};$$

$$\mu\geqslant\frac{l}{r}\sin\alpha(\sin\alpha+\mu\cos\alpha).$$

4.26. Bara $AB=l<R$ omogenă, de greutate $\overline{G}$, se sprijină fără frecare cu capătul A pe semicercul de centru O și rază R, iar cu capătul B pe diametrul

Fig 4.29.

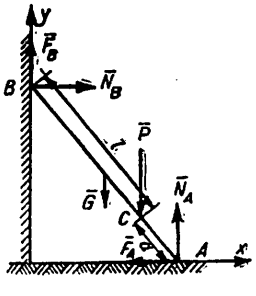


Fig. 4.30.

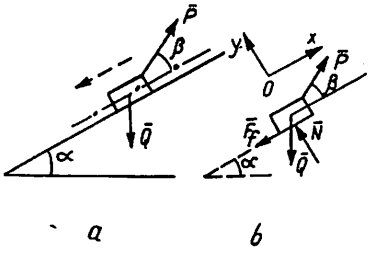
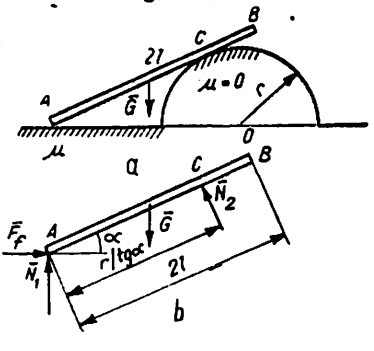


Fig. 4.31.



vertical al cercului (fig. 4.32, *a*). Să se determine poziția de echilibru a barei AB, definită de unghiul α (fig. 4.32, *b*).

Răspuns.

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{4l^2-R^2}}{l\sqrt{3}}.$$

4.27. Bara omogenă $AB=2l$, de greutate $\overline{G}$ (fig. 4.33), are capătul A simplu rezemat cu frecare (μ) pe planul orizontal, iar capătul B este prins cu un fir trecut peste un scripete fix ideal. De cealaltă extremitate a firului este fixată greutatea $\overline{Q}$. Să se afle valoarea maximă a acestei greutăți, cunoscînd unghiul α dintre bară și orizontală.

Răspuns.

$$Q = P\frac{\sqrt{\mu^2+(1+2\mu\operatorname{tg}\alpha)^2}}{2(1+\mu\operatorname{tg}\alpha)}.$$

Fig. 4.32.

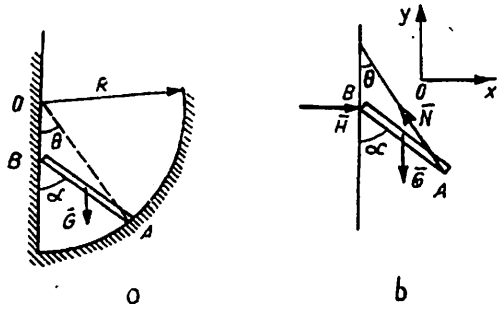
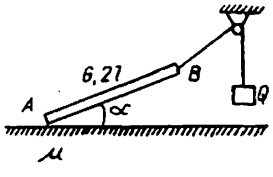


Fig. 4.33.



Capitolul 5

STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

Prin sisteme de corpuri se înțeleg două sau mai multe corpuri care interacționează, fie prin contact direct, fie la distanță. Acționarea la distanță, potrivit legii de atracție universală stabilită de Newton, poate fi pusă în evidență numai la corpuri de masă foarte mare.

Forțele care acționează sistemele de corpuri pot fi grupate în *forțe exterioare*, care reprezintă acțiunea unor corpuri exterioare sistemului considerat și *forțe interioare*, datorită interacțiunii dintre corpurile sistemului, forțe care se echilibrează reciproc.

Legăturile dintre corpuri se pot de asemenea grupa în *forțe de legătură exterioare* și *forțe de legătură interioare*. Corpurile pot fi *simplu rezemate, articulate, încastrate,* iar ca mijloc de realizare a anumitor legături pot fi folosite firele, arcurile etc.

La rezolvarea problemelor de echilibru a sistemelor de corpuri se poate folosi fie *metoda solidificării*, fie *metoda izolării corpului (părților)*.

Prin *metoda izolării corpului* (părților), se izolează fiecare corp în parte și se scriu ecuațiile de echilibru.

Metoda solidificării admite că un sistem de corpuri, aflat în echilibru sub acțiunea unor forțe exterioare și de legătură, poate fi considerat ca un singur corp, obținut prin solidificarea sistemului.

Teorema solidificării, aplicată întregului sistem, permite determinarea directă a unora dintre reacțiunile exterioare, iar teorema echilibrului părților dă posibilitatea determinării directe a unor anumite reacțiuni interioare.

Problemele staticii sistemelor de corpuri și metodica rezolvării problemelor este analoagă cu acelea ale staticii punctului și a rigidului:

— se izolează corpurile sau părți ale sistemului de corpuri prin îndepărtarea legăturilor interioare și exterioare și înlocuirea lor cu elementele mecanice corespunzătoare. La înlocuirea forțelor interioare trebuie dat atenție asupra faptului că forțele interioare sînt perechi, egale două cîte două și direct opuse.

— se scriu ecuațiile de echilibru ale diferitelor părți sau corpuri ale sistemului, prin introducerea tuturor forțelor ce acționează asupra acestuia (forțe exte-

rioare, de legătură, de frecare), iar prin rezolvarea ecuațiilor se determină, fie pozițiile de echilibru, fie forțele de legătură interioare sau exterioare. În situația în care numărul ecuațiilor este egal cu al necunoscutelor, sistemul de corpuri este static determinat.

B. PROBLEME REZOLVATE

5.1. Un cadru, articulat în O, C și O_1, este acționat în A de o sarcină orizontală $\overline{P}$ (fig. 5.1). Să se determine reacțiunile din articulații.

Rezolvare. Izolînd cele două părți ale cadrului, se pot scrie șase ecuații de echilibru:

	Corpul OAC	*Corpul CBO*$_1$
(ΣX);	$P-H_C-H_0=0$;	$H_C-H_1=0$
(ΣY);	$V_C-V_0=0$;	$V_1-V_C=0$
(ΣM_C);	$-H_0 2h+V_0 a=0$;	$V_1 b-H_1 h=0$

Din relațiile precedente se obțin reacțiunile din articulații.

$$X_A=\frac{a}{a+2b}P;\quad X_B=X_C=\frac{2b}{a+2b}P;\quad Y_A=Y_B=Y_C=\frac{2h}{a+2b}P.$$

5.2. Un cadru avînd forma unui semicerc, articulat în A, B și C, suportă sarcina $\overline{P_1}$ verticală și $\overline{P_2}$ orizontală (fig. 5.2). Neglijînd greutatea proprie, să se determine grafic reacțiunile din articulațiile A și B.

Rezolvare. Fiecare arc din grindă fiind încărcat, pentru determinarea reacțiunilor din A și B, se va folosi principiul suprapunerii efectelor. Se consideră încărcat numai arcul AC cu forța $\overline{P_1}$. Se determină pe cale grafică reacțiunile $\overline{A_1}$ și $\overline{B_1}$. Considerînd mai departe, încărcat numai arcul BC cu forța $\overline{P_2}$, se obțin reacțiunile $\overline{A_2}$ și $\overline{B_2}$. Însumînd vectorial reacțiunile astfel găsite, se determină reacțiunile $\overline{A}$ și $\overline{B}$ (fig. 5.3).

5.3. Un acoperiș arcuit (fig. 5.4). articulat în A, B și C, suportă sarcinile concentrate $\overline{P_1}$ și $\overline{P_2}=2\overline{P_1}$. Neglijînd greutatea proprie, să se calculeze reacțiunile din articulațiile A și B.

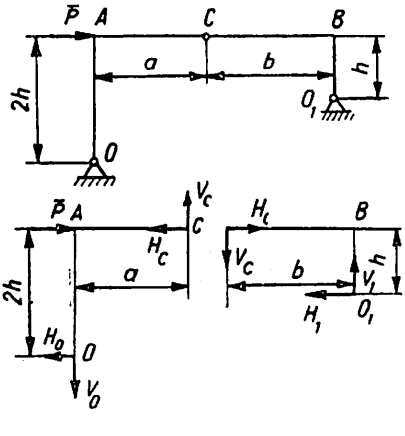


Fig. 5.2.

Rezolvare. Metoda grafică. Cu ajutorul poligonului forțelor și poligonului funicular, se determină rezultanta $\overline{R}$ a forțelor $\overline{P_1}$ și $\overline{P_2}$. Porțiunea din dreapta acoperișului nefiind încărcată, direcția reacțiunii din articulația B va trece prin articulația C (fig. 5.5). Această direcție întretaie direcția rezul-

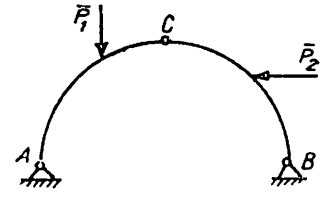


Fig. 5.1.

tantei R în E. Prin acest punct va trece și direcția reacțiunii din articulația A. Cunoscînd direcțiile reacțiunilor, mărimile lor se determină din poligonul forțelor.

Descompunînd cadrul dat în două părți, din ecuațiile de echilibru ale forțelor care acționează asupra fiecărui corp în parte, se obțin reacțiunile:

$$X_A = X_B = \frac{(P_1+P_2)\,l - (P_1a+P_2b)}{2h};$$

$$Y_{A,\,B} = \frac{P_1+P_2}{2} \pm \frac{P_1a+P_2b}{2}.$$

5.6. Un cadru articulat în A, B și C are forma și dimensiunile din figura 5.6. Știind că porțiunea CD suportă o sarcină uniform repartizată p pentru unitatea de lungime, iar în D o forță orizontală $\overline{P}$, să se determine reacțiunile din articulațiile A și B.

Rezolvare. Metoda grafică. Porțiunea de cadru CDB este susținută de articulația B și de bara AC. Reacțiunea $\overline{R}_A$ din A va lua direcția barei AC, deoarece asupra barei nu acționează vreo forță exterioară. Din poligonul forțe-

Fig. 5.3.

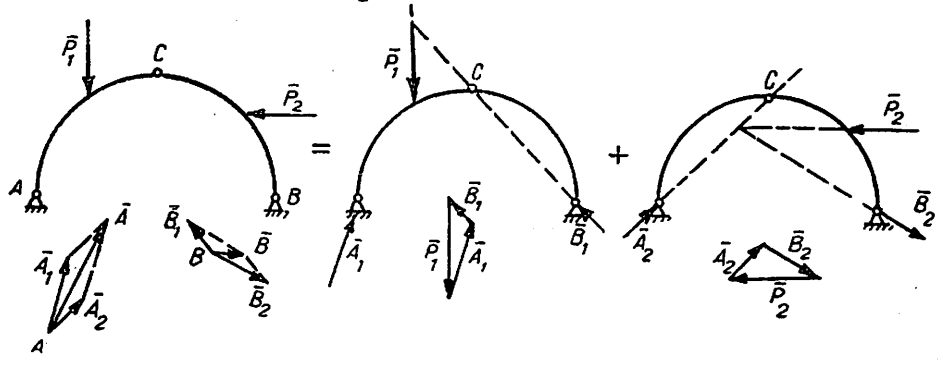


Fig. 5.5.

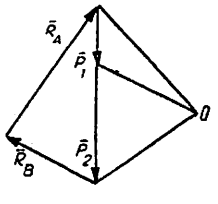
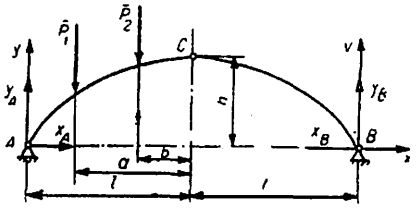


Fig. 5.4.



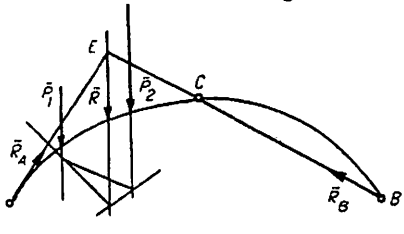
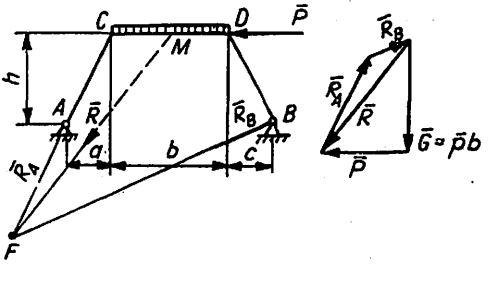


Fig. 5.6.



lor se determină rezultanta $\overline{R}$ în mărime și direcție, care va avea punctul de aplicație în M, mijlocul barei CD. Cadrul fiind în echilibru, rezultanta $\overline{R}$ și cele două reacțiuni $\overline{R_A}$ și $\overline{R_B}$ trebuie să fie concurente. Unind punctul E cu B se obține direcția reacțiunii $\overline{R_B}$. Din poligonul forțelor se găsesc mărimile reacțiunilor.

Metoda analitică. Descompunînd cadrul dat în două părți, bara AC și cadrul CDB, ecuațiile de echilibru ale fiecărei părți sînt respectiv:

$$(\Sigma X);\quad X_A - X_C = 0;\quad X_C - P + X_B = 0$$
$$(\Sigma Y);\quad Y_A - Y_C = 0;\quad -Y_B + Y_C - G = 0$$
$$(\Sigma M_C);\quad Y_A a - X_A h = 0;\quad X_B(b+c) - X_B h + G\frac{b}{2} = 0,$$

din care se deduc reacțiunile:

$$X_A = X_C = \frac{Ph + G\left(c + \frac{b}{2}\right)}{\frac{h}{a}(b+c)+h};\quad X_B = \frac{P\frac{b}{a}(b+c) - G\left(c+\frac{b}{2}\right)}{\frac{b}{a}(b+c)+h};$$
$$Y_A = \frac{h}{a}X_A = Y_C = S + Y_B.$$

5.5. Sistemul mecanic din figura 5.7, format din bare articulate, este compus din barele $OA = AB = l$, de greutăți neglijabile. În repaos barele sînt coliniare, iar capătul B este fixat de punctul fix C, prin intermediul unui arc de constantă elastică K, poziție în care arcul are lungimea a (fig. 5.7).

Sub acțiunea sarcinii $\overline{Q}$, fixată în A, sistemul mecanic se deformează, arcul se lungește, iar capătul B al barei AB se poate deplasa cu frecare neglijabilă, pe orizontală, cu ajutorul unei role mici.

Se cere să se afle unghiul θ, mai mic decît 90°, ce definește poziția de echilibru și reacțiunile din O, A, B.

Aplicație. $l = 0{,}4$ m; $Q = 4{,}8$ N; $k = 30\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$;

Rezolvare. Sub acțiunea forței $\overline{Q}$ arcul se lungește cu

$$x = 2l(1 - \cos\theta)$$

și ca urmare forța F din arc este:

$$F = kx = 2kl(1 - \cos\theta).$$

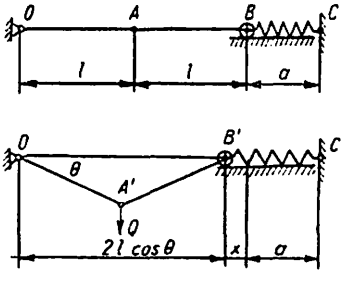


Fig. 5.7.

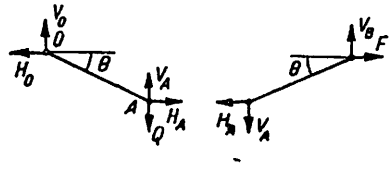


Fig. 5.8.

Introducînd reacțiunile (H_0, V_0) din articulația O, (H_A, V_A) din articulația A și reacțiunea V_B din B, (fig. 5.8) izolînd barele și scriind condițiile de echilibru, se obțin ecuațiile:

bara OA	*bara AB*
(ΣX); $-H_0+H_A=0$;	(ΣX); $-H_A+F=0$;
(ΣY); $V_0-Q+V_A=0$;	(ΣY); $V_B-V_A=0$;
(ΣM_0); $(V_A-Q)\,l\cos\theta+H_A\,l\sin\theta=0$;	(ΣM_A); $V_B\cdot l\cos\theta-Fl\sin\theta=0$,

din care se deduce ecuația ce definește poziția de echilibru

$$\operatorname{tg}\theta-\sin\theta=\frac{Q}{4k}.$$

și reacțiunile cerute:

$$H_0=H_A=2kl\,(1-\cos\theta);\quad V_B=V_A=2kl\,(1-\cos\theta)\operatorname{tg}\theta;$$

$$V_0=Q-2kl\,(1-\cos\theta)\operatorname{tg}\theta.$$

Pentru aplicația numerică, ecuația de echilibru devine

$$\operatorname{tg}\theta-\sin\theta=\frac{1}{10}$$

cu soluția $\theta=32°35'$

Reacțiunile sînt $H_0=H_A=2kl\,(1-\cos\theta)=36{,}4$ N; $V_0=V_B=V_A=\frac{Q}{2}=2{,}4$N.

5.6. Un laminor este format din doi cilindri, avînd diametrul $2r$, care se învîrtesc în sens opus (fig. 5.9). Distanța dintre cilindri fiind a, iar coeficientul de frecare dintre corpul de laminat și cilindri fiind μ, se cere:

a) să se arăte că, pentru a fi posibilă apucarea corpului de laminat, unghiul de frecare trebuie să fie mai mare decît unghiul la centru α;

b) să se determine grosimea maximă d a corpului care poate fi laminat.

Aplicație: $2r=0{,}6$ m; $a=0{,}5$ cm; $\mu=0{,}1$ (fontă la roșu).

Rezolvare. a) În momentul prinderii tablei între cilindri, asupra tablei lucrează următoarele forțe:

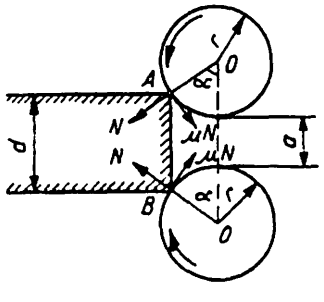
— reacțiunile normale din partea valțurilor $\overline{N}$;

— forțele de frecare tangente la cilindri $\mu|\overline{N}|$.

În timp ce componenta orizontală a forței de frecare trage tabla între cilindri, componenta orizontală a reacțiunii normale se opune mișcării. Deci, pentru a fi posibilă apucarea tablei între valțurile laminorului, trebuie ca:

$$2N\sin\alpha\leqslant 2\mu N\cos\alpha,$$

Fig. 5.9.



de unde

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi\,; \quad \alpha \leqslant \varphi$$

b) Grosimea maximă care poate fi laminată este dată de baza mică a trapezului $OO'BA$. Proiectînd pe verticală conturul trapezului, se obţine:

$$d = a + 2r\,(1 - \cos\alpha)$$

şi cum

$$\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi,$$

rezultă:

$$d \leqslant a + 2r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right); \quad d \leqslant 1{,}1 \text{ cm}.$$

5.7. Să se determine mărimea forţei $\overline{P}$ cu care trebuie acţionată pana A, de greutate neglijabilă, pentru a ridica blocul B, de greutate $\overline{Q}$, pe planele înclinate din figura 5.10, *a*, mişcarea efectuîndu-se cu frecare.

Rezolvare. Izolînd corpurile (fig. 5.10, *b*), introducînd forţele de legătură şi scriind ecuaţiile de echilibru, la limită se obţin pentru P valoarea:

$$P = \frac{(\cos\beta + \mu_3 \sin\beta)\cdot[(1-\mu_1\mu_2)\sin\alpha + (\mu_1+\mu_2)\cos\alpha]}{(\mu_2+\mu_3)\sin(\beta-\alpha) + (1-\mu_2\mu_3)\cos(\beta-\alpha)}\,Q.$$

5.8. Să se determine forţa P ce acţionează în lungul planului α, necesară să deplaseze cu frecare, μ, corpurile A şi B de greutăţi G_1 şi G_2 pe planul înclinat. Există şi frecare în articulaţia O a scripetelui de rază r. S-a notat cu μ' coeficientul de frecare şi cu ρ raza fusului (fig.5.11, *a*).

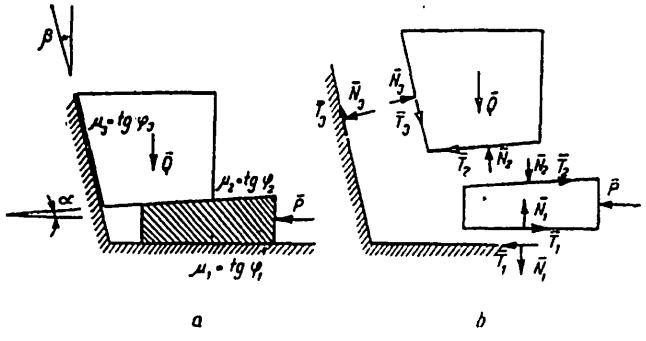
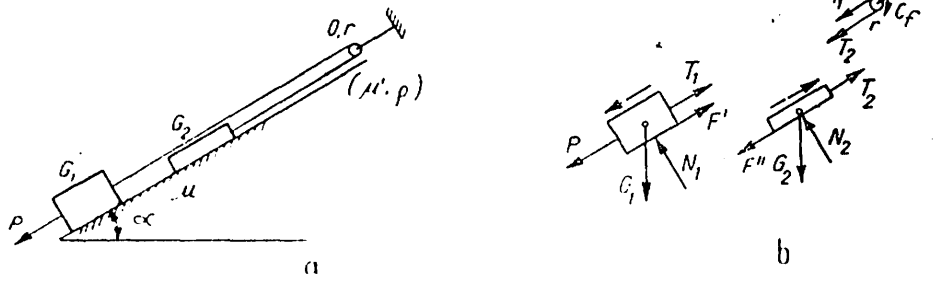


Fig. 5.10.

Fig. 5.11.



Rezolvare. Izolînd corpurile (fig. 5.11, *b*) avem condiţiile de echilibru:

a) pentru corpul G_1

$$(1)\qquad \begin{aligned} -P-G_1\sin\alpha+T_1+F'&=0\\ N_1-G_1\cos\alpha&=0\\ F'&\leqslant\mu N_1. \end{aligned}$$

b) pentru scripete:

$$(2)\qquad \begin{aligned} -T_1-T_2+T&=0\\ T_1r-T_2r-C_f&=0\\ C_f&\leqslant\mu'\rho T \end{aligned}$$

c) pentru corpul G_2:

$$(3)\qquad \begin{aligned} -F''-G_2\sin\alpha+T_2&=0\\ N_2-G_2\cos\alpha&=0\\ F''&<\mu N_2. \end{aligned}$$

Din ecuaţiile precedente rezultă

$$P\geqslant(kG_2-G_1)\sin\alpha+(kG_2+G_1)\mu\cos\alpha,$$

unde s-a notat

$$k=\frac{r+\mu'\rho}{r-\mu'\rho}.$$

5.9. Să se studieze care dintre cele trei frîne cu saboţi este mai avantajoasă, cuplul motor C_m şi coeficientul de frecare între roată şi sabot fiind acelaşi (fig. 5.12, *a*).

Rezolvare. Problema se reduce la determinarea forţelor F_1, F_2 şi F_3 în cele trei cazuri.

Pentru prima frînă, separînd corpurile, se va studia pe rînd echilibrul roţii O_1 şi al pîrghiei cu sabot (fig. 5.12, *b*).

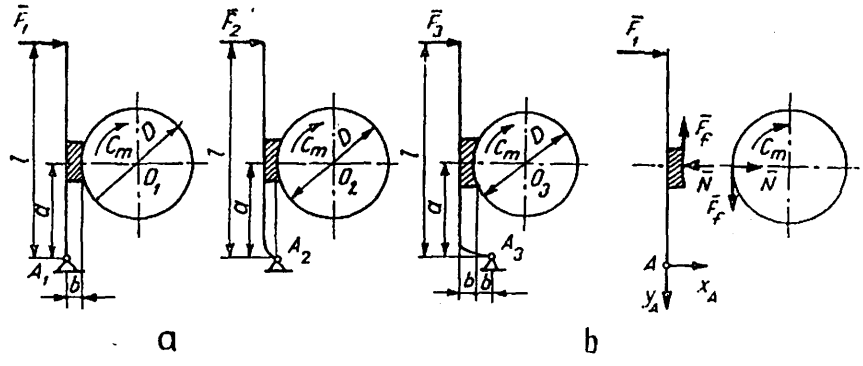


Fig. 5.12.

a) Roata. Pentru ca roata să fie frînată trebuie ca momentul dat de forța de frecare $\overline{F_f}$ să anuleze cuplul motor C_m. Este deci suficient ca dintre cele trei ecuații de echilibru să se scrie numai ecuația de momente:

$$F_f \frac{D}{2} = C_m, \text{ de unde: } F_f = \frac{2C_m}{D}. \tag{1}$$

b) Pîrghia cu sabot. Ecuațiile de echilibru ale forțelor care acționează asupra pîrghiei sînt:

$$(\Sigma X);\quad X_A + F_1 - N = 0;$$

$$(\Sigma Y);\quad F_f - Y_A = 0;$$

$$(\Sigma M_{A_1}\overline{F});\quad F_f b + Na - F_1 \cdot l = 0.$$

Cum însă la limită $F_f = \mu N$ și ținînd seamă de relația (1), se obține:

$$F_1 = \frac{2C_m}{D \cdot l}\left(\frac{a}{\mu} + b\right). \tag{2}$$

Dacă roata se învîrtește în sens invers, se obține:

$$F_1 = \frac{2 \cdot C_m}{D\,l}\left(\frac{a}{\mu} - b\right). \tag{3}$$

Procedînd analog, se pot calcula forțelor $|\overline{F_2}|$ și $|\overline{F_3}|$;

$$F_2 = \frac{2C_m}{D \cdot l}\frac{a}{\mu} \text{ și } F_3 = \frac{2C_m}{D\,l}\left(\frac{a}{\mu} \mp b\right).$$

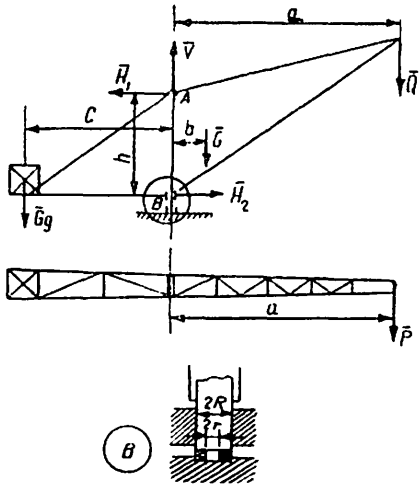
Din examinarea rezultatelor, se deduce:

— pentru rotația în ambele sensuri, soluția (2) este cea mai avantajoasă;

— pentru rotația în sensul acelor unui ceasornic, soluția (3) este cea mai avantajoasă;

— În cazul rotirii în sens invers, este de preferat soluția (1).

Fig. 5.13.



5.10. Se dă macaraua din figura 5.13, care se poate roti în jurul unei coloane verticale. Să se determine forța orizontală P, necesară rotirii macaralei în jurul pivotului, știind că:

$Q=20$ kN; $G=15$ kN; $G_g=25$ kN.

$a=6$ m; $b=0{,}5$ m; $c=3$ m; $h=3{,}5$ m;

$2R=24$ cm; $2r=10$ cm; $\mu=0{,}15$.

Rezolvare. Momentul activ $P \cdot a$ va trebui să fie mai mare sau cel mult egal cu momentul rezistent, dat de suma momentelor forțelor de frecare. În cazul de față, există frecare de

pivotare la partea inferioară a coloanei verticale și frecare de alunecare în palierele A și B. Ecuația de momente, la limita echilibrului, este:

$$P \cdot a = \frac{2}{3} V\mu \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} + \mu H_1 R + \mu H_2 R. \qquad (1)$$

Din ecuația de proiecții se obține:

$$H_1 = H_2;$$

$$V = Q + G + G_g = 60 \text{ kN}.$$

iar din ecuația de momente:

$$H_1 = H_2 = \frac{Qa + Gb - G_g c}{h} = 15 \text{ kN}.$$

Introducînd în relația (1), se obține:

$$P = 0{,}22\,36 \text{ kN}.$$

Observație. În cazul cînd R și r au valori apropiate, pentru ușurința calculului se poate întrebuința o relație aproximativă pentru frecarea de pivotare,

$$\frac{2}{3} V\mu \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \approx V\mu \frac{R + r}{2}. \qquad (2)$$

Dacă s-ar fi utilizat relația (2), valoarea momentului de frecare de pivotare ar fi fost 76,50 kN cm, față de 80,15 kN cm, iar diferența între valorile lui P ar fi fost de 5,6 N.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

5.11. Blocul A de greutate $\overline{P}$, prins cu un fir orizontal CD, stă rezemat cu frecare pe corpul B, de greutate Q, care este simplu rezemat pe planul înclinat α (fig. 5.14, *a*). Să se determine forța $\overline{F}$, paralelă cu planul înclinat, necesară să deplaseze corpul B.

Răspuns. Izolînd corpurile (fig. 5.14, *b*) se pot scrie condițiile de echilibru pentru corpul A:

$$-P \sin\alpha + T\cos\alpha - F_2 = 0$$

$$N_2 - P\cos\alpha - T\sin\alpha = 0$$

$$F_2 \leqslant \mu N_2,$$

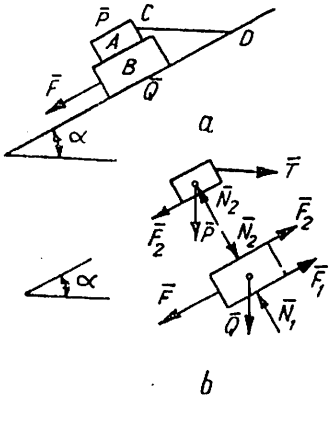


Fig. 5.14.

iar pentru corpul B

$$-F+F_1+F_2-Q\sin\alpha=0$$

$$N_1-N_2-Q\cos\alpha=0$$

$$F_1 \leqslant \mu N_1$$

din care se deduc necunoscutele F, N_1, N_2, T.

5.12. Pentru a scoate un cui, se foloseşte un cleşte (fig. 5.15) care trage axial cu forţa $2\overline{F}$. Coeficientul de frecare dintre cleşte şi cui fiind μ, să se determine forţa $\overline{P}$ care trebuie aplicată braţelor cleştelui pentru ca acesta să nu alunece în lungul cuiului, precum şi reacţiunea dintre cleşte şi cui.

Răspuns. (fig. 5.16). $P=\dfrac{a-\mu(c+d)}{\mu b}F$ şi $N=\dfrac{F}{\mu}$.

5.13. Doi cilindri, de raze R_1 şi R_2 şi greutăţi G_1 şi G_2, se sprijină cu frecare între ei şi pe un plan orizontal şi vertical ca în figura 5.17. Coeficienţii de frecare la alunecare fiind μ, μ_1, μ_2, să se determine valorile minime ale acestor coeficienţi astfel încît sistemul să se găsească în echilibru la limită.

Răspuns. $\mu=\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

$$\mu_1=\frac{G_2\cos\alpha}{G_1(1+\sin\alpha+\cos\alpha)+G_2(1+\sin\alpha)};$$

$$\mu_2=1.$$

5.14. Să se determine cuplul motor C_m, necesar ridicării cu frecare a sarcinilor Q_1 şi Q_2 pe planele înclinate α şi β, ţinînd seama şi de frecarea din axul troliului care are raza fusului ρ şi coeficientul de frecare μ (fig. 5.18).

Indicaţie şi răspuns. Tensiunile din fire sînt

$$T_1=Q_1(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha) \quad \text{şi} \quad T_2=Q_2(\sin\beta+\mu_2\cos\beta).$$

Fig. 5.15.

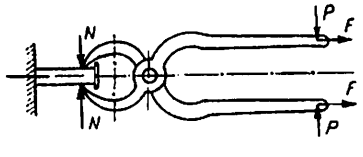


Fig. 5.16.

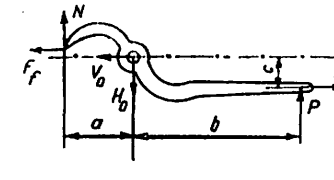


Fig. 5.17.

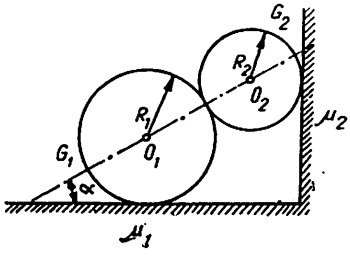
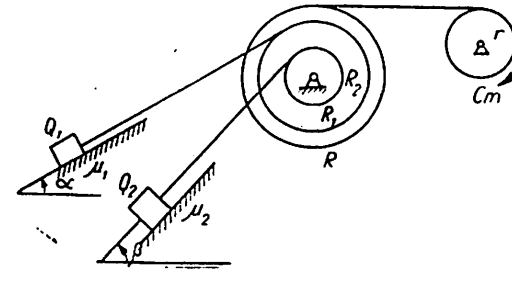


Fig. 5.18.



Din condițiile de echilibru ale troliului se află:

$$H_0=T_1\cos\alpha+T_2\cos\beta-T;\quad V_0=T_1\sin\alpha+T_2\sin\beta;$$

$$N=\sqrt{H_0^2+V_0^2};\quad TR-T_2R_2-T_1R_1-\mu N\rho=0,$$

de unde rezultă o ecuație de gradul doi în T. Rezolvarea mai poate fi făcută și prin aproximații succesive. Neglijînd pentru un moment frecarea în *ax*, din ecuația de momente se obține o primă valoare a tensiunii T care, introdusă în expresia din H_0, permite aflarea lui N, deci frecarea în ax $\mu N\rho$. Apoi o a doua aproximație pentru T_0. Dacă nu se ține seama de frecarea în ax, rezultă:

$$C_m=Tr=\frac{r}{R}\left[Q_1R_1(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)+Q_2R_2(\sin\beta+\mu_2\cos\beta)\right].$$

5.15. Un pod boltit, articulat în A, B și C, suportă o sarcină uniform distribuită p. Să se calculeze reacțiunile din A și B (fig. 5.19).

Răspuns. $X_A=X_B=\frac{pl_1\cdot l_2}{2h}$; $Y_A=Y_B=\frac{p(l_1+l_2)}{2}$

5.16. Un cadru plan, articulat în A, B și C, este acționat în D de forța orizontală P (fig. 5.20). Să se determine reacțiunile din A și B.

Indicație și răspuns. Izolînd barele (fig. 5.20) și scriind cîte trei ecuații de echilibru pentru fiecare bară, se obțin componentele reacțiunilor din articulații:

$$X_A=\frac{ah_2}{bh_1+ah_2}P;\quad X_C=\frac{bh_1}{bh_1+ah_2}P;$$

$$Y_A=Y_B=Y_C=\frac{h_1h_2}{bh_1+ah_2}P.$$

5.17. Pe o bară AB, care se poate roti în jurul articulației O, se reazemă în C o a doua bară, articulată în D (fig. 5.21). Știind că greutatea barei CD este G, iar $OC=a$, să se determine distanța x la care trebuie plasată o greutate P pentru a menține sistemul în echilibru.

Răspuns. $x=\frac{a}{2}\cdot\frac{G}{P}$.

5.18. Dispozitivul de presare al valțurilor superioare ale unui laminor de bumbac se compune dintr-o bară superioară AB și o pîrghie OE,

Fig. 5.19.

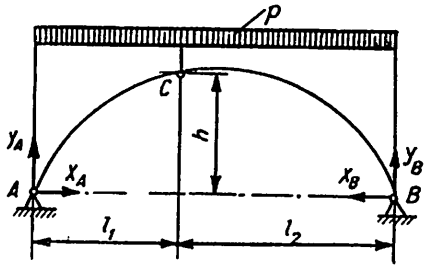


Fig. 5.20.

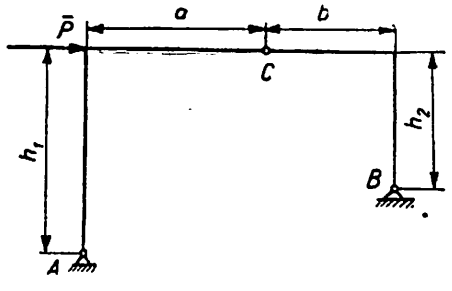
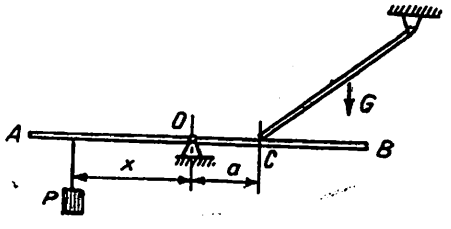


Fig. 5.21.



articulată în O. Bara și pîrghia sînt legate prin bara CD, rigidă în C, care formează cu direcția OE unghiul α (fig. 5.22). Știind că la capătul E al pîrghiei atîrnă o greutate Q, să se determine apăsările exercitate în A și B asupra axelor valțurilor superioare. Se neglijează frecarea în articulația O. Se neglijează greutatea proprie a barelor.

Răspuns.

$$F_A=\frac{c}{c+d}\cdot\frac{b}{a\sin\alpha}Q;\qquad F_B=\frac{d}{c+d}\cdot\frac{b}{a\sin\alpha}Q.$$

5.19. Ce forță este necesară pentru a ridica sarcina Q, cu ajutorul unui scripete diferențial (fig. 5.23), cunoscînd R, r, k coeficientul de influență a frecării scripetelui.

Răspuns. $P=Q\frac{k^2-\frac{r}{R}}{1+k}$. În cazul unui scripete cu frecări neglijabile $k=1$ și $P=Q\frac{R-r}{2R}$.

5.20. Cu ajutorul unui cric se ridică o sarcină Q (fig. 5.24). Diametrul șurubului este $2r$, înclinarea filetului α, coeficientul de frecare dintre șurub și suport μ. Să se determine forța P, normală pe pîrghia de lungime a, care produce ridicarea sarcinii.

Indicație și răspuns. $P=Q\frac{r}{a}\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)$,

unde $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\mu$.

5.21. Să se determine forța $\overline{P}$ necesară ridicării sarcinii $\overline{Q}$ cu ajutorul troliului diferențial (fig. 5.25). Care este raportul dintre deplasările forțelor $\overline{P}$ și $\overline{Q}$, neglijînd frecările ?

Răspuns. $P=\frac{r_2-r_1}{2R}Q$, raportul deplasărilor $\rho=\frac{2R}{r_2-r_1}$, unde r_1, r_2, R sînt razele troliului.

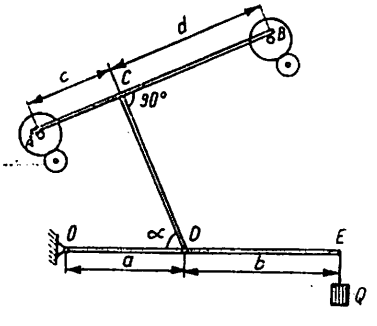


Fig. 5.22.

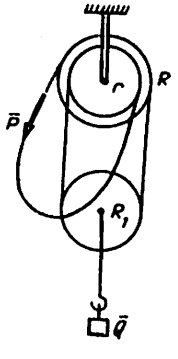


Fig. 5.23.

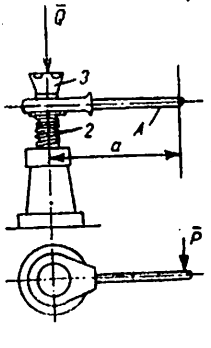


Fig. 5.24.

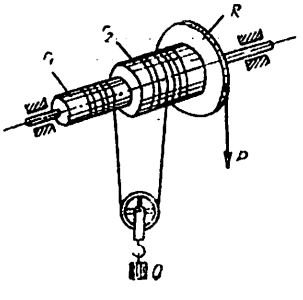


Fig. 5.25.

5.22. Să se determine forța $\overline{P}$ necesară ridicării sarcinii $\overline{Q}$ cu sistemul de scripete (palan) din figura 5.26, unde k este coeficientul ce cuprinde influența frecării scripetelui.

Răspuns. $P=Q\frac{k^5(k-1)}{k^5-1}$.

5.23. Două bare aflate într-un plan vertical $OA=l_1$ și $AB=l_2$ omogene, de greutăți $\overline{P}_1$ și $\overline{P}_2$, sînt articulate, prima în punctul fix O și a doua de cea dintîi în A (fig. 5.27). În A și B fiind aplicate două forțe orizontale $\overline{Q}_1$ și $\overline{Q}_2$, să se calculeze unghiurile α și β ale direcțiilor barelor cu verticala Oy.

Răspuns. $\operatorname{tg}\alpha=2\frac{Q_1+Q_2}{P_1+2P_2}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{2Q_2}{P_2}$.

5.24. Pentru sfărîmarea unor materiale se folosesc diferite dispozitive, așa cum se arată în figura 5.28. În figura 5.28, *a* valțurile O_1 și O_2 se rotesc în sensul săgeților;

în figura 5.28, *b* roata se rostogolește pe planul orizontal;

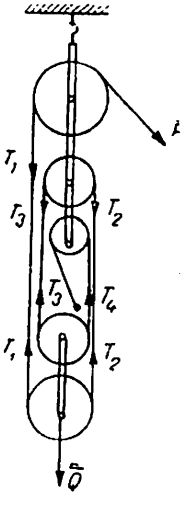
în figura 5.28, *c*, planul înclinat AB este fix, iar planul OC se poate roti cu ajutorul unui mecanism în jurul articulației O.

Se cere să se afle condiția ca materialul asimilat unei sfere să poată fi prins în dispozitiv.

Indicație și răspuns. Procedînd în mod analog ca în problema 5.6, se ajunge la condiția $\alpha\leqslant\varphi$, unde φ este unghiul de frecare iar 2α unghiul marcat pe figurile respective.

5.25. O bară AB omogenă, de greutate G, se află în echilibru în poziție orizontală, fiind prinsă la capete printr-un fir trecut peste doi cilindri ficși (fig. 5.29). Coeficientul de frecare al firului pe cilindri fiind μ, se cere să se determine dis-

Fig. 5.26.



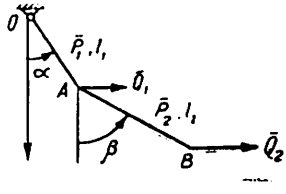


Fig. 5.27.

Fig. 5.28.

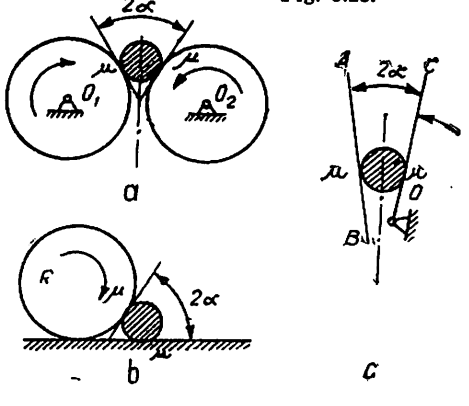
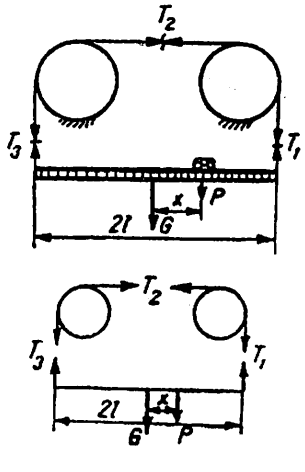


Fig. 5.29.



tanța x la care trebuie așezată pe bară greutatea P, cunoscută, față de mijlocul barei pentru a menține echilibrul.

Rezolvare. Izolînd bara, se pot scrie următoarele condiții de echilibru

$$(\Sigma Y);\quad T_1+T_3-G-P=0 \tag{1}$$

$$(\Sigma M_A);\quad Gl+P(l+x)-T_1 2l=0 \tag{2}$$

Ținînd seama de relațiile lui Euler (cap. 7):

$$T_1=T_2\cdot e^{\mu\frac{\pi}{2}} \quad \text{și} \quad T_2=T_3 e^{\mu\frac{\pi}{2}}$$

rezultă

$$T_1=T_3 e^{\mu\pi}. \tag{3}$$

Din relațiile (1); (2); (3) rezultă

$$x=l\frac{e^{\mu\pi}-1}{e^{\mu\pi}+1}\cdot\frac{G+P}{P}.$$

5.26. Sistemul mecanic din figura 5.30 este format din barele omogene OA și AB articulate în O și A, avînd fiecare lungimea l iar greutatea q pe unitatea de lungime. Punctele O și B sînt prinse cu un arc de constanta elastică k. Sub acțiunea greutății barelor, arcul are lungimea $OB_0=h$. Fixînd în A greutatea P, capătul B al barei, alunecă pe planul vertical pînă ocupă o poziție de echilibru definită de unghiul θ.

Să se determine reacțiunea (H_0, V_0) din articulația O și reacțiunea N_B din reazemul B.

Indicație și răspuns. Ținînd seamă că forța din arc este $F=k(2l\sin\theta-h)$, din condițiile de echilibru se obține:

$$\sin\theta=\frac{P+2kh+2kl}{4kl};\quad V_0=P+2ql;\quad N_B=\frac{P+ql}{2}\operatorname{ctg}\theta.$$

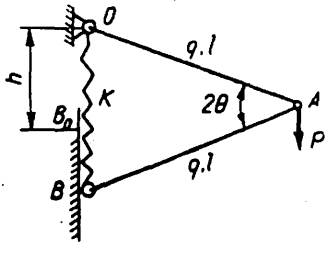


Fig. 5.30.

Capitolul 6

SISTEME DE BARE ARTICULATE

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Sistemele de bare articulate** sînt sisteme mecanice formate din bare care îndeplinesc anumite condiții: barele sînt *rectilinii*, prinderea lor se face numai la capete prin *articulații*, construcția este *nedeformabilă*, iar forțele exterioare și de legătură acționează construcția numai în capetele barelor, denumite *noduri* (fig. 6.1). (De exemplu, grinzi cu zăbrele, ferme de acoperișuri etc.).

Dacă totalitatea barelor se află în același plan, sistemul este *plan*, iar dacă nu, sistemul formează o construcție *în spațiu*. La un asemenea sistem, barele sînt supuse fie la eforturi de tensiune, fie la eforturi de compresiune.

2. Dacă se notează cu n numărul nodurilor și cu b numărul barelor, *condiția necesară*, dar nu suficientă, ca un sistem de bare articulate să fie *static determinat*, este:

— pentru sisteme articulate plane:

$$b=2n-3;$$

— pentru sisteme articulate în spațiu:

$$b=3n-6.$$

3. **Legăturile sistemelor articulate** plane pot fi o *simplă rezemare* și o *articulație*, deci reacțiunile care iau naștere se determină prin maximum trei necunoscute.

4. **Calculul static** al unui sistem articulat are două părți:

— determinarea echilibrului forțelor exterioare ce acționează asupra grinzii;

— determinarea eforturilor în barele sistemului.

Echilibrul forțelor exterioare al sistemului de forțe se determină așa cum se determină echilibrul oricărui

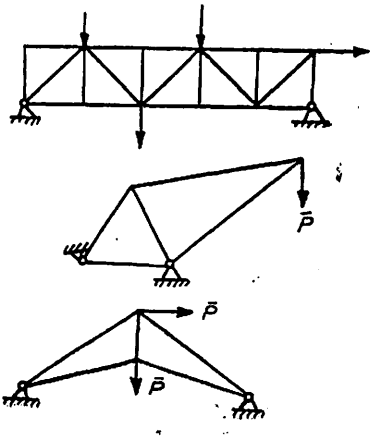


Fig. 6.1.

sistem de forţe ce acţionează asupra unui sistem nedeformabil, fie analitic, fie grafic prin poligonul forţelor şi poligonul funicular.

Eforturile din bare, care sînt forţele interioare ale sistemului, se determină prin diferite metode, dintre care sînt date mai jos trei dintre cele mai importante : *metoda separării* sau *echilibrului nodurilor*, *metoda grafică* Cremona-Bow şi *metoda secţiunilor*.

Adesea este bine să se determine în prealabil reacţiunile sistemului articulat, considerîndu-l ca pe un solid rigid şi scriind ecuaţiile de echilibru.

5. **Metoda analitică a separării nodurilor.** După determinarea reacţiunilor, se separă fiecare nod în parte, plecînd de la un nod care are cel mult două necunoscute (reacţiuni sau eforturi în bare). Se pleacă de la un astfel de nod deoarece în plan, avînd pentru forţe concurente două ecuaţii de echilibru, se pot afla numai două necunoscute.

În fiecare nod se scriu ecuaţiile de echilibru, pentru toate forţele exterioare (date şi reacţiuni) şi forţele interioare (fig. 6.2).

Pentru determinarea sensului efortului se presupune la început că în toate barele există tensiuni, deci sensul forţei interioare în lungul unei bare este de la nod spre interiorul barei. Dacă din rezolvarea ecuaţiilor de proiecţii se obţin valori *pozitive* există într-adevăr *tensiuni* în bare. Dacă din calcule rezultă în unele bare valori *negative*, în acele bare există *compresiuni*.

Plecînd de la un nod cu două necunoscute, metoda se aplică succesiv tuturor nodurilor, ţinîndu-se seamă că fiecare bară intră în echilibrul a două noduri oarecari *I*, *J* şi că, în lungul întregii bare, solicitarea este aceeaşi $N_{IJ}=N_{JI}$. În ecuaţiile de echilibru ale unui nod oarecare, în care există solicitări cunoscute, dacă solicitările sînt tensiuni, acestea se introduc cu semnul pozitiv, iar dacă sînt compresiuni se introduc cu semnul negativ.

6. **Metoda grafică Cremona-Bow.** Prin metoda Cremona se determină grafic eforturile din bare, pornindu-se tot de la un nod în care există două bare şi descompunînd rezultanta forţelor exterioare din acel nod, după direcţiile barelor. Din aproape în aproape se determină o epură în care :

— *unui nod al construcţiei* îi corespunde un poligon în epură, care are laturile paralele cu forţele sau barele concurente în acel nod ;

— *fiecărei bare a construcţiei* îi corespunde în epură o dreaptă paralelă, care reprezintă mărimea efortului din bara respectivă ;

— *fiecărui vîrf al epurei* îi corespunde în construcţie o suprafaţă mărginită de forţele (exterioare sau interioare barei) care se întîlnesc în punctul respectiv.

Notaţia Bow — care va fi folosită în aplicaţiile ce vor urma — împarte planul construcţiei în zone separate de bare şi

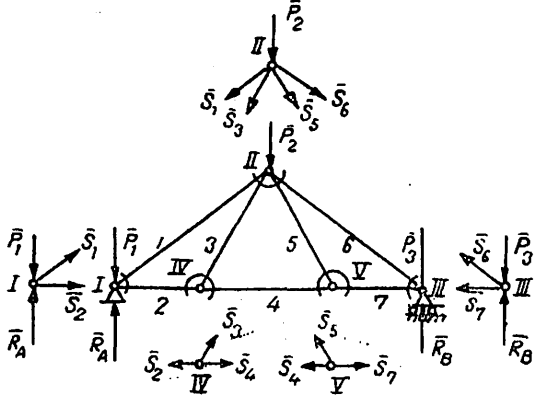


Fig. 6.2.

forţe exterioare. Notaţia zonelor se va face în sensul de rotire al acelor ceasornicului (fig. 6.3).

Prin această notaţie:

— *efortul dintr-o bară* oarecare, o *forţă exterioară* sau *reacţiune*, este definit prin indicarea zonelor pe care le desparte bara, forţa sau reacţiunea.

— *fiecare nod* al sistemului articulat este definit de zonele ce mărginesc acel nod. Precizîndu-se nodul, se precizează imediat în epură poligonul de echilibru corespunzător. Cunoscînd în acest poligon de echilibru sensul unei forţe sau solicitări din bară, se poate determina uşor mărimea şi sensul în celelalte bare.

7. **Metoda secţiunilor.** Metoda secţiunilor se foloseşte cînd trebuie determinat sau verificat efortul într-o bară oarecare, fără a fi nevoie să se construiască întreaga epură, cum cere de pildă metoda Cremona. De asemenea se mai poate folosi cînd construcţiile au mai multe decît două bare şi deci nu se poate începe construcţia epurei Cremona.

După determinarea reacţiunilor, se face o secţiune oarecare prin mai multe bare necunoscute ale sistemului articulat şi se studiază echilibrul uneia dintre părţile secţionate. La secţionarea barelor trebuie dată atenţie ca barele să nu fie concurente şi să nu existe mai mult de trei bare secţionate avînd valori necunoscute.

Pentru aflarea efortului dintr-o bară oarecare secţionată, se ia momentul tuturor forţelor din stînga sau din dreapta secţiunii (forţe exterioare, reacţiuni, eforturi în barele secţionate) în raport cu un punct, astfel încît se poate scrie o ecuaţie cu o singură necunoscută.

Dacă nu este posibil să se scrie o ecuaţie de momente (de exemplu bare paralele), se scrie o ecuaţie de proiecţie.

B. PROBLEME REZOLVATE

6.1. Ferma unui acoperiş are forma şi dimensiunile din figura 6.4. Asupra ei acţionează forţele concentrate în noduri. Să se determine eforturile în bare.

Aplicaţie:

$$a=5\text{ m};\quad P=4\,600\text{ N}.$$

Rezolvare. Deoarece $b=2n-3$ ferma este static determinată.

Datorită simetriei, reacţiunile sînt:

$$R_A=R_B=2P=9\,200\text{ N}.$$

Fig. 6.3.

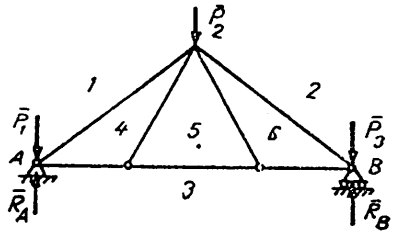
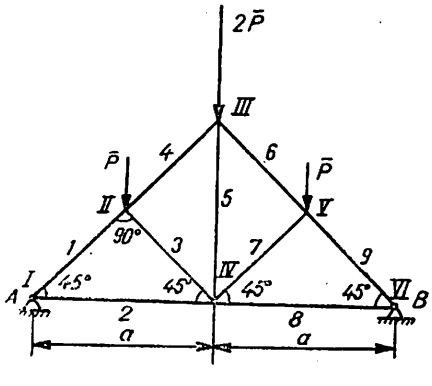


Fig. 6.4.



Metoda echilibrului nodurilor

Nodul *I* (fig. 6.5). Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$S_1 \cos 45° + S_2 = 0; \quad S_1 \sin 45° + R_A = 0,$$

din care se deduce:

$$S_1 = -2\sqrt{2}\,P = -13\,300 \text{ N}; \quad \text{(compresiune)}$$

$$S_2 = 2P = 9\,200 \text{ N}. \quad \text{(tensiune)}$$

Nodul *II* (fig. 6.6). În acest nod există două forțe cunoscute P, S_1 și două forțe necunoscute, eforturile din barele *3* și *4*.

Ecuațiile de echilibru sînt:

$$-S_1 \cos 45° + S_4 \cos 45° + S_3 \cos 45° = 0;$$

$$-S_1 \sin 45° + S_4 \sin 45° - S_3 \sin 45° - P = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$S_4 = -\frac{3}{\sqrt{2}}P = -9\,800 \text{ N}; \quad \text{(compresiune)}$$

$$S_3 = -\frac{2}{\sqrt{2}}P = -3\,260 \text{ N}. \quad \text{(compresiune)}.$$

Nodul *III* (fig. 6.7). În acest nod, eforturile sînt: $2P$, S_4, S_5 și S_6. Ecuațiile de echilibru sînt:

$$-S_4 \cos 45° + S_6 \cos 45° = 0;$$

$$-S_4 \sin 45° - S_6 \sin 45° - 2P - S_5 = 0.$$

Din prima ecuație se obține:

$$S_6 = S_4 = -\frac{3}{\sqrt{2}}P = -9\,800 \text{ N}, \quad \text{(compresiune)}$$

iar din a doua ecuație:

$$S_5 = P = 4\,600 \text{ N}. \quad \text{(tensiune)}$$

Fig. 6.5.

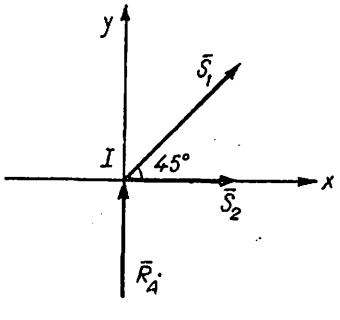


Fig. 6.6.

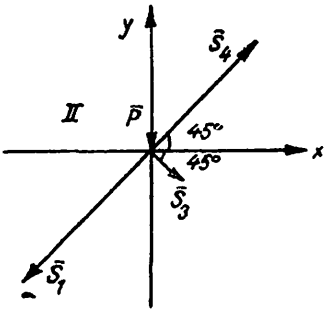
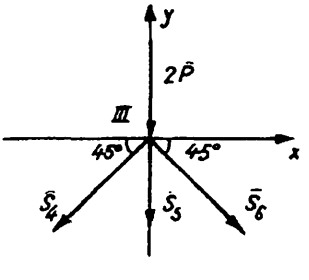


Fig. 6.7.



Datorită simetriei eforturile în restul barelor sînt:

$$S_7=S_3;\ S_8=S_2;\ S_9=S_1.$$

Metoda grafică.

Nodul *I* (fig. 6.8). Fiecărui nod îi va corespunde un poligon de echilibru al forţelor. În cazul nodului *I* poligonul se reduce la un triunghi, fiindcă în nodul acesta nu acţionează decît trei forţe: reacţiunea din *A* (forţă cunoscută) şi eforturile din barele *1* şi *2* (forţe necunoscute).

Alegînd o anumită scară pentru forţe, se poate construi acest triunghi.

Măsurînd pe grafic şi ţinînd seamă de scara aleasă, se obţin mărimile eforturilor S_1 şi S_2. Efortul S_1 fiind dirijat dinspre interiorul barei spre nod, în bară există compresiune, în timp ce forţa S_2 fiind dirijată de la nod spre interiorul barei, efortul este tensiune.

Din triunghiul de echilibru rezultă grafic:

$$S_2=2P \quad \text{şi} \quad S_1=-2P\sqrt{2}.$$

Nodul *II* (fig. 6.9). În acest nod există patru forţe, deci cunoscînd forţa *P* şi efortul de compresiune *S*, se poate construi un patrulater al forţelor.

Pe grafic ţinînd seamă de scara aleasă, se obţin eforturile S_3 şi S_4. Efortul S_3 fiind dirijat de la interiorul barei spre nod, în bară există compresiune, mărimea efortului fiind:

$$S_3=-P\frac{\sqrt{2}}{2},$$

iar

$$S_4=-S_1+P\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{3}{\sqrt{2}}P.$$

Nodul *III* (fig. 6.10). Forţele cunoscute în acest nod sînt $2P$ şi S_4, iar forţele necunoscute sînt S_5 şi S_6. Din poligonul forţelor se deduc ca mărime şi sens eforturile din barele *5* şi *6*. Efortul din bara *6* este compresiune, iar cel din bara *5* este tensiune.

Fig. 6.8.

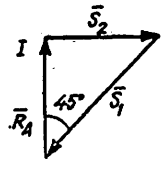


Fig. 6.9.

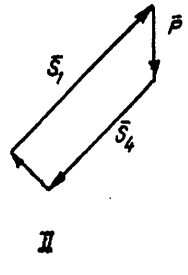
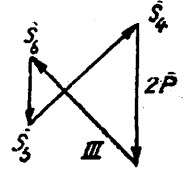


Fig. 6.10.



6.2. Să se determine eforturile în barele sistemului de susţinere a scripetelui din figura 6.11, *a*, în *A* articulaţie şi în *B* rezemare, folosind metoda secţiunilor şi a echilibrului nodurilor.

Rezolvare. a) Metoda secţiunilor. Se face o tăietură prin barele *1*, *3* şi *4*, care *nu sînt concurente*, şi se presupune suprimată partea stîngă a sistemului. Echilibrul părţii din dreapta tăieturii subsistă ca urmare a introducerii eforturilor S_1, S_3 şi S_4 în barele tăiate (fig. 6.11, *b*).

Pentru determinarea efortului din bara *1* se iau momentele tuturor forţelor existente la dreapta secţiunii, în raport cu punctul de intersecţie al barelor 3 şi *4* (nodul *II*). Suma momentelor forţelor trebuie să fie egală cu zero. Deci:

$$-2Pa+S_1 a \sin 30°=0, \quad \text{de unde:} \quad S_1=4P.$$

Pentru a obţine efortul în bara *4*, se iau momentele în raport cu nodul *A* (punctul de intersecţie al barelor *1* şi *3*), rezultînd:

$$-2P(a+b)-S_4 a=0.$$

Cum $b=\frac{a}{2}$, rezultă:

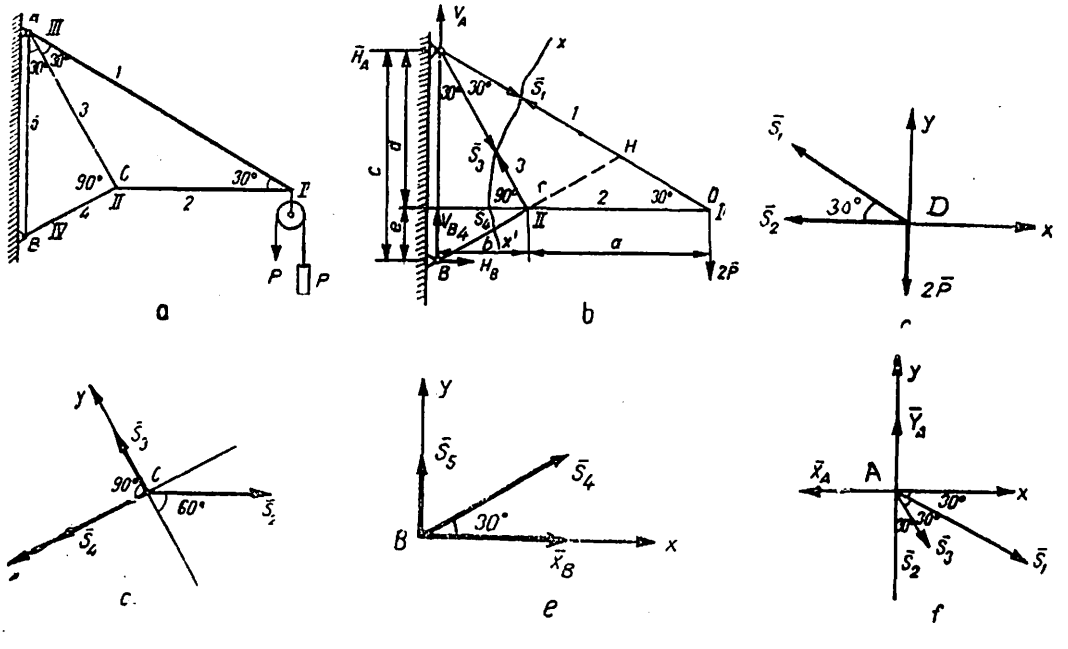
$$S_4=-3P \qquad \text{(compresiune)}.$$

Pentru determinarea efortului în bara *3*, luîndu-se momentul forţelor în raport cu punctul *H* de intersecţie al celorlalte două forţe, se obţine:

$$\frac{a}{2}2\cdot P+S_3 HC=0.$$

Cum: $HC=\frac{a}{\sqrt{3}}$, rezultă: $S_2=-P\sqrt{3}$ (compresiune).

Fig. 6.11.



Efortul în ultima bară mai poate fi determinat folosind teorema proiecțiilor, după ce se cunosc eforturile în primele bare S_1 și S_4. Proiectînd pe orizontală, se poate scrie:

$$-S_1 \cos 30° - S_3 \cos 60° - S_4 \cos 30° = 0,$$

de unde:

$$S_3 = -P\sqrt{3} \qquad \text{(compresiune)}.$$

b) Metoda echilibrului nodurilor. Echilibrul nodului D (fig. 6.11, *c*):

$$(\Sigma X);\ -S_1 \cos 30° - S_2 = 0$$

$$(\Sigma Y);\ -S_1 \sin 30° - 2P = 0$$

permite determinarea eforturilor S_1 și S_2. Se află $S_1 = 4P$; $S_2 = -2\sqrt{3}P$.

Din echilibrul nodului C (fig. 6.11,*d*)

$$(\Sigma X);\ S_4 - S_2 \sin 60° = 0$$

$$(\Sigma Y);\ S_3 - S_2 \cos 60° = 0$$

se obține, ținînd seamă de valoarea efortului S_2 dedus mai înainte:

$$S_4 = S_2 \sin 60° = -3P \quad \text{și} \quad S_3 = S_2 \cos 60° = -P\sqrt{3}.$$

Din echilibrul nodului B (fig. 6.11, *e*)

$$(\Sigma X);\ X_B + S_4 \cos 30° = 0$$

$$(\Sigma Y);\ S_5 + S_4 \sin 30° = 0$$

rezultă:

$$X_B = -S_4 \cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2} P \quad \text{și} \quad S_5 = \frac{3}{2} P.$$

Figura 6.11, *f* în care sînt înscrise forțele ce acționează asupra nodului A permite obținerea reacțiunilor din articulația A prin scrierea condițiilor de echilibru:

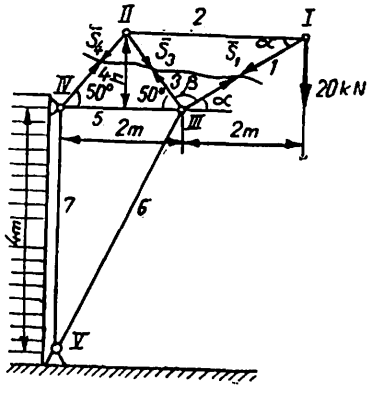
$$(\Sigma X);\ S_1 \cos 30° + S_3 \cos 60° - X_A = 0$$

$$(\Sigma Y);\ -S_1 \sin 30° - S_3 \sin 60° - Y_A = 0$$

6.3. Să se determine eforturile din barele unei macarale care are forma și dimensiunile arătate în figura 6.12, atunci cînd se ridică o sarcină de $2 \cdot 10^4$ N.

Rezolvare. Se face o secțiune prin barele *4*, *3*, *1* și se consideră echilibrul părții de deasupra tăieturii.

Fig. 6.12.



Luînd momentele forţelor interioare S_1, S_3 şi S_4, precum şi ale forţei exterioare de $2 \cdot 10^4$ N, în raport cu nodul *III* (punctul de intersecţie al barelor *1* şi *3*), se obţine:

$$S_4 \cdot 2 \cdot \sin 50° - 2 \cdot 2 = 0, \quad \text{de unde} \quad S_4 = 2{,}61 \cdot 10^4 \text{N} \quad \text{(tensiune)}.$$

Luînd momentele aceloraşi forţe, în raport cu nodul *II* (punctul de intersecţie al barelor *3* şi *4*), rezultă:

$$S_1 a + 2 \cdot 3 = 0, \quad \text{de unde} \quad S_1 = -\frac{6}{a}.$$

Însă

$$a = l \sin \beta, \quad \text{unde} \quad l = \frac{1}{\cos 50°} = 1{,}55 \text{ m},$$

iar

$$\beta = 180° - (50° + \alpha) \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2} = \frac{1{,}192}{2} = 0{,}59;$$

$$\alpha = 30°30'; \quad \beta = 130° - 30°30' = 99°30',$$

astfel încît:

$$a = 1{,}55 \sin 99°30' = 1{,}528 \text{ m},$$

iar:

$$S_1 = -39{,}3 \text{ N}. \qquad \text{(compresiune)}$$

Cunoscînd eforturile din barele *1* şi *4*, prin metoda echilibrului nodurilor se pot determina şi eforturile din celelalte bare ale macaralei.

6.4. Să se afle prin metoda secţiunilor şi metoda Cremona eforturile în barele sistemului articulat din figura 6.13.

Rezolvare. Reacţiunile din simpla rezemare *A* şi articulaţia *B* sînt:

$$X_A = 0; \quad Y_A = P; \quad X_B = P; \quad Y_B = -P.$$

Din epura Cremona (fig. 6.14 şi 6.15) se obţin în bare valorile înscrise în tabela 6.1.

Tabela 6.1

Eforturi în bare

S_{4-5}	S_{2-5}	S_{3-4}	S_{3-5}	S_{4-1}
P	0	$-P\sqrt{2}$	$-P$	P

Pentru verificarea unora dintre eforturi facem o secţiune prin barele *CD*, *CB*, *AB* (fig. 6.16).

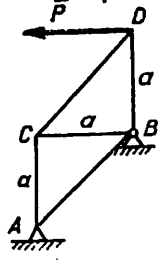


Fig. 6.13.

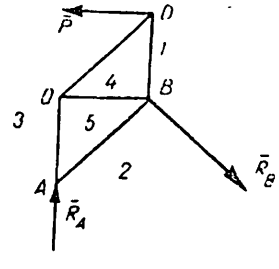


Fig. 6.14.

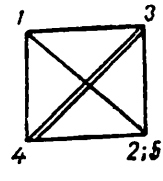


Fig. 6.15.

Din ecuația de momente în raport cu punctul B:

$$a \cdot R_A + S_{3-4} \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \text{rezultă} \quad S_{3-4} = -P\sqrt{2}.$$

Ecuația de momente în raport cu punctul C ne arată că în bara AB nu există efort. Din ecuația de proiecție pe direcția barelor paralele rezultă $S_{4-5} = R_A = P$.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

6.5. Să se determine, cu ajutorul epurei Cremona, eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 6.17.

Răspuns. Reacțiunea din O este $5P$. Din epura Cremona (fig. 6.18) se deduce:

$$S_{26} = S_{36} = 3P; \quad S_{15} = S_{54} = 5P; \quad S_{5-6} = -4P\sqrt{3}.$$

6.6. Să se determine grafic eforturile din barele fermei din figura 6.19, $P = 1\,000$ N.

Răspuns. Reacțiunile sînt:

$$Y_A = \frac{3P}{2} = 1\,500 \text{ N}; \quad Y_B = \frac{5}{2}P = 2\,500 \text{ N};$$

$$X_B = P = 1\,000 \text{ N}; \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 2\,700 \text{ N}.$$

Din epura Cremona (fig. 6.20) se obțin eforturile indicate în tabela 6.2.

Tabela 6.2

Eforturi în bare

Bara	1—5	1—6	2—7	3—7	4—5	5—6	6—7
Eforturi, în N	−3 000	−3 000	−3 800	1 500	2 000	2 700	3 600

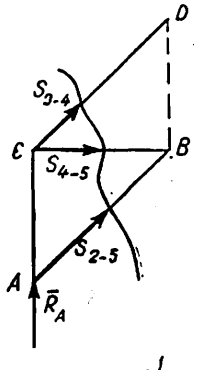


Fig. 6.16.

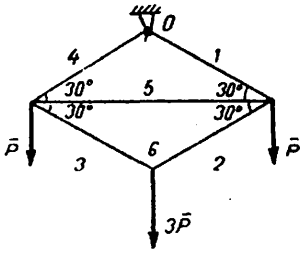


Fig. 6.17.

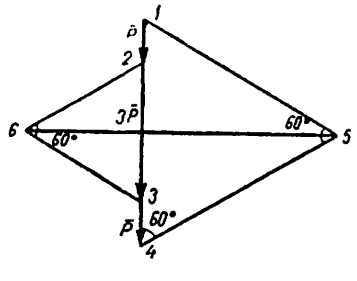


Fig. 6.18.

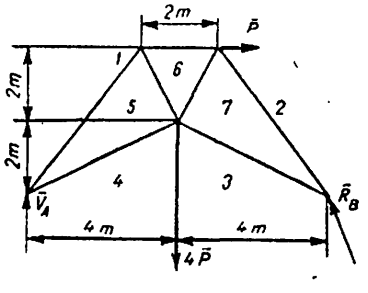


Fig. 6.19.

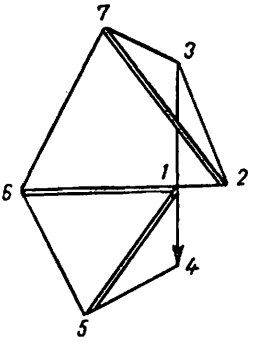


Fig. 6.20.

6.7. Podul rulant al unei macarale are forma și dimensiunile din figura 6.21. Știind că în nodul C acționează o forță $P=3\cdot10^4$ N, să se determine eforturile nî bare, cu ajutorul epurei Cremona.

Răspuns. Reacțiunile din reazemele A și B sînt:

$$R_A=10^4\text{ N};\quad R_B=2\cdot10^4\text{ N}.$$

Epura Cremona este arătată în figura 6.22, iar eforturile în tabela 6.3

Tabela 6.3

Eforturi în bare

Bare	1—4	3—4	4—5	1—6	5—6	3—5	6—7	2—7	3—7
Eforturi, în 10^4N	-2	$+\sqrt{5}$	-1	-4	$+\sqrt{5}$	$+2$	-3	-4	$+2\sqrt{5}$

6.8. Dîndu-se grinda cu zăbrele din figura 6.23, să se determine, prin metoda Cremona, eforturile din bare.

Răspuns. Reacțiunile grinzii sînt:

$$X_A=-6P;\quad Y_A=6P;\quad Y_B=6P;\quad R_A=6P\sqrt{2}.$$

Din epura Cremona arătată în figura 6.24 rezultă eforturile din bare, înscrise în tabela 6.4.

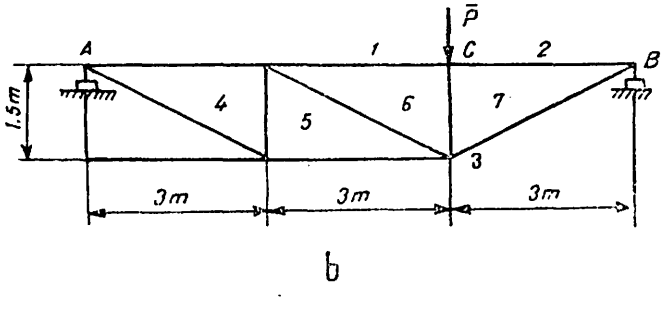
Tabela 6.4

Eforturi în bare

Bara	2—8	3—10	4—11	5—11	5—9	
Efort	$+2\sqrt{5}P$	$+\sqrt{5}P$	$+\sqrt{5}P$	$-2P$	$-4P$	
Bara	5—7	6—7	7—8	8—9	9—10	10—11
Efort	$-6P$	0	$+\sqrt{13}P$	$-3P$	$+2\sqrt{2}P$	$-2P$

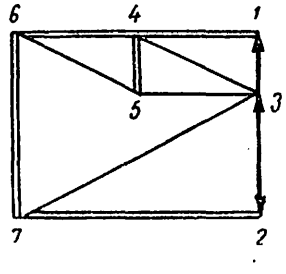
6.9. Să se determine, prin metoda secțiunilor, efortul din bara AC a cadrului $ABCD$ (fig. 6.25), atîrnat în A și B cu două fire, și prin echilibrul nodului C, eforturile în barele CB și CD. Cadrul are latura $AC=4$ m și este acționat în C de o forță $P=6\,000$ N.

Fig. 6.21.



b

Fig. 6.22.



Răspuns.

$a=3{,}46$ m ; $b=1{,}15$ m ; $R_A=1\,500$ N ; $R_B=4\,500$ N ;

$S_1=750$ N ; $S_2=2\,600$ N ; $S_3=3\,900$ N.

6.10. Să se determine, prin metoda secțiunilor, eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele, având forma și dimensiunile din figura 6.26.

Răspuns. $R_A=2P$; $R_B=4P$.

6.11. Să se determine eforturile în barele grinzii din figura 6.27, sprijinită pe reazemele A și B.

Indicații și răspuns. În cazul acestei grinzi cu zăbrele nu se poate utiliza metoda separării nodurilor sau metoda Cremona, deoarece nu se află nici un nod în care să existe numai două eforturi necunoscute. Deci, singura metodă care se poate utiliza este metoda secțiunilor.

Fig. 6.23.

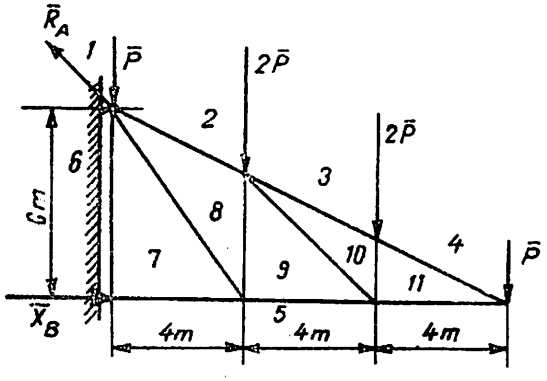


Fig. 6.24.

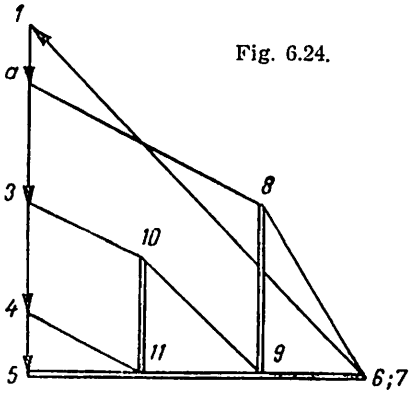


Fig. 6.25.

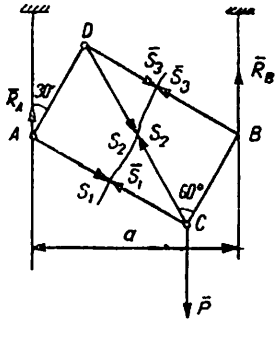


Fig. 6.26.

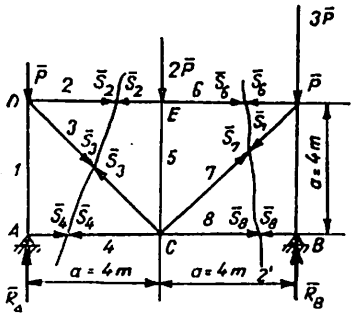
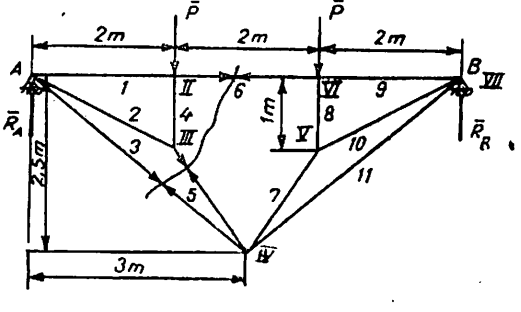


Tabela 6.5

Eforturi în bare

S_2	S_3	S_4	S_6	S_7	S_8
$-P$	$P\sqrt{2}$	0	$-P$	$P\sqrt{2}$	0

Fig. 6.27.



Făcînd o secțiune prin barele *3*, *5* și *6* și scriind ecuația momentelor tuturor forțelor situate la stînga secțiunii, în raport cu nodul *IV*, se obține:

$$S_6 = -2{,}4 \cdot 10^4 \text{ N} \quad \text{(compresiune)}.$$

După determinarea efortului din bara *6* se poate rezolva problema printr-o metodă oarecare.

6.12. Prin metoda grafică Cremona să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele plane din figura 6.28 și să se verifice prin metoda secțiunilor.

Indicații și răspuns. Din epura Cremona (fig. 6.29) se obțin următoarele eforturi din bare, înscrise în tabela 6.6.

Tabela 6.6

Eforturi în bare

S_{1-5}	S_{3-7}	S_{5-6}	S_{2-6}	S_{6-7}	S_{4-5}	S_{4-7}
$-\frac{10}{\sqrt{3}}P$	$-2\sqrt{3}P$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}P$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}P$	$\frac{2}{\sqrt{3}}P$	$\frac{5}{\sqrt{3}}P$	$\sqrt{3}P$

Prin efectuarea secțiunilor ca în figura 6.30 se poate scrie pentru secțiunea aa':

$$(\sum M_D);\quad S_{4-5}\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2} - R_A\frac{l}{2} = 0;\quad \text{de unde}\quad S_{4-5} = \frac{5}{\sqrt{3}}P.$$

$$(\sum M_E);\quad S_{2-6}\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2} + R_A\cdot l - 6P\cdot\frac{l}{2} = 0;\quad \text{de unde}\quad S_{2-6} = -\frac{4}{\sqrt{3}}P.$$

Din ecuația de proiecție pe verticală rezultă $S_{5-6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}P$.

Analog se efectuează și verificarea eforturilor din barele secțiunii bb'.

16.13. Să se traseze epura Cremona și să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 6.31.

Răspuns. Notînd zonele ca în schiță, pe epura Cremona (fig. 6.32) se măsoară eforturile din bare.

Fig. 6.28.

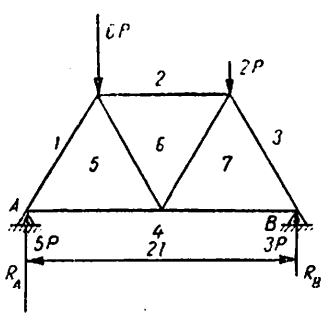


Fig. 6.29.

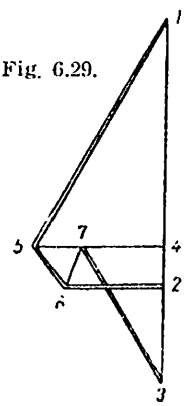
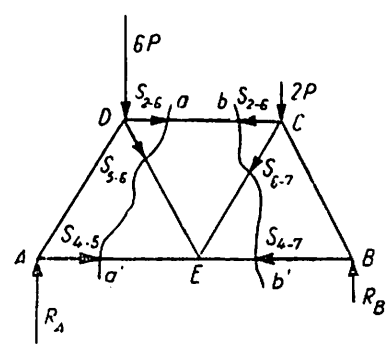


Fig. 6.30.



6.14. Să se determine prin metoda echilibrului nodurilor eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 6.33, *a*, asupra căreia acționează forțele $\overline{P}$ și $2\overline{P}$ unde $P=2\,000$ N.

Indicație și *răspuns.* Notînd cu Y_A, X_B, Y_B componentele reacțiunilor din rezemarea A și articulația B, izolînd nodurile așa cum se arată în figura 6.33, *b*, *c*, *d*, *e* și *f* se obțin reacțiunile $Y_A=2\,500$ N; $X_B=2\,000$ N; $Y_B=1\,500$ N, iar pentru eforturile din bare valorile înscrise în tabela 6.7.

Tabela 6.7

Eforturi în bare

Bară	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Efort, în N	−1 500	2 000	3 360	−5 000	0	−5 000	5 600	0	−2 500

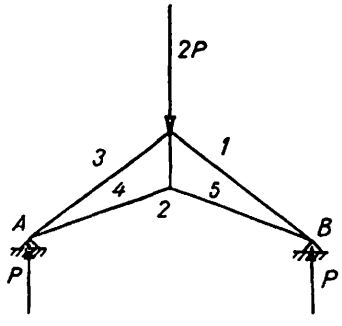


Fig. 6.31.

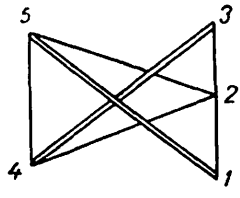
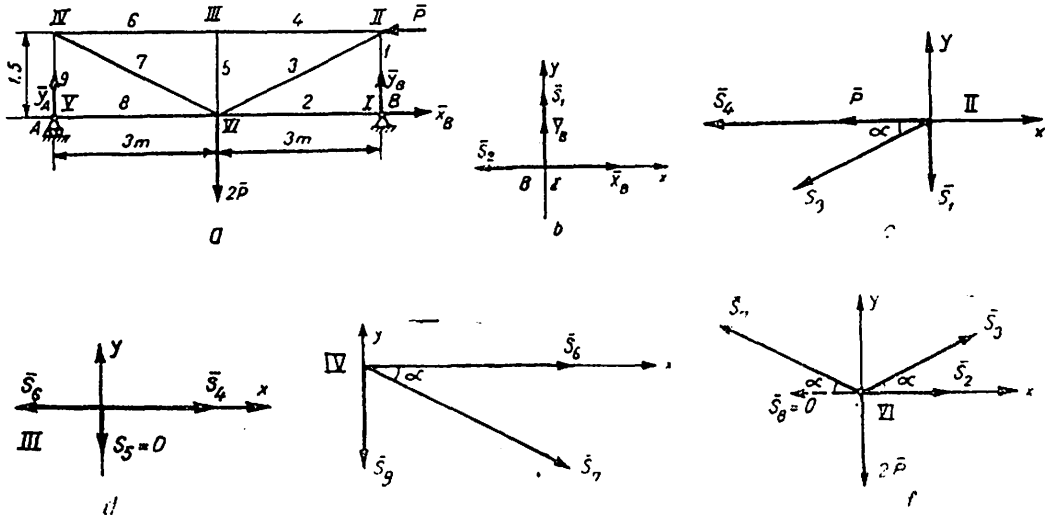


Fig. 6.32.

Fig. 6.33.



6.15. O macara are forma și dimensiunile din figura 6.34, *a*. Să se determine eforturile din bare, în momentul ridicării unei sarcini $P=80$ kN.

Indicație și răspuns. Din condițiile de echilibru rezultă mărimile reacțiunilor din A și B: $R_A=190$ kN; $R_B=110$ kN, iar din condițiile de echilibru a nodului C (fig. 6.34, *b*); a nodului D (fig. 6.34, *c*) și a nodului A (fig. 6.34, *d*), se obțin următoarele valori pentru eforturile din bare:

$S_1=-154$ kN; $S_2=113$ kN;

$S_3=-92$ kN; $S_4=-63$ kN;

$S_5=126$ kN.

Bara *1* este solicitată cu un efort maxim, de compresiune.

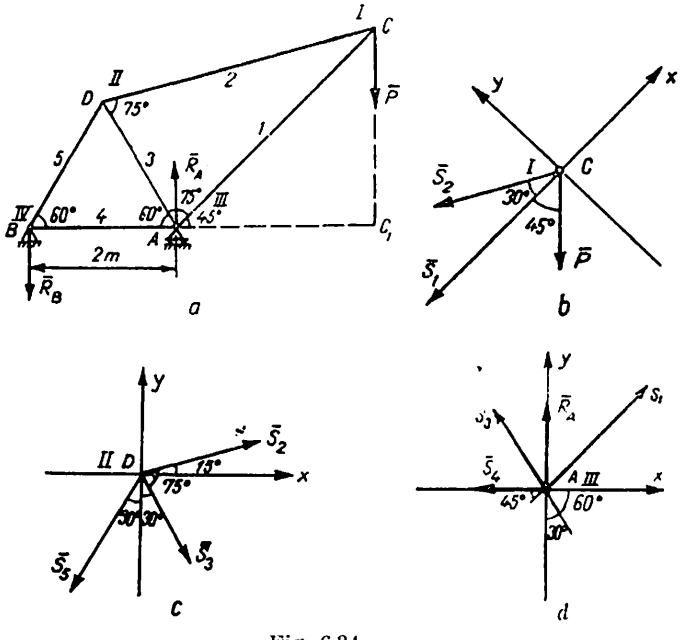


Fig. 6.34.

Capitolul 7

STATICA FIRELOR

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. Un fir *flexibil* și *inextensibil,* acționat de forțe distribuite pe toată lungimea lui, fixat la capetele A și B, ia o poziție de echilibru după o anumită curbă strîmbă, din clasa *curbelor funiculare.*

Firul fiind perfect flexibil, tensiunile $\overline{T}$ și $\overline{T}+\mathrm{d}\overline{T}$ din capetele unei porțiuni $MM'=\mathrm{d}s$ a firului sînt îndreptate după tangenta la curbă, în punctele M și M' (fig. 7.1).

2. **Condiția de echilibru** a elementului de fir, sub acțiunea tensiunilor din capete $\overline{T}$, $\overline{T}+\mathrm{d}\overline{T}$ și a forței $\overline{F}\mathrm{d}s$, se poate scrie:

a) Vectorial, sub forma: $\frac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}s}+\overline{F}=0.$ (*a*)

b) Scalar, prin proiectarea relației (*a*) pe axele triedrului lui Frenet:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}+F_\tau=0\,;\quad \frac{T}{\rho}+F_\nu=0\,;\quad F_\beta=0, \tag{b}$$

în care ρ este raza de curbură și F_τ, F_ν, F_β componentele forței $\overline{F}$ pe direcția tangentei, normalei principale și binormalei în punctul M. Firul ia deci o astfel de poziție de echilibru, încît forța $\overline{F}$ se află în planul oscilator al curbei.

c) Prin proiectarea relației vectoriale (*a*) pe axe carteziene, ținînd seama că:

$$T_x=T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,;\quad T_y=T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,;\quad T_z=T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,;$$

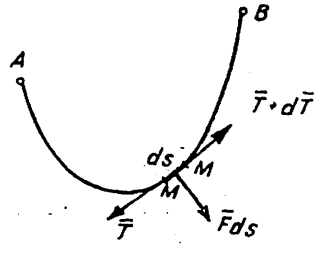
rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)+X=0\,;\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)+Y=0\,;\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)+Z=0, \tag{c}$$

în care X, Y, Z sînt componentele forței $\overline{F}$ pe axele de coordonate.

3. **Există numeroase aplicații tehnice** în care, după modul de acționare al forței $\overline{F}$ (forțe centrale, forțe paralele cu o direcție oarecare), curba de echilibru este o curbă plană.

Fig. 7.1.



Astfel, în cazul particular al unui fir omogen, greu și perfect flexibil, care are greutatea p pe unitatea de lungime de arc, ecuațiile (c) devin:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0 \quad \text{și} \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=p, \tag{b'}$$

din care se deduce curba de echilibru:

$$y=\frac{c}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)=c\,\mathrm{ch}\frac{x}{c}, \tag{c'}$$

numită *lănțișor*, în care c, ordonata vîrfului curbei, este *parametrul lănțișorului* (fig. 7.2).

Acesta este definit de expresia:

$$c=\frac{H}{p}=OC, \tag{d}$$

în care H este tensiunea la vîrful curbei, și care este orizontală. Derivînd relația (c') rezultă:

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{sh}\frac{p}{H}x=\mathrm{tg}\,\theta. \tag{c''}$$

4. **Lungimea arcului CM** a lănțișorului este:

$$l=c\,\mathrm{sh}\frac{x}{c}=c\cdot\mathrm{tg}\,\theta=\sqrt{y^2-c^2}=CD, \tag{e}$$

în care $CD \perp MT$.

La rezolvarea problemelor privitoare la fire se pot folosi tabelele funcțiunilor hiperbolice ch x și sh x, care dau valorile ordonatelor și lungimea de arc pentru $c=1$.

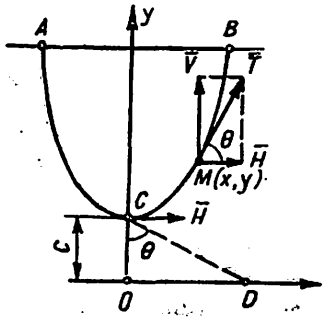
5. **Din prima ecuație** (b') rezultă că proiecția tensiunii într-un punct oarecare M pe axa Ox, este constantă și egală cu H, tensiunea la vîrful curbei lănțișor (valoarea minimă a tensiunii);

$$H=T\cos\theta, \quad \text{iar} \quad V=H\,\mathrm{tg}\,\theta. \tag{f}$$

6. **În cazul unei sarcini repartizate uniform** în lungul orizontalei (nu pe lungimea cablului), ca în cazul cablurilor care susțin un pod suspendat sau în cazul chiciurii pe sîrmele de telegraf, dacă se neglijează greutatea cablului în raport cu cea a sarcinii, ecuațiile de echilibru devin:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0; \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)=p\frac{dx}{ds}. \tag{b''}$$

Fig. 7.2.



Alegînd originea axelor prin punctul cel mai jos al curbei, cînd condițiile de margine sînt: $x=0$, $y=0$, $y'=0$, rezultă pentru curba de echilibru parabola:

$$y=\frac{1}{2}\frac{p}{H}x^2,$$

de axă verticală și parametru: $\frac{1}{4}\frac{p}{H}$.

7. **Frecarea firelor** se produce în cabluri, frînghii, curele, lanţuri, etc. cînd cilindrul sau roata pe care sînt înfăşurate firele au mişcări relative între ele. La frecarea firelor intervine tot o frecare de alunecare, care creşte foarte repede cu unghiul de înfăşurare α. Între tensiunile dintre firul conducător T_1 şi condus T_2 există relaţia lui Euler:

$$T_1 \leqslant T_2 e^{\mu\alpha},$$

în care μ este coeficientul de frecare dintre fir şi corp, α unghiul de înfăşurare exprimat în radiani, iar e baza logaritmilor neperieni.

Valorile factorului $e^{\mu\alpha}$ sînt înscrise în anexa 2.

8. **Metodica rezolvării** problemelor de echilibru a firelor cu frecare este acea generală, ţinînd seamă şi de relaţia lui Euler.

B. PROBLEME REZOLVATE

7.1. Să se demonstreze că tensiunea T în orice punct al lănţişorului este egală cu greutatea porţiunii de fir, a cărei lungime este egală cu ordonata lănţişorului în punctul respectiv.

Rezolvare. Tensiunea T într-un punct al lănţişorului se scrie succesiv:

$$T = \frac{H}{\cos\theta} = H\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta} = H\sqrt{1+y'^2}, \tag{1}$$

în care y', dedusă din (c'), este:

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right). \tag{2}$$

Din relaţiile precedente se obţine:

$$T = H\frac{\sqrt{\left(e^{\frac{2x}{c}}+1\right)^2}}{2e^{\frac{x}{c}}} = \frac{H}{c}y = H\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{c} = py. \tag{3}$$

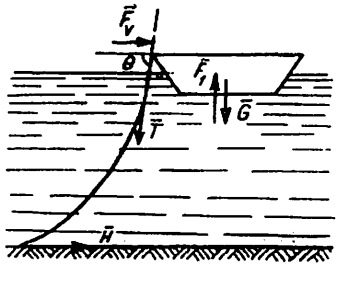
Rezultă că se poate înlocui tensiunea T într-un punct oarecare M al lănţişorului cu greutatea unei porţiuni de fir, egală cu distanţa de la punct la axa absciselor.

Pentru punctul cel mai de jos al lănţişorului, cu ordonata c, rezultă tensiunea minimă:

$$H = pc. \tag{4}$$

7.2. Un vapor, ancorat cu ajutorul unui cablu, este acţionat de un vînt orizontal. Adîncimea apei fiind h, să se afle lungimea cablului necesar pentru a rezista vîntului care acţionează asupra vaporului (fig. 7.3).

Fig. 7.3.



Rezolvare. Forțele care acționează asupra vaporului sînt:

— greutatea proprie $\overline{G}$;

— forța de împingere, conform principiului lui Arhimede $\overline{F_l}$;

— forța vîntului $\overline{F_v}$;

— tensiunea în cablu $\overline{T}$.

Aceste forțe fiind în echilibru, rezultă:

$$(\Sigma X);\quad F_v - T\cos\theta = 0; \tag{1}$$

$$(\Sigma Y);\quad F_l - G - T\sin\theta = 0. \tag{2}$$

Pe de altă parte, pentru ca ancora să nu se ridice, cablul trebuie să fie tangent la fundul apei.

Pentru echilibrul cablului, notînd cu p greutatea pe unitatea de lungime a cablului în apă (scăzînd suprapresiunea), trebuie ca:

$$T\cos\theta = H = \frac{l^2 - h^2}{2h}\cdot p. \tag{3}$$

Ținînd seamă de ecuația (1), se poate scrie:

$$F_v = \frac{l^2 - h^2}{2h}\cdot p,$$

de unde:

$$l = \sqrt{h^2 + \frac{2F}{p}h}.$$

7.3. Un fir omogen $AC = l$ este atîrnat în A și se sprijină pe o porțiune BC, fără frecare, pe un plan înclinat de un unghi β. Cunoscîndu-se greutatea p a firului pe unitatea de lungime, să se afle lungimea $BC = l_1$ care menține firul în echilibru cînd unghiurile α și β sînt date (fig. 7.4).

Rezolvare. Tensiunea T_1 a firului în punctul B este egală pe de o parte cu componenta în lungul planului a greutății BC a firului, iar pe de altă parte egală, după relația generală a lănțișorului, $H = T\cos\theta = pc$, cu:

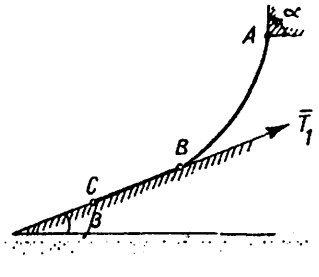
$$pl_1\sin\beta = \frac{pc}{\cos\beta},$$

de unde se deduce:

$$c = l_1\sin\beta\cos\beta,$$

în care c este parametrul lănțișorului.

Fig. 7.4.



Lungimea AB a porțiunii de lănțișor apare ca o diferență de lungimi între vîrful lănțișorului și punctele A și B:

$$AB = l - l_1 = c\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta).$$

Înlocuind valoarea parametrului c, dedusă mai sus, se obține:

$$l_1 = \frac{l\cos\alpha}{\cos\beta\cos(\alpha-\beta)}.$$

7.4. Dîndu-se un cablu omogen cu lungimea $2l$, și greutatea specifică p, să se afle distanța $2x$ la care trebuie alese punctele de suspensie ale cablului, aflate pe aceeași orizontală, pentru ca tensiunea lanțului în fiecare dintre punctele sale de fixare să aibă o valoare dată T_0.

Rezolvare. Din relațiile:

$$T = \frac{H}{\cos\theta} \quad \text{și} \quad l = \frac{H}{p}\operatorname{tg}\theta \qquad (e);\ (f)$$

se deduce la limită

$$\sin\theta = \frac{pl}{T_0} \quad \text{și} \quad c = \frac{H}{p} = l\operatorname{ctg}\theta = l\sqrt{\left(\frac{T_0}{pl}\right)^2 - 1}. \qquad (1)$$

Din ecuația (e) se deduce:

$$\operatorname{sh}\frac{x}{c} = \frac{l}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{T_0}{pl}\right)^2 - 1}}. \qquad (2)$$

Notînd:

$$\frac{x}{c} = t \quad \text{și} \quad \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{T_0}{pl}\right)^2 - 1}} = k, \qquad (3)$$

ecuația (2) se mai scrie:

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = k; \qquad (2)$$

cu soluțiile:

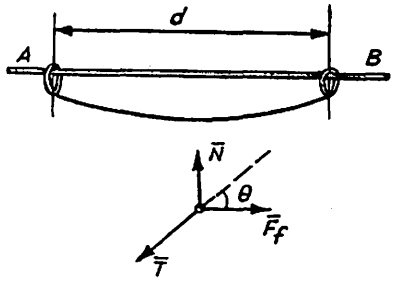
$$e^t = k \pm \sqrt{k^2+1}. \qquad (4)$$

Prin transformări, succesive, se obține:

$$x = l\sqrt{\left(\frac{T_0}{pl}\right)^2 - 1} \cdot \ln \frac{1 \pm \frac{T_0}{pl}}{\sqrt{\left(\frac{T_0}{pl}\right)^2 - 1}}.$$

7.5. Un lanț greu, omogen, cu lungimea l, este atîrnat cu capetele sale de o bară fixă, orizontală, prin intermediul a două inele mici care pot aluneca, cu frecare, pe bară (fig. 7.5). Cunoscînd unghiul de frecare φ, să se determine distanța maximă $d=2x$, dintre inele pentru care este posibil echilibrul lanțului.

Fig. 7.5.



Rezolvare. Asupra inelului B acționează forțele $\overline{T}$, $\overline{N}$, $\overline{F_f}$. Din condițiile de echilibru la limită, rezultă:

$$N=T\sin\theta\,;\quad T\cos\theta=F_f=\mu N=\mu T\sin\theta. \tag{1}$$

Cum $\mu=\operatorname{tg}\varphi$, din (1) se obține:

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}\varphi, \tag{2}$$

de unde relația (c'') devine:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{sh}\frac{p}{H}x=\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}\varphi. \tag{3}$$

Notînd $\frac{p}{H}x=t$, (4)

rezultă:

$$\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\operatorname{ctg}\varphi \quad \text{și} \quad e^{2t}-2e^t\operatorname{ctg}\varphi-1=0, \tag{5}$$

cu soluția pozitivă:

$$e^t=\operatorname{ctg}\varphi+\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi+1}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot \tag{6}$$

Cu notația făcută $\frac{p}{H}x=t$, din ecuația (6) se deduce:

$$x=\frac{H}{p}\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot \tag{7}$$

Dar din relația (e):

$$l=2\frac{H}{p}\operatorname{sh}\frac{p}{H}x=2\frac{H}{p}\operatorname{ctg}\varphi,$$

rezultă

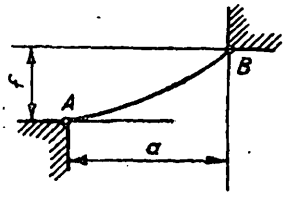
$$\frac{H}{p}=\frac{l}{2}\operatorname{tg}\varphi. \tag{8}$$

Din relațiile (7) și (8) se obține:

$$d=2x=2\frac{H}{p}\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=l\operatorname{tg}\varphi\cdot\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot$$

7.6. Un cablu omogen, avînd o greutate p uniform repartizată pe unitatea de lungime, este prins în punctele A, vîrful lănțișorului și B, ca în figura 7.6. Cunoscînd d și f să se determine parametrul c al lănțișorului, lungimea s a cablului și tensiunea T_B a cablului în punctul de fixare B. Aplicație numerică: $p=200$ N/m; d=60 m; f=9 m.

Fig. 7.6.



Rezolvare. Curba de echilibru este curba lănțișor. Referindu-ne la figurile 7.2 și 7.6, din ecuația (c') se deduce:

$$f+c=c\operatorname{ch}\frac{x}{c}\cdot \tag{1}$$

Luînd variabila auxiliară z, definită de egalitatea:

$$\frac{x}{c}=z, \tag{2}$$

ecuația precedentă devine:

$$\frac{f}{x}=\frac{\operatorname{ch} z-1}{z}, \tag{3}$$

din care se deduce z.

Cunoscînd variabila z, rezultă:

$$c=\frac{x}{z};\quad s=c\cdot \operatorname{sh} z;\quad T_B=p\cdot \operatorname{ch} z\cdot c. \tag{4}$$

Aplicația numerică. Avînd $\frac{f}{x}=0{,}15$, ecuația transcendentă (3) devine:

$$\operatorname{ch} z=1+0{,}1\,z.$$

O soluție aproximativă se poate obține pe cale grafică, reprezentînd grafic funcțiile:

$$y_1=\operatorname{ch} z \quad \text{și} \quad y_2=1+0{,}15\,z,$$

utilizîndu-se tabela funcțiilor hiperbolice. Abscisa punctului de intersecție al curbelor $z_1=0{,}3$, reprezintă soluția aproximativă a problemei (fig. 7.7).

Pentru aflarea soluției exacte se va proceda prin metoda părților proporționale, considerînd funcția:

$$\varphi(z)=1+0{,}15\,z-\operatorname{ch} z,$$

pentru care

$$\varphi(a)=\varphi(0{,}3)=1+0{,}04750-1{,}04534=0{,}00216;$$

$$\varphi(b)=\varphi(0{,}4)=1+0{,}06000-1{,}08107=-0{,}02107.$$

$$z_2=a+\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=0{,}3+\frac{0{,}00216}{0{,}00216+0{,}02107}=0{,}309.$$

Avînd valoarea variabilei z, cu ajutorul relațiilor (4) se obține:

$$c=\frac{x}{z}=\frac{60}{0{,}309}=194{,}175;$$

$$s=c\cdot \operatorname{sh} z=194{,}175\cdot \operatorname{sh} 0{,}309=60{,}96\ \text{m};$$

$$T=p\cdot c\cdot \operatorname{ch} z=20\cdot 194{,}175\cdot \operatorname{ch} 0{,}309=4\,082{,}4{,}6\ \text{N}.$$

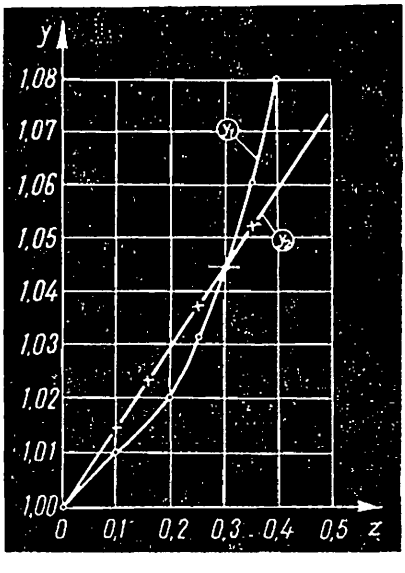


Fig. 7.7.

7.7. Un lanț omogen și perfect flexibil este fixat în B și de capătul celălalt, după ce lanțul este trecut după un scripete foarte mic A, atîrnă o greutate P (fig. 7.8). Cunoscînd p, greutatea pe unitatea de lungime d, h și P, să se determine parametrul c al lănțișorului.

Rezolvare. Notînd cu x_0 și y_0 coordonatele punctului A, se poate scrie relația:

$$P=py_0=pc\cdot\operatorname{ch}\frac{x_0}{c}\,. \tag{1}$$

Punînd condiția ca lanțul să treacă și prin B $(x_0+d;\ y_0+h)$, rezultă:

$$y_0+h=c\operatorname{ch}\frac{x_0+d}{c}=c\left(\operatorname{ch}\frac{d}{c}\operatorname{ch}\frac{x_0}{x}+\operatorname{sh}\frac{d}{c}\operatorname{sh}\frac{x_0}{c}\right).$$

Ținînd seamă de relația (1), se obține ecuația transcendentă:

$$\frac{P}{p}+h=c\left[\frac{P}{p\cdot c}\operatorname{ch}\frac{d}{c}+\sqrt{\frac{p^2}{p^2c^2}-1}\cdot\operatorname{sh}\frac{d}{c}\right],$$

care dă valoarea parametrului c.

7.8. Un cablu are sarcina p uniform distribuită pe orizontală (fig. 7.9). Cunoscînd valorile p, f_1, f_2 și l, să se demonstreze că valoarea minimă H a tensiunii cablului este dată de relația:

$$H=\frac{4p\cdot l^2}{(f_2-f_1)^2}\left(\frac{f_1+f_2}{2}\pm\sqrt{f_1\cdot f_2}\right).$$

Discuție.

Rezolvare. Sarcina fiind uniform distribuită pe orizontală, curba funiculară este o parabolă de ecuație:

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{px^2}{H}.$$

Ținînd seamă de valorile săgeților f_1 și f_2:

$$f_1=\frac{p\cdot l_1^2}{2H};\qquad f_2=\frac{p\cdot l_2^2}{2H},$$

deduse din ecuația parabolei și din relația:

$$l_1+l_2=2l;$$

Fig. 7.8.

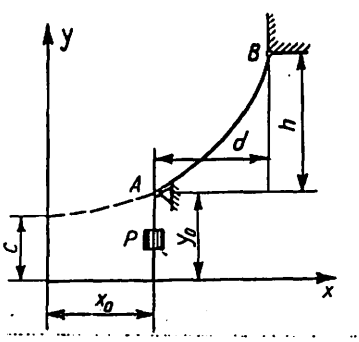
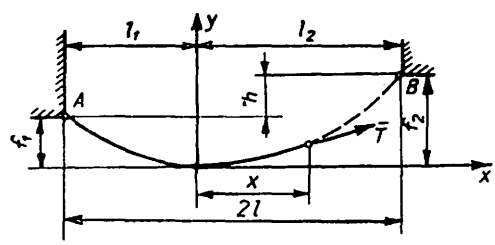


Fig. 7.9.



rezultă:

$$l_1=l-\frac{H}{2\cdot p\cdot l}(f_2-f_1);\quad l_2=l+\frac{H}{2\cdot p\cdot l}(f_2-f_1).$$

Înlocuind valoarea lui l_2 în expresia săgeții f_2, se obține:

$$f_2=\frac{p}{2H}\left[l+\frac{H}{2\cdot p\cdot l}(f_2-f_1)\right]^2,$$

sau ecuația:

$$H^2-\frac{4\cdot p\cdot l^2(f_2+f_1)}{(f_2-f_1)^2}H+\frac{4p^2l^4}{(f_2-f_1)^2}=0,$$

cu soluțiile:

$$H=\frac{4\cdot p\cdot l^2}{(f_2-f_1)^2}\cdot\left(\frac{f_1+f_2}{2}\pm\sqrt{f_1f_2}\right).$$

Tensiunile în punctele de prindere sînt:

$$T_A=\sqrt{H^2+p^2\cdot l_1^2}\quad\text{și}\quad T_B=\sqrt{H^2+p^2\cdot l_2^2}.$$

În cazul particular cînd $f_1=f_2=f$, punctele de fixare ale cablului A și B sînt la același nivel și $l_1=l_2=l$.

Tensiunile în vîrful H și în punctele de fixare T_A și T_B sînt:

$$H=\frac{pl^2}{2f}\quad\text{și}\quad T_A=T_B=\frac{p\cdot l^2}{2f}\cdot\sqrt{1+4\frac{f^2}{l^2}}.$$

7.9. Un fir omogen greu, cu lungimea $2l$ este atîrnat de capete în două puncte A și B care nu se află la același nivel (fig. 7.10). Unghiurile pe care tangentele în A și B la lănțișor le fac cu orizontala fiind θ_1 și θ_2, să se determine diferența de înălțimi $2h$ dintre punctele A și B. *Aplicație.* $2l=100$; $\theta_1=25°$; $\theta_2=65°$

Rezolvare. Din relația (*e*) rezultă:

$$EO=l_1=\frac{H}{p}\operatorname{tg}\theta_1;\quad OD=l_2=\frac{H}{p}\operatorname{tg}\theta_2;$$

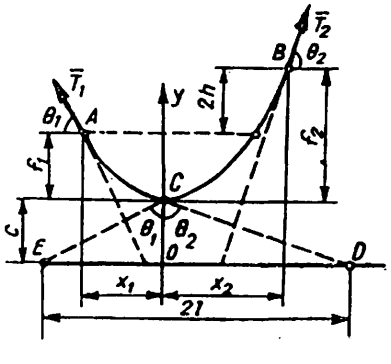
$$2l=ED=\frac{H}{p}(\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\theta_2).$$

Ținînd seamă de relațiile (1), (*e*) și de relația precedentă, se poate scrie succesiv:

$$2h=f_2-f_1=\frac{T_2-T_1}{p}=\frac{H}{p}\left(\frac{1}{\cos\theta_1}-\frac{1}{\cos\theta_2}\right)=$$

$$=\frac{2l}{\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\theta_2}\cdot\left(\frac{1}{\cos\theta_1}-\frac{1}{\cos\theta_2}\right),$$

Fig. 7.10.



deci:

$$h = l \cdot \frac{\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}{\cos\frac{\theta_2+\theta_1}{2}}.$$

Pentru valorile numerice, rezultă:

$$h = 21{,}51 \text{ m}.$$

7.10. Un cablu trecut peste două tambure fixe are la capete cîte o greutate $\overline{Q}$ și $\overline{P}$ (fig. 7.11). Să se determine coeficientul de frecare dintre cablu și tambur pentru ca sistemul să rămînă în echilibru.

Aplicație numerică $Q=4$ N; $P=20$ N.

Rezolvare. Admițînd că tendința de mișcare a cablului este cea indicată de săgeată și făcînd o tăietură în cablu, rezultă:

$$T = Pe^{\mu\alpha} \quad \text{și} \quad Q = Te^{\mu\alpha}.$$

Eliminînd pe T și ținînd seamă că $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, se obține

$$Q = P \cdot e^{\mu \cdot 3\pi}, \text{ de unde:}$$

$$\mu \geqslant \frac{1}{3\pi} \cdot \ln\frac{Q}{P} = 0{,}07.$$

7.11. Un sistem de frînare a firului la o mașină de filat se compune dintr-o serie de bare care se pot deplasa una față de alta în sens contrar (fig. 7.12). Cînd firul este tangent la toate valțurile (poziția sus), necesită — pentru a fi tras — o forță $\overline{P}$. Care este forța minimă $\overline{Q}$ necesară pentru a trage firul, atunci cînd centrele barelor de frînare sînt coliniare (poziția de jos)?

Aplicație: $l=36$ mm; $d=20$ mm; $\mu=0{,}5$; $n=5$; $P=1\,200$ N.

Rezolvare. Considerînd două bare vecine în poziția de frînare și notînd cu α unghiul de înfășurare pe una din bare (fig. 7.13), din triunghiul LDO_2 se obține: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{l}$. Tăind firul între cele două bare O_1 și O_2, rezultă: $Q = T_1 e^{\mu\alpha}$. În mod analog: $T_1 = T_2 e^{\mu\alpha}$; $T_2 = T_3 e^{\mu\alpha}$; $\ldots T_{n-1} = Pe^{\mu\alpha}$, de unde:

$$Q = e^{n\mu\alpha} \cdot P, \tag{1}$$

în care n este numărul de bare.

Pentru aplicația numerică se obține:

$$\alpha = 67°40'; \quad Q = 22{,}80 \text{ N}.$$

Fig. 7.11.

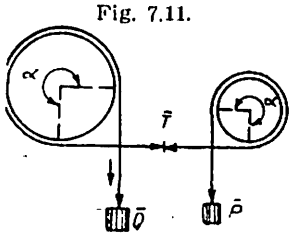


Fig. 7.12.

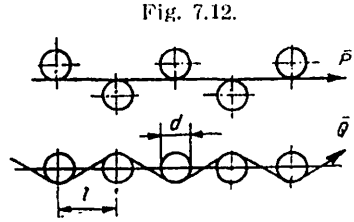
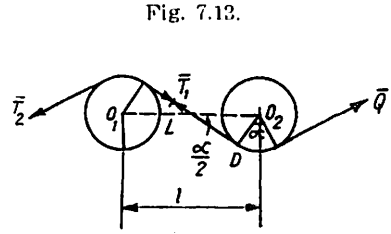


Fig. 7.13.



7.12. Un cablu greu, omogen, este așezat pe un plan orizontal și este trecut fără frecare peste un scripete foarte mic S (fig. 7.14). Trăgînd de capătul cablului cu forța $\overline{T}$, cunoscînd d și f, iar coeficientul de frecare între cablu și plan fiind μ, să se calculeze la limită distanța x, de unde cablul părăsește planul. *Aplicație numerică*: $d=10$ m; $f=1{,}5$ m; $\mu=0{,}3$.

Rezolvare. Notînd cu $\overline{H}$ forța orizontală în punctul B unde lanțul părăsește planul, la limită:

$$H=\mu p x. \tag{1}$$

Punînd condiția ca lănțișorul $y=\frac{H}{p}\cdot\operatorname{ch}\frac{p}{H}x$ să treacă prin punctul $S(d-x,\ c+f)$, rezultă:

$$c+f=\frac{H}{p}\operatorname{ch}\frac{p}{H}(d-x).$$

Ținînd seamă de relația $c=\frac{H}{p}$ și de relația (1), rezultă:

$$f=\mu x\left[\operatorname{ch}\frac{d-x}{\mu x}-1\right],$$

sau:

$$\frac{f+\mu x}{\mu x}=\operatorname{ch}\frac{d-x}{\mu x}.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $\frac{d-x}{\mu x}=t$, se obține ecuația transcendentă:

$$\operatorname{ch} t=\frac{f+\mu d+\mu f t}{\mu d}, \tag{2}$$

care se va rezolva grafic.

Se reprezintă funcția y_1

$$y_1=\operatorname{ch} t,$$

folosind un tabel al valorilor funcției hiperbolice ch t și dreapta y_2:

$$y_2=\frac{f+\mu d+\mu f t}{\mu d}.$$

În cazul aplicației numerice, rezultă $y_2=1{,}5+0{,}15t$.

Rezolvînd grafic ecuația (2) (fig. 7.15), se obține:

$$t=1{,}097 \quad \text{și} \quad x=\frac{d}{1+\mu t}=7{,}54 \text{ m}.$$

Fig. 7.14.

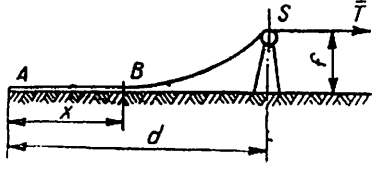
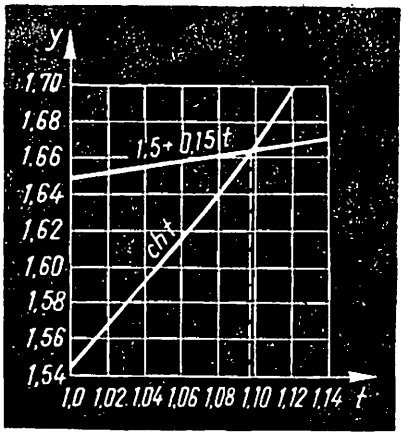


Fig. 7.15.



7.13. O frînă cu panglică trebuie să mențină în repaus o roată cu raza $R=0{,}20$ m, asupra axului căreia acționează un cuplu $C_m=500$ N·m (fig. 7.16). Panglica este acționată de o pîrghie articulată în O', avînd brațele $a=0{,}6$ m și $b=0{,}05$ m. Unghiul de înfășurare $\alpha=270°$. Să se determine mărimea forței P care trebuie aplicată la capătul pîrghiei, astfel ca roata să nu se mai învîrtească, coeficientul de frecare dintre panglică și roată fiind $\mu=0{,}25$.

Rezolvare. Izolînd corpurile, luînd momentele forțelor care acționează asupra roții și ținînd seamă de cuplul motor, se poate scrie:

$$C_m+T_2R-T_1R=0,$$

din care rezultă $T_1>T_2$.

Cum la limită $T_1=T_2e^{\mu\alpha}$, relația (1) se mai scrie:

$$T_2R\,(e^{\mu\alpha}-1)=C_m,$$

de unde:

$$T_2=\frac{C_m}{R\,(e^{\mu\alpha}-1)} \qquad (2)$$

și luînd momentele pîrghiei în raport cu articulația O', se obține:

$$T_2\cdot b-P\cdot a=0.$$

Înlocuind valoarea lui T_2 dată de relația (2) și scoțînd pe φ, rezultă:

$$P=\frac{b}{a}\cdot\frac{C_m}{R\,(e^{\mu\alpha}-1)}.$$

Dacă sensul de rotație ar fi fost invers, atunci $T_2>T_1$ și la limită:

$$T_2=T_1\,e^{\mu\alpha}.$$

Ecuația de momente în raport cu axul roții este:

$$T_2\cdot R-T_1\cdot R-C'_m=0,$$

în care C'_m este un cuplu egal cu C_m, însă de sens contrar, de unde:

$$T_2=\frac{C'_m}{R\,(e^{\mu\alpha}-1)}\cdot e^{\mu\alpha}.$$

În cazul pîrghiei, ecuația de momente rămînînd aceeași, rezultă:

$$P=\frac{b}{a}\cdot\frac{C'_m}{R\,(e^{\mu\alpha}-1)}e^{\mu\alpha}.$$

Aplicația numerică. Se obține: $P=92{,}5$ N.

Se constată din acest exemplu că frîna este constituită în așa fel încît lucrează numai la un anumit sens de învîrtire a roții pe care o frînează; o asemenea frînă se numește *ireversibilă*.

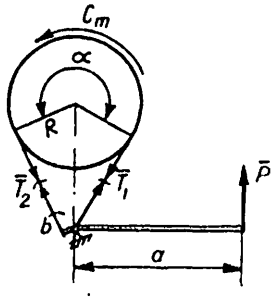


Fig. 7.16.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

7.14. Să se demostreze că diferența de tensiune dintre două puncte oarecare A și M, aflate pe o curbă lănțișor (fig. 7.17), este proporțională cu diferența ordonatelor dintre cele două puncte.

Răspuns: $dT=p\,dy$.

7.15. Un fir greu, omogen, este atîrnat în două puncte. Să se deducă următoarele expresii pentru raza de curbură a firului:

$$\rho=\frac{T^2}{p\cdot H}=\frac{y^2}{c}=\frac{c}{\cos^2\theta}.$$

Indicație și răspuns.

Ținînd seamă de definiția razei de curbură se obține succesiv:

$$\rho=\frac{\frac{y^3}{c^3}}{\frac{y}{c^2}}=\left(\frac{y}{c}\right)^2 c=\left(\frac{T}{p}\right)^2\cdot\frac{p}{H}=\frac{T^2}{p\cdot H}=\frac{c}{\cos^2\theta}.$$

7.16. O sîrmă de telegraf este fixată între doi stîlpi aflați pe aceeași orizontală, la o distanță de $2\,d$. Dacă săgeata maximă f a firului este mică în raport cu lungimea firului $2\,l$, să se demonstreze relația:

$$l\approx d+\frac{2}{3}\cdot\frac{f^2}{d}.$$

Indicație și răspuns.

Dezvoltînd în serie de puteri relația care dă lungimea firului, neglijînd termenii de ordin superior, avem succesiv:

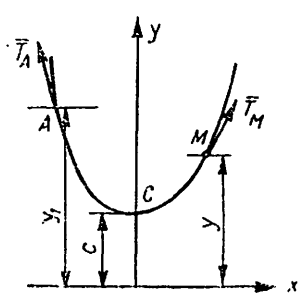
$$l=\frac{c}{d}\left(e^{\frac{d}{c}}-e^{-\frac{d}{c}}\right)\approx d\left(1+\frac{1}{6}\,\frac{d^2}{c^2}\right)$$

și admițînd $l^2-f^2\approx d^2$, se obține relația cerută.

7.17. Un lanț greu, omogen de lungime $2\,l$, este fixat de capetele sale în punctele A și B, aflate la același nivel. Notînd cu θ unghiul pe care tangenta în punctul de fixare B îl face cu orizontala, să se arate că săgeata f este dată de relația:

$$f=l\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Fig. 7.17.



Indicație și răspuns.

Se ține seamă de relațiile:

$$T-H=pf;\quad T=H\operatorname{ch}\frac{x}{c}\quad\text{și}\quad l=\frac{H}{p}\operatorname{tg}\theta.$$

7.18. Un conductor electric de cupru, de lungime $2\,l$, este întins între doi stîlpi A și B, așezați la o distanță $2\,d$ unul de altul. Greutatea pe metru liniar de conductor este p, iar săgeata firului este f. Notînd cu Q greutatea cablului, să se determine tensiunea din fir în punctul B și tensiunea din punctul C. Capetele A și B ale firului sînt la aceeași înălțime (fig. 7.18). *Aplicație* $2\,l=40$ m ; $p=6$ N/m.

Indicație și răspuns.

Din relația $T-H=pf$ și $T^2-H^2=p^2\cdot l^2$, dedusă din triunghiul de echilibru al forțelor, rezultă :

$$T=\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{l^2}{f}+f\right)=\frac{l^2+f^2}{4lf}\,Q\,;$$

$$H=\frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{f^2}-f\right)=\frac{l^2-f^2}{4lf}\,Q.$$

Pentru aplicația numerică se află :

$$T=3\,001{,}2\text{ N}\,;\quad H=2\,998{,}8\text{ N}.$$

7.19. Traversarea unei șosele cu un fir de telegraf impune o înălțime minimă $a=6{,}50$ m. Să se determine înălțimea stîlpilor, știind că distanța dintre ei este de 50 m, greutatea pe metrul de fir conductor este de 4 N, iar tensiunea medie nu trebuie să depășească valoarea de 4 400 N (fig. 7.19).

Indicație și răspuns.

Asimilînd lungimea firului cu distanța $2\,l$ dintre stîlpi și introducînd datele problemei, rezultă :

$$f=\frac{l^2}{2T_m}\,p=0{,}28\text{ m}$$

și

$$h=a+f=6{,}78\text{ m}.$$

7.20. Un om vrea să coboare cu ajutorul unei frînghii, înfășurate de două ori în jurul unui tambur fix. Pentru aceasta, sprijinindu-se într-un nod făcut la un capăt al frînghiei, trage de celălalt capăt. Care este forța ce o va întrebuința pentru a echilibra propria sa greutate de 750 N ($\mu=0{,}155$) ?

Indicație și răspuns.

Între Q, greutatea omului și P, forța de tracțiune, există relația :

$$Q-P=Pe^{\mu\alpha},$$

Fig. 7.18.

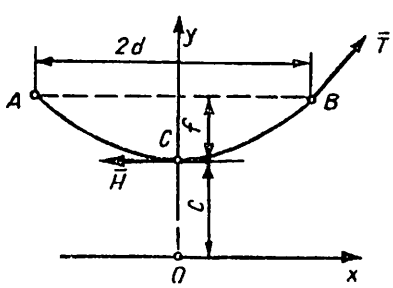
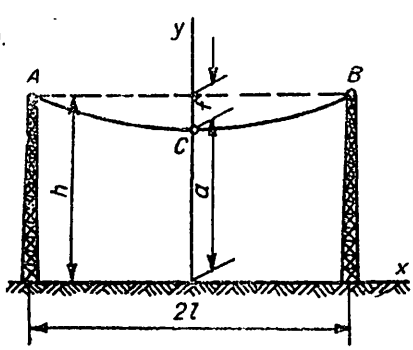


Fig. 7.19.



de unde:

$$P=\frac{Q}{1+e^{\mu\alpha}}=93{,}6\text{ N}.$$

7.21. Ce forță trebuie aplicată la capătul pîrghiei OA pentru ca sistemul dat să nu se rotească sub acțiunea greutății Q, coeficientul de frecare al curelei de roată fiind μ (fig. 7.20). Se neglijează frecarea în articulație și în axul troliului.

Aplicație: $Q=400$ N; $R=0{,}6$ m; $r=0{,}2$ m; $\mu=0{,}25$; $OB=AB$.

Indicație și răspuns.

Luînd momentele celor trei forțe în raport cu axul O', se obține:

$$F=\frac{T_2}{2}=a\frac{r}{2R}\cdot\frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi}-1},$$

iar pentru aplicație

$$F=122\text{ N}.$$

7.22. O frînă reversibilă trebuie să echilibreze un cuplu C_m, aplicat asupra axului unei roți cu raza R (fig. 7.21). Unghiul de înfășurare α, iar coeficientul de frecare dintre panglică și roată μ. Panglica este acționată de o pîrghie articulată în O' și avînd brațele a și b. Să se determine forța P. Discuție.

Indicație și răspuns.

$$P=\frac{C_m}{R}\cdot\frac{e^{\mu\alpha}+1}{e^{\mu\alpha}-1}\cdot\frac{b}{a+b}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot$$

Frîna este reversibilă, efortul P depus pentru frînare este același pentru ambele sensuri, deoarece expresia:

$$C_m\frac{e^{\mu\alpha}+1}{e^{\mu\alpha}-1}$$

rămîne neschimbată.

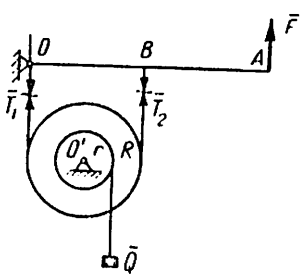


Fig. 7.20.

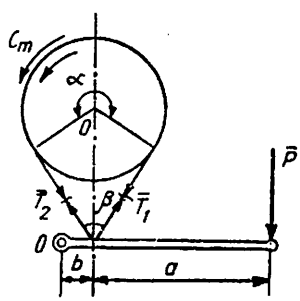


Fig. 7.21.

PARTEA A DOUA

CINEMATICA

Capitolul 8

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

A. CONSIDERAŢII TEORETICE

1. **Cinematica** studiază mişcarea punctului în funcţie de timp, fără a lua în considerare forţele.

Traiectoria este locul geometric al poziţiilor succesive pe care le ocupă punctul material în mişcarea sa. Este locul geometric al extremităţii vectorului de poziţie a funcţiei vectoriale de argument scalar:

$$\bar{r}=\bar{r}(t)=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k} \qquad (a)$$

unde

$$x=x(t); \qquad y=y(t); \qquad z=z(t), \qquad (b)$$

proiecţiile vectorului de poziţie pe sistemul triortogonal *xoyz*, reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei (fig. 8.1.)

2. **Viteza medie** $\bar{v}_m$ într-un interval de timp Δt, este raportul

$$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \qquad (c)$$

dintre variaţia vectorului de poziţie şi timpul corespunzător.

Viteza instantanee a mobilului, în diferite poziţii pe traiectorie, este limita vitezei medii cînd $\Delta t\to 0$ şi are ca expresii:

$$\bar{v}=\dot{s}\bar{\tau}=\dot{\bar{r}}. \qquad (d)$$

Aci $s=s(t)$ este legea orară a mişcării, iar $\bar{\tau}$ versorul tangentei la traiectorie în punctul respectiv.

Acceleraţia liniară este prima derivată în raport cu timpul a vectorului viteză şi a doua derivată în raport cu timpul a vectorului de poziţie a punctului respectiv

$$\bar{a}=\dot{\bar{v}}=\ddot{\bar{r}}. \qquad (e)$$

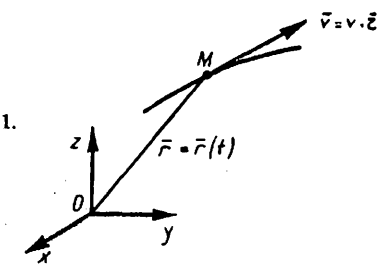


Fig. 8.1.

Viteza areolară $\bar{\Omega}$ caracterizează modul în care vectorul de poziție descrie elementul de arie $\overline{\Delta A}=\frac{1}{2}\bar{r}\times\overline{\Delta r}$, parcurs de raza vectoare al acelui mobil, și este definită de relațiile:

$$\bar{\Omega}=\frac{1}{2}\bar{r}\times\bar{v}=\Omega_x\bar{i}+\Omega_y\bar{j}+\Omega_z\bar{k}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}. \qquad (f)$$

Accelerația areolară și proiecțiile sale sînt exprimate prin relațiile:

$$\bar{\Gamma}=\frac{1}{2}\bar{r}\times\bar{a}=\Gamma_x\bar{i}+\Gamma_y\bar{j}+\Gamma_z\bar{k}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x & y & z\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\end{vmatrix}. \qquad (g)$$

Cunoscînd legea de variație $\theta=\theta(t)$ a poziției unui mobil în mișcare pe o traiectorie circulară, *viteza unghiulară instantanee* ω și *accelerația unghiulară* instantanee ε sînt definite de relațiile:

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}(t);\quad \varepsilon=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot{\theta}(t). \qquad (h)$$

Hodograful vitezelor este locul geometric al extremității vectorilor echipolenți cu vectorii viteză, duși dintr-un același punct O numit *pol* (fig. 8.2). Viteza pe curba hodograf este accelerația punctului în mișcarea sa pe traiectorie

$$\bar{v}_h=\dot{\bar{v}}=\bar{a}. \qquad (i)$$

Componentele vitezei și accelerației unui mobil în diferite sisteme de axe de coordonate în plan (carteziene, polare, intrinseci), și în spațiu (carteziene, cilindrice, sferice) sînt înscrise în tabela anexă 3.

3. **Raza de curbură** ρ într-un punct al traiectoriei este dată de una din relațiile:

$$\rho=\frac{v^3}{|\bar{v}\times\bar{a}|}=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{3/2}}{[(\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y})^2+(\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z})^2+(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})^2]^{1/2}}. \qquad (j)$$

4. **Printre mișcările particulare** importante ale punctului sînt mișcarea rectilinie și mișcarea circulară.

4.1. *Mișcarea rectilinie* poate fi:

— *uniformă*, caracterizată prin viteza constantă, pentru care accelerația este nulă, iar spațiul variază liniar cu timpul:

$$v=v_0;\quad a=0;\quad s=s_0+v_0t; \qquad (k)$$

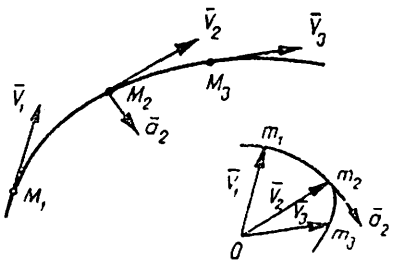


Fig. 8.2.

— *uniform variată*, caracterizată prin faptul că accelerația punctului este constantă tot timpul miș-

cării. Într-o asemenea mișcare viteza este liniară, iar legea mișcării este de tip parabolic. Ca urmare:

$$a=a_0;\quad v=v_0+at;\quad s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \qquad (l)$$

mișcarea este uniform *accelerată, sau uniform decelerată,* după cum produsul scalar $\bar{v}\cdot\bar{a}$ este pozitiv sau negativ. În cazul căderii corpurilor în vid $a_0=g$ (accelerația pământească).

Reprezentarea legii de variație a vitezei, accelerației și spațiului în funcție de timp sînt denumite diagramele mișcării.

Mișcarea rectilinie oscilatorie armonică este definită de legea:

$$x=c+x_0\sin(\omega t+\varphi) \qquad (m)$$

din care rezultă:

$$\dot{x}=x_0\omega\cos(\omega t+\varphi);\quad \ddot{x}=-x_0\omega^2\sin(\omega t+\varphi)=-\omega^2(x-c) \qquad (n)$$

Aici:

ω pulsația, este numărul de perioade în 2π unități de timp; $T=\frac{2\pi}{\omega}$, perioada mișcării: (o)

$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$, frecvența mișcării, x elongația, x_0 amplitudinea mișcării (elongația maximă), $\omega t+\varphi$ faza mișcării; φ faza la originea timpului. Punctul de abscisă $x=c$, pentru care accelerația este nulă, este centrul de oscilație.

Diagramele mișcării sînt reprezentate prin sinusoide, care se pot construi fie cu ajutorul formulelor, fie grafic, fie prin vectori rotitori, folosiți în tehnica vibrațiilor (fig. 8.3)

Vectori rotitori. Pentru ușurința trasării diagramelor mișcării, se ia ca variabilă $\omega t=\theta$, reprezentarea făcîndu-se astfel în funcție de unghi.

Spațiul x este proiecția OP a vectorului $\overline{OM}$.

Viteza este proiecția pe aceeași axă a vectorului $\overline{OV}$ în avans față de vectorul $\overline{OM}$ cu $\frac{\pi}{2}$ și avînd amplitudinea multiplicată cu ω.

Accelerația, $a=-\omega^2x$, pentru $c=0$, este reprezentată prin proiecția vectorului $\overline{OA}$, în opoziție de fază cu $\overline{OM}$.

Mișcarea oscilatorie amortizată este definită de legea:

$$x=x_0e^{-\delta t}\sin(\omega_1 t+\varphi). \qquad (p)$$

unde ω_1 este pseudopulsația.

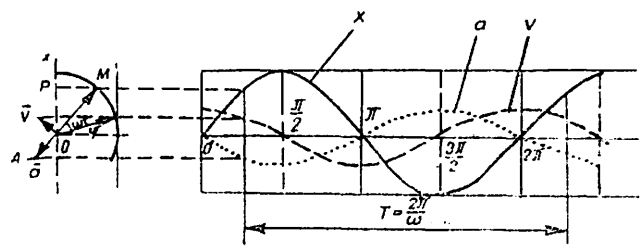


Fig. 8.3.

Amplitudinile mișcării descresc în progresie geometrică, pentru valori ale timpului care diferă cu o pseudoperioadă (fig. 8.4), $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$, unde $\omega_1^2=\omega^2-\delta^2$. (*q*)

4.2. *Mișcarea circulară* a mobilului poate fi definită în diferite sisteme de coordonate: carteziene, polare plane sau intrinseci, a căror viteze și accelerații sînt înscrise în tabela 8.1.

Tabela 8.1.

Componentele vitezei și accelerației

sistem de coordonate	coordonate	viteze	accelerații
a) carteziene	$x=R\cos\theta$ $y=R\sin\theta$	$v_x=\dot{x}=-R\dot{\theta}\sin\theta$ $v_y=\dot{y}=R\dot{\theta}\cos\theta$ $v=R\omega=R\dot{\theta}$	$a_x=\ddot{x}=\dot{v}_x=-R\dot{\theta}^2\cos\theta-R\ddot{\theta}\sin\theta$ $a_y=\ddot{y}=\dot{v}_y=-R\dot{\theta}^2\sin\theta+R\ddot{\theta}\cos\theta$ $a=R\sqrt{\dot{\theta}^4+\ddot{\theta}^2}$
b) polare plane	$r=R=ct$ $\theta=\theta(t)$	$v_r=\dot{r}=0$ $v_\theta=R\dot{\theta}=R\omega$	$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-R\omega^2$ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=R\varepsilon$ $a=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$
c) intrinseci	$s(t)=R\cdot\theta(t)$	$\bar{v}=\dot{s}\bar{\tau}=R\omega\bar{\tau}$	$\bar{a}=R\varepsilon\bar{\tau}+R\omega^2\bar{n}$ $a=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$

5. **Mișcarea relativă a punctului.** Mișcarea absolută este mișcarea punctului în raport cu sistemul fix, căreia îi corespund viteza și accelerația absolută.

Mișcarea relativă a punctului este mișcarea acestuia față de triedrul mobil. Viteza și accelerația mobilului se consideră în raport cu triedrul mobil (fig. 8.5).

Mișcarea de transport este mișcarea punctului în raport cu sistemul fix, cînd încetează mișcarea relativă.

Vectorul de poziție $\bar{r}_1$ al mobilului raportat la sistemul fix (fig. 8.5) este dat de relația:

$$\bar{r}_1=\bar{r}_0+\bar{r}. \qquad (r)$$

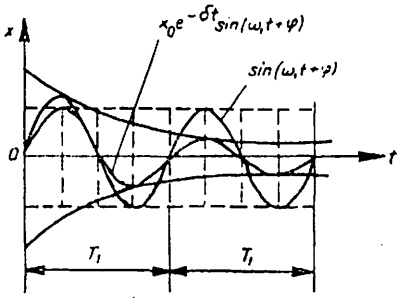


Fig. 8.4.

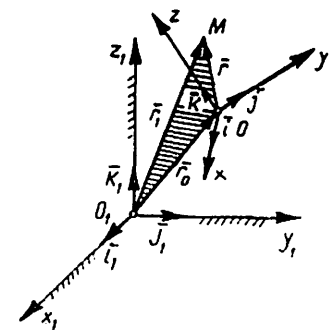


Fig. 8.5.

În orice moment între vitezele absolută $\bar{v}_a$, relativă $\bar{v}_r$ și de transport $\bar{v}_t$ există relația:

$$\bar{v}_a=\bar{v}_r+\bar{v}_t \qquad (s)$$

cu notațiile:

$$\bar{v}_a=\dot{\bar{r}}_1; \quad \bar{v}_r=\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}; \quad \bar{v}_t=\dot{\bar{r}}_0+\bar{\omega}\times\bar{r} \qquad (t)$$

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ fiind derivata locală.

Acceleraţiile în mişcarea relativă, se compun după relaţia

$$\bar{a}_a=\bar{a}_r+\bar{a}_t+\bar{a}_c \qquad (u)$$

unde $\bar{a}_a=\ddot{\bar{r}}_1$ este acceleraţia absolută;

$\bar{a}_r=\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2}$ este acceleraţia relativă: (v)

$\bar{a}_t=\bar{a}_0+\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$ acceleraţia de transport, iar (w)

$$\bar{a}_c=2\bar{\omega}\times\bar{v}_r=2\bar{\omega}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \qquad (x)$$

este acceleraţia complementară (Coriolis), în care $\bar{\omega}$ este viteza unghiulară de transport, iar $\bar{v}_r$ viteza relativă. Acceleraţia Coriolis este nulă cînd viteza unghiulară de transport este nulă, şi cînd vectorii $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_r$ sînt coliniari.

B. PROBLEME REZOLVATE

8.1. Sirena unei geamanduri emite sunete din 10 în 10 s. Ce interval de timp desparte două sunete pentru un observator de pe vapor, care se depărtează cu o viteză constantă v de 40 km/h?

Rezolvare. Problema se va rezolva grafic (fig. 8.6).

Prin punctele O şi G luate pe axa x-lor, distanţate la scară cu $t=10$ s, se duc dreptele OF şi CG, reprezentînd legea de propagare a sunetului ($\operatorname{tg}\alpha=c$, în care c este viteza sunetului).

Considerînd la scară, OA spaţiul iniţial dintre geamandură şi vapor, dreapta AC reprezintă legea de mişcare a vaporului, în care $\operatorname{tg}\beta=v$ este viteza vaporului.

Din grafic se vede că $EC=t_1$, timpul care se scurge între două sunete consecutive auzite de observatorul de pe vapor.

Din triunghiurile dreptunghice DEF şi DEC, se deduce:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{EF}{EC} \quad \text{sau} \quad \frac{t_1-t}{t_1}=\frac{v}{c},$$

astfel încît:

$$t_1=t\frac{c}{c-v}.$$

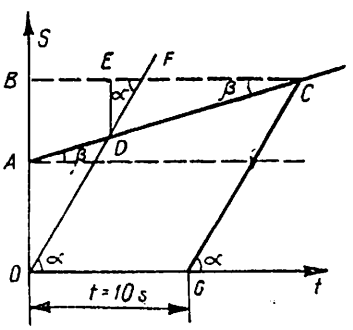


Fig. 8.6.

Cînd c tinde către infinit, cazul undelor luminoase, t_1 tinde către t. De asemenea, cînd observatorul stă pe loc, $v=0$ și deci $t_1=t$.

Aplicînd datele problemei și luînd $c=340$ m/s, rezultă:

$$t_1=10{,}3 \text{ s.}$$

8.2. Un război de țesut pînză, avînd o viteză de lucru de 0,06 m/min, este pornit la ora 7. După $t_0=45$ min este pornit un alt război. Cu ce viteză trebuie să lucreze cea de-a doua mașină pentru a produce pînă la ora 13 același metraj de pînză ca primul război? Care este metrajul de pînză debitat?

Rezolvare.

Metoda analitică. Luînd ca origine a timpului momentul pornirii primului război, legile spațiului, corespunzătoare celor două mașini, sînt date de ecuațiile:

$$s_1=v_1 \cdot t; \qquad s_2=v_2(t-t_0).$$

Pentru un același metraj spațiile sînt egale, de unde

$$v_2=v_1 \frac{t}{t-t_0}.$$

La ora 13, deci pentru $t=6$ ore, rezultă:

$$v_2=0{,}0685 \text{ m/min.},$$

iar metrajul debitat va fi:

$$s_1=s_2=21{,}6 \text{ m.}$$

Metoda grafică. Din diagrama de funcționare a ambelor războaie (fig. 8.7) se deduce variația spațiului în raport cu timpul:

$$v_2=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{CB}{AB},$$

din care, la scara desenului, rezultă aceeași valoare pentru viteza v_2

8.3. Două mobile M_1 și M_2 pornesc simultan din același punct A, cu vitezele constante v_1 și v_2, descriind o traiectorie rectilinie D (fig. 8.8). După cît timp de la pornire, unghiul φ, sub care se văd mobilele dintr-un punct P aflat la depărtarea h de dreapta D, este maxim?

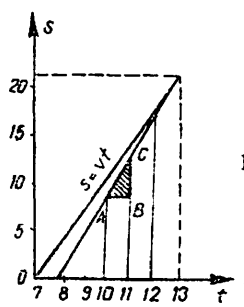


Fig. 8.7.

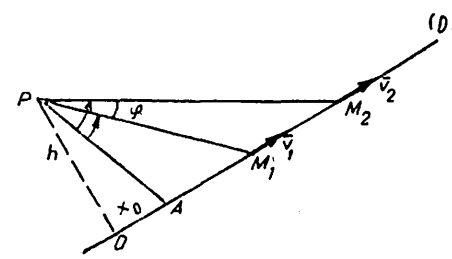


Fig. 8.8.

Rezolvare. Se ia ca origine a spațiului, punctul O, piciorul perpendicularei dusă din P pe dreapta D, notîndu-se cu x_0 distanța OA. La timpul t abscisele mobilelor M_1 și M_2 sînt respectiv:

$$x_1 = OM_1 = x_0 + v_1 t$$
$$x_2 = OM_2 = x_0 + v_2 t \qquad (v_2 > v_1)$$

Din triunghiurile OPM_2 și OPM_1 se deduce:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\widehat{OPM_2} - \widehat{OPM_1}) = \frac{\frac{x_0+v_2 \cdot t}{h} - \frac{x_0+v_1 \cdot t}{h}}{1+\frac{(x_0+v_1 . t)(x_0+v_2 \cdot t)}{h^2}}.$$

Derivînd în raport cu t și făcînd reducerile, se obține:

$$(\operatorname{tg}\varphi)' = \frac{h(v_2-v_1)(h^2+x_0^2-v_1 \cdot v_2 \cdot t^2)}{[h^2+(x_0+v_1 . t)(x_0+v_2 \cdot t)]^2}.$$

unghiul φ este maxim pentru:

$$t = \frac{\sqrt{x_0^2+h^2}}{\sqrt{v_1 \cdot v_2}} = \frac{PA}{\sqrt{v_1 \cdot v_2}}.$$

8.4. Vătala unui război de țesut are o lungime $l = 800$ mm și, față de poziția normală, oscilează în ambele sensuri, cu un unghi de 7°10′ (fig. 8.9). Știind că atunci cînd trece prin poziția normală C are o viteză egală cu 1,6 m/s, se cere:

a) ecuația mișcării vătalei:
b) turația manivelei care, prin intermediul bielei, acționează vătala;
c) perioada mișcării:
d) valoarea accelerației la $t = \frac{T}{6}$.

Rezolvare. a) Vătala avînd o mișcare oscilatorie, ecuația mișcării este:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Dacă se ia ca origine a timpului momentul în care vătala trece prin punctul C cu viteza V_0, se obține:

$$0 = x_0 \sin\varphi; \qquad v_0 = x_0 \omega \cos\varphi.$$

Din prima ecuație se deduce $\varphi = 0$, astfel încît a doua ecuație devine: $v_0 = x_0\omega$ și $\omega = v_0/x_0 = \frac{1\,600}{100}$ s^{-1}. Unghiul de oscilație fiind mic, amplitudinea poate fi asimilată cu jumătatea coardei AB:

$$x_0 = AD \sin 0 = 800 \cdot 0{,}125 = 100 \text{ mm},$$

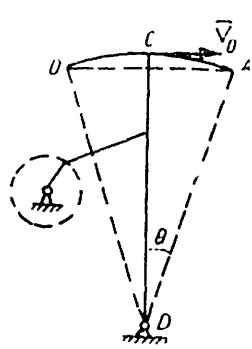


Fig. 8.9.

astfel încît ecuaţia mişcării este:

$$x=100\sin\left(\frac{1\,600}{100}t\right)=100\sin 16t.$$

b) Turaţia n a manivelei se poate determina cunoscînd pulsaţia:

$$\omega=2\pi f;\quad f=\frac{\omega}{2\pi}\text{ rot/s}=\frac{16}{6{,}28}=2{,}55\text{ rot/s}.$$

de unde:

$$n=60f=60\cdot 2{,}5=153\text{ rot/min}$$

c) Perioada este:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{6{,}28}{16}=0{,}392\text{ s}.$$

d) Acceleraţia este dată de relaţia:

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x=-16^2\cdot 0{,}1\sin\left(16\frac{0{,}392}{6}\right)=-22{,}2\text{ m/s}^2.$$

8.5. Paletele unui anemometru, aflate iniţial în repaus, sînt acţionate de un curent de aer, căpătînd o mişcare uniform accelerată. După 4 s de la începerea mişcării paleta are 5 rot/s. Să se determine:

a) viteza unui punct M al paletei situat la distanţă de 20 cm de axul de rotaţie, după 3 secunde de la pornire:

b) acceleraţiile punctului M;

c) numărul de ture efectuate de o paletă în 4 s de la pornire.

Rezolvare. a) Paleta anemometrului are o mişcare de rotaţie, cu acceleraţia unghiulară constantă ε. Viteza unghiulară a paletei va fi:

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t \tag{1}$$

ar viteza punctului M

$$v=r\cdot\omega=r\omega_0+r\varepsilon t. \tag{2}$$

Deoarece $\omega_0=0$, paleta pornind din stare de repaus, relaţia (1) devine:

$$\omega=\varepsilon t,$$

de unde:

$$\varepsilon=\frac{\omega}{t}=\frac{2\pi n}{t}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 5}{4}=7{,}85\text{ s}^{-2},$$

iar viteza punctului M după 3 s de la pornire, devine:

$$v=0{,}2\cdot 7{,}85\cdot 3=4{,}71\text{ m/s}.$$

b) Acceleraţia punctului M al paletei are două componente:

— acceleraţia tangenţială, constantă:

$$a_\tau=r\cdot\varepsilon=0{,}2\cdot 7{,}85=1{,}57\text{ m/s}^2;$$

— acceleraţia normală variabilă :

$$a_n = r\omega^2 = r \cdot \varepsilon^2 \cdot t^2 = 12{,}32\, t^2 \text{ m/s}^2,$$

c) Ştiind că : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, se poate scrie:

$$d\theta = \omega \cdot dt, \quad \text{de unde } \theta = \int \omega \cdot dt = \varepsilon \int_0^T t\, dt.$$

Integrînd rezultă :

$$\theta = \varepsilon \frac{T^2}{2} = 7{,}85 \cdot \frac{4^2}{2} = 62{,}8 \text{ rad},$$

iar numărul de ture :

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{62{,}8}{6{,}28} = 10 \text{ ture}.$$

8.6. Un corp este aruncat în vid sub un unghi α cu viteza v_0, ajungînd în punctul A din figura 8.10. Să se determine :

a) traiectoria descrisă de mobil,

b) viteza cu care ar trebui aruncat acelaşi corp sub un unghi 2α, pentru a ajunge tot în punctul A.

Rezolvare. a) Ecuaţiile parametrice de mişcare a corpului redus la un punct, sînt :

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad \text{şi} \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminînd parametrul variabil t între cele două ecuaţii, se obţine ecuaţia traiectoriei punctului :

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

care reprezintă o parabolă.

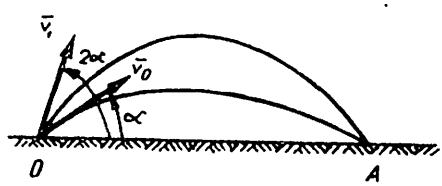
Considerînd că punctul A se găseşte în planul orizontal care trece prin originea traiectoriei, distanţa orizontală străbătută de corp (bătaia) este :

$$x_{max} = OA = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

b) În cel de-al doilea caz corpul străbătînd aceiaşi distanţă, rezultă

$$OA = \frac{v_1^2}{g} \sin 4\alpha.$$

Fig. 8.10.



Egalînd şi scoţînd valoarea lui v_1, se obţine:

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2\cos 2\alpha}}.$$

8.7. O uşă de tramvai, comandată central, are forma unui unghi diedru cu feţe egale (fig. 8.11, *a*). Cînd faţa *CDEF* se roteşte în jurul axei Δ, cealaltă faţă se deplasează cu vîrful *A* de-a lungul unui şanţ de ghidaj. Să se determine traiectoria şi viteza unui punct *M* de pe latura *AC*.

Rezolvare. Coordonatele punctului *M* în raport cu un sistem de axe ortogonale care trece prin *E* sînt:

$$x = (r+a)\cos\theta; \qquad y = (r-a)\sin\theta.$$

Eliminînd parametrul variabil θ din cele două ecuaţii, se obţine:

$$\frac{x^2}{(r+a)^2} + \frac{y^2}{(r-a)^2} = 1. \tag{1}$$

Traiectoria este o elipsă.

Pentru diferite poziţii ale punctului *M* în lungul laturii *AC*, traiectoria descrisă de acest punct va fi:

1) Pentru $a=0$, punctul *M* coincide cu *C* şi traiectoria este un cerc (fig. 8.11, *b*)

$$x^2+y^2=r^2.$$

2) Pentru $a=r$, punctul *M* coincide cu *A* şi pentru ca în acest caz ecuaţia (1) să aibă sens, deoarece numitorul termenului y devine nul, trebuie ca şi $y=0$, adică punctul *M*, să descrie dreapta *x*-ilor.

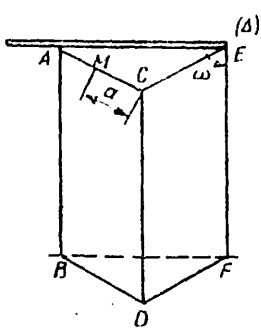
Proiecţiile vitezei pe cele două axe de coordonate sînt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -(r+a)\sin\theta\frac{d\theta}{dt};$$

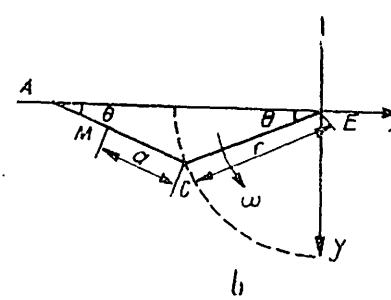
$$v_y = \frac{dy}{dt} = (r-a)\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Notînd $\frac{d\theta}{dt}=\omega$, rezultă:

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{(r+a)^2\cdot\omega^2\cdot\sin^2\theta + (r-a)^2\cdot\omega^2\cdot\cos^2\theta},$$



a



b

Fig. 8.11.

sau :

$$v=\omega\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos 2\theta}\,.$$

Observație. În cazurile particulare $a=0$ și $a=r$ se obține respectiv $v=\omega r$ și $v=2a\,\omega\sin\theta$.

8.8. O barcă dusă de curentul apei este trasă cu o funie spre punctul O de pe mal (fig. 8.12). Știind că viteza apei, $\bar{v}_1$ este constantă pe toată lățimea rîului, iar viteza de înfășurare a funiei este $\bar{v}_2$, să se determine traiectoria bărcii.

Rezolvare. Se consideră barca într-o poziție M definită de coordonatele polare φ și r. În raport cu sistemul de axe ales, componentele vitezei bărcii în lungul razei și pe o direcție perpendiculară sînt :

$$v_r=\dot{r}=-v_2 \quad \text{și} \quad v_n=r\dot{\varphi}=-v_1\sin\varphi. \tag{1}$$

Împărțind parte cu parte, rezultă :

$$\frac{dr}{r}=\frac{v_2}{v_1\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Integrînd, se obține :

$$\ln r=\frac{v_2}{v_1}\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\ln c. \tag{2}$$

La timpul $t=0$, barca pornind dintr-o poziție inițială definită prin coordonatele φ_0, r_0, se poate obține valoarea constantei de integrare C :

$$c=r_0\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}.$$

De unde rezultă traiectoria urmată de barcă :

$$r=r_0\operatorname{ctg}^{1/k}\frac{\varphi_0}{2}\operatorname{tg}^{1/k}\frac{\varphi}{2}, \tag{3}$$

unde s-a notat $\frac{v_1}{v_2}=k$.

8.9. Să se determine traiectoria bărcii din problema precedentă, în cazul cînd aceasta nu mai este trasă cu ajutorul unei funii, ci este îndreptată mereu de un vîslaș spre punctul O, cu viteza constantă $\bar{v}_2$. Discuție (fig. 8.13).

Rezolvare. În raport cu un sistem de axe carteziene (fig. 8.13) componentele vitezei bărcii se pot scrie :

$$\frac{dx}{dt}=v_1-v_2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;\quad \frac{dy}{dt}=-v_2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{1}$$

Fig. 8.12.

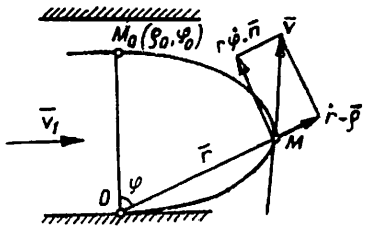
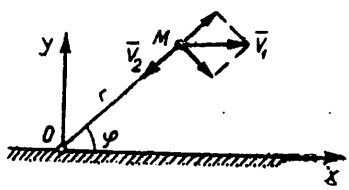


Fig. 8.13.



Ecuația diferențială a traiectoriei se obține prin eliminarea parametrului t din cele două relații:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{v_1}{v_2}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} + \frac{x}{y}. \tag{2}$$

Făcînd schimbarea de variabilă $x=yz$, ecuația (4) devine:

$$y\frac{dz}{dy} = -\frac{v_1}{v_2}\sqrt{z^2+1} \quad \text{sau} \quad -k\frac{dy}{y} = \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}$$

în care s-a notat $k=\frac{v_1}{v_2}$.

Integrînd, se obține:

$$-k\ln y + k\ln C = \ln(z+\sqrt{z^2+1}).$$

Trecînd la variabilele inițiale, rezultă:

$$\left(\frac{C}{y}\right)^k = \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}, \tag{3}$$

în care C este o constantă de integrare care depinde de coordonatele punctului de pornire al bărcii.

Relația (3) se mai poate scrie:

$$\left(\frac{y}{C}\right)^k = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}. \tag{4}$$

Ecuațiile (3) și (4) reprezintă traiectoria bărcii față de axele fixe Oxy.

Discuție. Dacă se adună și se scad relațiile (3) și (4), rezultă:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{2}\left[\left(\frac{C}{y}\right)^k + \left(\frac{y}{C}\right)^k\right]; \tag{5}$$

$$x = \frac{y}{2}\left[\left(\frac{C}{y}\right)^k - \left(\frac{y}{C}\right)^k\right]. \tag{6}$$

Pentru a determina legea mișcării, se elimină termenul $\sqrt{x^2+y^2}$ din ecuația (5) și a doua ecuație (1), obținîndu-se:

$$2v_2dt = -\left[\left(\frac{C}{y}\right)^k + \left(\frac{y}{C}\right)^k\right]dy. \tag{7}$$

Prin integrare se determină ecuația:

$$2v_2t = -\left[C^k\frac{y^{1-k}}{1-k} + \frac{1}{C^k}\cdot\frac{y^{k+1}}{k+1}\right],$$

reprezentînd legea mișcării.

a) $k<1$ (viteza de antrenare a bărcii este mai mare decît viteza apei).

Pentru ca barca să ajungă în O, trebuie ca ecuația (6) să fie satisfăcută de sistemul de valori $x=0$, $y=0$, reprezentînd coordonatele acestui punct. Aceasta impune ca termenul $\frac{y}{2}\left|\frac{C}{y}\right|^k$ să se anuleze pentru $y=0$, lucru care se întîmplă numai pentru $1-k>0$, adică $k<1$. În acest caz, traiectoria este tangentă în O, la axa Ox.

b) $k=1$ (cele două viteze sînt egale). Ecuația (6) devine:

$$x=\frac{y}{2}\left(\frac{C}{y}-\frac{y}{C}\right) \quad \text{sau} \quad y^2=C^2-2Cx,$$

reprezentînd o parabolă, avînd focarul în O și admițînd ca axă pe Ox. În acest caz barca va atinge punctul O într-un timp infinit de mare. Într-adevăr, integrînd ecuația diferențială (7) în cazul particular $k=1$, rezultă:

$$2v_2t=C\ln\frac{y_0}{y}+\frac{1}{2C}(y_0^2-y^2).$$

Ori, atunci cînd y tinde către zero, t tinde către infinit.

c) $k>1$; atunci cînd y tinde către zero, x tinde către infinit, deci barca nu va putea atinge niciodată malul.

8.10. Un avion din capul unei formații parcurge, într-un plan orizontal, un drum rectiliniu Δ, cu viteza constantă $\bar{v}_1$. Un al doilea avion, aflat în momentul inițial în același plan și la o distanță $OA=a$ de capul formației, direcția OA este perpendiculară pe direcția Δ, vrea să intre în formație. Pentru aceasta se deplasează tot timpul în direcția avionului din cap, cu viteza constantă $\bar{v}_2$ (fig. 8.14). Să se determine traiectoria descrisă de avion și timpul necesar pentru a intra în formație. Discuție.

Rezolvare. La un moment dat, avionul din capul formației se va găsi în D, după ce a parcurs drumul $OD=v_1\cdot t$, iar avionul al doilea se va găsi în $C(x, y)$ după ce a parcurs drumul $AC=s$. Știind că direcția vitezei v_2 trebuie să treacă tot timpul prin poziția actuală a avionului din cap, se poate scrie:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-OD}{x} \quad \text{sau} \quad x\frac{dy}{dx}=y-v_1\cdot t. \tag{1}$$

Pe de altă parte:

$$v_2^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \quad \text{de unde:} \quad \frac{dx}{dt}=-\frac{v_2}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \tag{2}$$

Diferențiind relația (1) în raport cu x, rezultă:

$$\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}-v_1\cdot\frac{dt}{dx}.$$

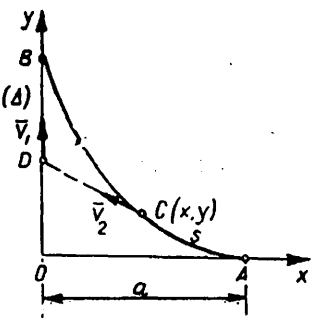


Fig. 8.14.

Ţinînd seamă şi de relaţia (2), se obţine ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{v_1}{v_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3}$$

Notînd: $\frac{v_1}{v_2}=k$ şi pentru a integra făcînd schimbarea de variabile: $\frac{dy}{dx}=z$, variabilele se separă şi se poate scrie:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=k\cdot\frac{dx}{x}.$$

Integrînd şi observînd că pentru $x=a$, $z=0$, rezultă:

$$z=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^k-\left(\frac{a}{x}\right)^k\right]. \tag{4}$$

Presupunînd mai întîi că cele două viteze nu sînt egale ($k\neq 1$) şi integrînd se obţine ecuaţia:

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)a^k}+\frac{a^k}{(k-1)x^{k-1}}\right]-\frac{ak}{k^2-1}, \tag{5}$$

reprezentînd traiectoria urmată de avion.

Timpul necesar pentru a intra în formaţie este:

$$t=\frac{OB}{v_1}. \tag{6}$$

Discuţie. a) Dacă $k>1$, curba este asimptotă la Oy, pentru că făcînd pe $x=0$, în ecuaţia (5), y devine infinit. Deci, în cazul cînd viteza avionului din cap este mai mare decît a avionului următor, acesta nu va putea ajunge niciodată în formaţie.

b) Dacă $k<1$, y devine finit pentru $x=0$, aşa încît avionul următor poate ajunge în formaţie.

c) Dacă $k=1$, ecuaţia (1) devine:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2a}-\frac{a}{2x}.$$

care integrată dă:

$$y=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2-a^2}{a}+\frac{a}{2}\ln\frac{a}{x}.$$

Se vede că atunci cînd $x=0$, y devine infinit, curba este şi de această dată asimptotă la Oy.

8.11. Un mobil M se mişcă pe o dreaptă oarecare OA cu viteza constantă v_0 după legea $OM=v_0t$, în timp ce dreapta OM se roteşte în jurul unei axe verticale oz cu viteza unghiulară constantă ω_0. Să se determine viteza şi acceleraţia mobilului.

Rezolvare. Notînd cu $\varphi=\omega_0 t$, unghiul pe care îl face planul *Moz*, cu planul *xoz*, în sistemul de axe triortogonal *xoyz*, cu θ unghiul constant al axelor *OM*, *oz*, coordonatele punctului *M* în raport cu triedrul*x oyz* sînt:

$$x=v_0 t \sin\theta \cos\omega_0 t\,; \quad y=v_0 t \sin\theta \cos\omega_0 t\,; \quad z=v_0 t \cos\theta.$$

Prin derivare, în raport cu timpul, unghiul θ fiind constant, rezultă:

$$\dot{x}=v_0 (\cos\omega_0 t-\omega_0 t \sin\omega_0 t)\sin\theta\,;$$

$$\dot{y}=v_0 (\sin\omega_0 t+\omega_0 t \cos\omega_0 t)\sin\theta\,;$$

$$\dot{z}=v_0 \cos\theta.$$

și apoi viteza:

$$v_M=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=v_0\sqrt{1+\omega_0^2 t^2}\sin\theta.$$

Printr-o nouă derivare se obține:

$$\ddot{x}=v_0 (-2\omega_0 \sin\omega_0 t-\omega_0^2 t \cos\omega_0 t)\sin\theta\,;$$

$$\ddot{y}=v_0 (2\omega_0 \cos\omega_0 t-\omega_0^2 t \sin\omega_0 t)\sin\theta\,;$$

$$\ddot{z}=0,$$

și ca urmare accelerația punctului este

$$a_M=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}=v_0\omega_0\sqrt{4+\omega_0^2 t^2}\sin\theta.$$

Accelerația punctului *M* se află într-un plan perpendicular pe axa *oz*.

8.12. Să se determine traiectoria unui mobil știind că aceasta este plană, iar componentele normale și tangențiale ale accelerației sînt constante. Se va admite ca origine a spațiului momentul în care viteza mobilului este nulă.

Rezolvare. Notînd cu C_1 și C_2 cele două constante ale accelerațiilor avem:

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=C_1\,; \quad a_\nu=\frac{v^2}{\rho}=C_2 \tag{1}$$

unde ρ este raza de curbură a traiectoriei.

Din relațiile de mai sus, în condițiile inițiale fixate se deduce:

$$v=C_1 t\,; \quad s=\frac{1}{2}C_1 t^2\,; \quad \rho=\frac{C_1^2 t^2}{C_2}=\frac{2C_1 s}{C_2}. \tag{2}$$

Cum $\rho=\frac{ds}{d\varphi}$, din ultima relație (2) rezultă:

$$\frac{ds}{s}=2\frac{C_1}{C_2}d\varphi, \tag{3}$$

din care se deduce prin integrare, ecuația traiectoriei

$$s=s_1 e^{\frac{2C_1}{C_2}\varphi}.$$

care este o spirală logaritmică.

8.13. Dîndu-se ecuația traiectoriei unui mobil $y=f(x)$ și componenta vitezei pe una din axe, să se afle componenta accelerației în lungul celeilalte axe.

Aplicații. 1) $ax+by=c$; $\dot{x}=d\cos kt$

2) $y^2=2px$; $\dot{y}=at$.

Rezolvare. a) Se cunoaște componenta vitezei pe axa Ox: Notînd $\dot{x}=\varphi(t)$, avem:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \text{deci} \quad \dot{y}=\dot{x}y'. \tag{1}$$

Derivînd a doua oară obținem:

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \quad \text{deci} \quad \ddot{y}=y''\dot{x}^3+\ddot{x}y'. \tag{ }$$

b) Se cunoaște componenta vitezei pe axa Oy. Notînd $\dot{y}=\psi(t)$, din relația (2) rezultă:

$$\ddot{x}=\frac{\ddot{y}}{y'}-\frac{y''}{y'^3}\dot{y}^2. \tag{3}$$

3) *Aplicația 1.* $\ddot{x}=-kd\sin kt$; $y'=-\frac{a}{b}$;

$$y''=0; \quad \ddot{y}=\ddot{x}y'=k\frac{a\cdot d}{b}\sin kt.$$

Aplicația 2. $y'=\frac{p}{y}$; $y''=-p\frac{y'}{y^2}=-\frac{p^2}{y^3}$; $\ddot{y}=a$

$$\ddot{x}=\frac{\ddot{y}}{y'}-\frac{y''}{y'^3}\dot{y}^2=\frac{a}{p}(at^2+y).$$

8.14. Să se afle traiectoria unui mobil știind că accelerația tangențială a_τ este constantă și că accelerația normală a_ν este proporțională cu raza de curbură.

Rezolvare. Notînd cu v viteza și cu ρ raza de curbură a traiectoriei din condițiile problemei, rezultă:

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=a=ct \text{ și } a_\nu=\frac{v^2}{\rho}=k^2\rho. \tag{1}$$

Integrînd prima ecuație și luînd în mod convenabil condițiile inițiale $t=0$: $v=0$ obținem:

$$v=at\ ;\ s=\frac{1}{2}at^2\ ;\ v^2=2as, \tag{2}$$

și ca urmare

$$v^2=k^2\rho^2=k^2\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2=2as$$

$$\frac{k\,ds}{\sqrt{2as}}=d\varphi$$

sau

$$s=\frac{a\varphi^2}{2k^2}+ct. \tag{3}$$

Ținînd seama de relațiile

$$dx=ds\cos\varphi\ ;\qquad dy=ds\sin\varphi,$$

în coordonate carteziene curba (3) este reprezentată prin ecuațiile parametrice:

$$x=\frac{a}{k^2}(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi);\quad y=\frac{a}{k^2}(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$$

care este desfășurata cercului de rază $\frac{a}{k^2}$.

8.15. Un piston cu orificii, aflat într-un cilindru cu ulei care servește drept mecanism de frînare (fig. 8.15), are la trecerea fluidului prin orificii o decelerație proporțională cu viteza $a=-kv$. Să se determine legile de mișcare și să se reprezinte diagramele de mișcare.

Rezolvare. 1. Ținînd seamă de definiția accelerației $a=\frac{dv}{dt}$, relația dată se scrie succesiv:

$$\frac{dv}{v}=-k\,dt\ ;\quad \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=-k\int_0^t dt;\quad \ln\frac{v}{v_0}=-kt.$$

Deci

$$v=v_0e^{-kt}. \tag{1}$$

2. Din legea de variație a vitezei și din definiția vitezei $v=\frac{ds}{dt}$ se obține succesiv:

$$\int_0^s ds=\int_0^t v_0e^{-kt}dt=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt}). \tag{2}$$

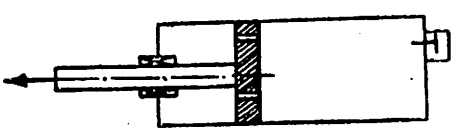


Fig. 8.15.

Diagramele de variație ale vitezei și spațiului, în funcție de timp, sînt reprezentate în figura 8.16,*a*.

Din eliminarea timpului între relațiile (1) și (2) rezultă o scădere liniară a vitezei cu deplasarea:

$$v=v_0-ks \tag{3}$$

reprezentată în figura 8.16,*b*.

8.16. O pană triunghiulară KLM, avînd lungimea $KM=b$ și înălțimea $KL=h$, se mișcă orizontal cu viteza $\bar{u}$, iar în timpul mișcării ridică supapa AB (fig. 8.17, *a*). Să se determine viteza de ridicare a supapei.

Aplicație: $b=20$ cm; $h=12$ cm; $u=2$ m/s.

Rezolvare. Supapa are față de pană o mișcare relativă, pana are o mișcare de transport, iar supapa are o mișcare absolută față de ghidajul ei, care face corp comun cu suportul penei.

Cunoscînd mărimea și direcția vitezei de transport $\bar{v}_t=\bar{u}$ precum și direcțiile celorlalte viteze, se poate construi triunghiul vitezelor PQR (fig. 8.17, *b*).

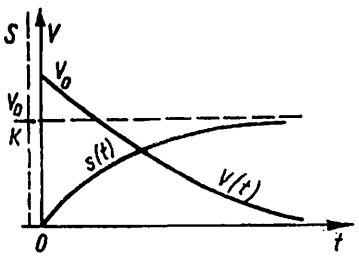
Din asemănarea triunghiurilor KLM și PQR, se deduce:

$$v_a=\frac{h}{b}v_t \quad \text{și} \quad v_r=\sqrt{v_a^2+v_t^2}.$$

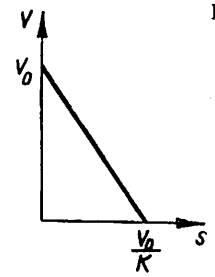
Introducînd datele problemei se obține:

$$v_a=\frac{h}{b}v_t=\frac{12}{20}\cdot 2=1{,}2\text{m/s}: \quad v_r=\sqrt{1{,}2^2+2^2}=2{,}33 \text{ m/s}.$$

8.17. Căruciorul unei macarale se deplasează de la centru spre periferia podului, cu viteza constantă u. În același timp, macaraua se rotește cu n rot/min (fig. 8.18). Să se determine viteza și accelerația absolută a căruciorului aflat într-o poziție oarecare.

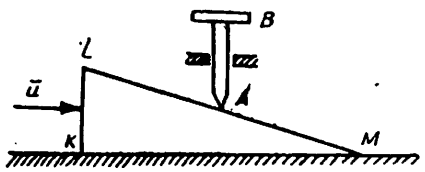


a

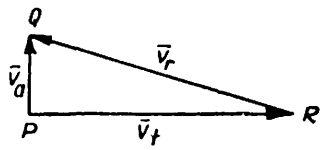


b

Fig. 8.16.



a



b

Fig. 8.17.

Rezolvare. Mişcarea de transport este o rotaţie, iar mişcarea relativă a căruciorului este o translaţie.

Viteza absolută a căruciorului într-un punct M, definit de unghiul θ şi raza r, este dată de relaţia (*s*) în care $v_r=u$ şi

$$v_t=r\omega=(r_0+v_rt)\omega=r_0\omega+ut\frac{\theta}{t}=r_0\omega+u\theta.$$

Vectorii viteză $\bar{v}_r$ şi $\bar{v}_t$ fiind perpendiculari unul pe celălalt, rezultă:

$$v_a=\sqrt{u^2(1+\theta^2)+r_0^2\omega^2+2r_0u\theta\omega}.$$

Acceleraţia absolută a căruciorului este dată de relaţia (*u*), în care:

$$a_r=0 \text{ (mişcarea uniformă)};$$

$$a_{t_v}=r\omega^2=(r_0+v_rt)\omega^2;$$

$$a_{t_r}=r\frac{d\omega}{dt}=0 \text{ (deoarece } \omega=ct).$$

Trebuie observat că acceleraţia tangenţială în mişcarea de transport este:

$$\frac{dv_t}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}$$

deoarece, prin definiţia vitezei de transport, se presupune că punctul care este transportat nu se deplasează:

$$a_c=2v_r\omega\sin(\bar{v}_r,\bar{\omega})=2u\omega,$$

(deoarece vectorul $\bar{v}_r$ este perpendicular pe vectorul $\bar{\omega}$).

Cum vectorii a_{t_v} şi a_c sînt perpendiculari, rezultă:

$$a_a=\sqrt{(r_0+ut)^2\omega^4+4u^2\omega^2}=\omega\sqrt{(r_0\omega+u\theta)^2+4u^2}.$$

8.18. La o maşină cu ineluşe, la un moment dat, turaţia unui fus, de diametru 70 mm, este de 6 000 rot/min (fig. 8.19). Ştiind că inelusul urmează o mişcare de translaţie, după o direcţie paralelă cu generatoarele fusului, cu o viteză constantă şi egală cu 0,85 m/s, să se determine viteza şi acceleraţia firului înfăşurat.

Rezolvare. Vitezele de transport şi relativă fiind

$$v_t=r\omega=r\frac{\pi n}{30}=\frac{0{,}035\cdot3{,}14\cdot6\,000}{30}=22 \text{ m/s};$$

$$v_r=0{,}85 \text{ m/s};$$

rezultă:

$$v_a=\sqrt{22^2+0{,}85^2}=22{,}02 \text{ m/s};$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{v_r}{v_t}=\frac{0{,}85}{22}=0{,}0386;\quad \theta=2°12'.$$

Fig. 8.18.

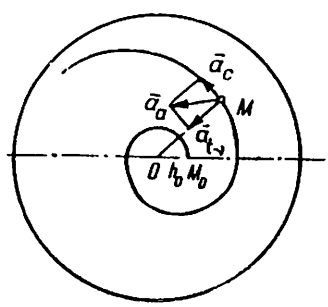
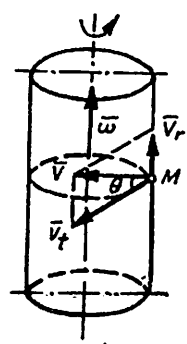


Fig. 8.19.



Concluzie: pentru a avea o înfășurare cît mai fină a firului pe țeavă, trebuie ca θ să fie cît mai mic, cu alte cuvinte v_r cît mai mic și turația țevii cît mai mare.

b) Mișcarea fiind uniformă avem: $a_r=0$.

Deasemenea:

$$a_t=a_v=r\omega^2=0{,}035\,\frac{\pi^2 6\,000^2}{30^2}=13\,800\ \text{m/s}^2;$$

$a_c=2\dot{\omega}\,v_r\sin(\bar{\omega},\bar{v}_r)=0$ (vectorii $\bar{v}_r$ și $\bar{\omega}$ fiind paraleli), din relația $\bar{a}_a=\bar{a}_r+\bar{a}_t+\bar{a}_c$ definită de (*u*), rezultă:

$$a_a=a_t=13\,800\ \text{m/s}^2.$$

8.19. Un mobil M se mișcă pe un cerc de rază R cu viteza unghiulară constantă ω_1. În același timp, întreg cercul se rotește în jurul diametrului AB, cu viteza unghiulară ω_2 (fig. 8.20). Să se determine:

a) viteza absolută și accelerația absolută a punctului M, știind că inițial a pornit din A;

b) pozițiile lui M în care accelerația complementară este nulă.

Aplicație: peutru $R=1$ m, $\omega_1=\omega_2=\pi\text{s}^{-1}$; $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Rezolvare. Considerînd la un moment dat mobilul în punctul M, viteza absolută este dată de relația (*a*), în care $v_r=R\omega_1$ și $v_t=MN\omega_2=R\sin\theta\cdot\omega_2$.

Vectorii fiind perpendiculari, rezultă:

$$v_a=\sqrt{R^2\omega_1^2+R^2\omega_2^2\sin^2\theta}=R\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2\sin^2\theta}.$$

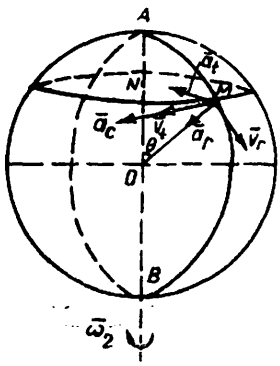
Mișcarea de transport fiind o rotație, accelerația absolută este dată de relația (*b*), în care:

$$a_r=R\omega_1^2;\quad a_t=R\sin\theta\cdot\omega_2^2;$$

$$a_c=2\omega_2\cdot v_r\sin(\bar{\omega}_2,\bar{v}_r)=2\omega_2 R\omega_1\cos\theta=2R\omega_1\cdot\omega_2\cos\theta.$$

Direcțiile și sensurile accelerațiilor sînt arătate în figură. Compunînd mai întîi accelerația de transport și accelerația relativă, care sînt în același plan, unghiul dintre ele fiind $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, se poate scrie:

Fig. 8.20.



$$a'=\sqrt{a_t^2+a_r^2+2a_ta_r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=$$

$$=\sqrt{R^2\omega_2^4\sin^2\theta+R^2\omega_1^4+2R^2\omega_1^2\cdot\omega_2^2\sin^2\theta}.$$

Accelerația absolută va fi rezultanta dintre a' și a_c, care fac între ele un unghi drept:

$$a_a=\sqrt{a'^2+a_c^2},$$

sau

$$a=R\sqrt{\omega_1^4+\omega_2^4\sin^2\theta+2\omega_1^2\omega_2^2(\sin^2\theta+2\cos^2\theta)}.$$

Pentru $R=1$, $\omega_1=\omega_2=\omega$, rezultă:

$$a_a=\sqrt{\omega^4+\omega^4\sin^2\theta+2\omega^4(\sin^2\theta+2\cos^2\theta)}=\omega^2\sqrt{4+\cos^2\theta}.$$

Pentru $\theta=\pi/4$ și $\omega=\pi s^{-1}$, accelerația absolută devine:

$$a_a=\pi^2\sqrt{4+\frac{2}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi^2=20{,}9\ m/s^2.$$

8.20. Un cerc O cu raza r se rotește în planul său, în jurul unui punct fix C, cu viteza constantă ω, în sens contrar mișcării acelor de ceasornic (fig. 8.21). Un punct M se mișcă pe acest cerc cu viteza unghiulară 2ω, în sensul mișcării acelor de ceasornic. În momentul inițial punctele M, O și C se află pe aceeași dreaptă. Să se determine traiectoria absolută a punctului M, viteza și accelerația lui.

Rezolvare.

Mișcarea punctului M pe cerc este mișcarea relativă, iar mișcarea cercului în jurul punctului C este mișcarea de transport.

Între viteze există relația:

$$\bar{v}_a=\bar{v}_r+\bar{v}_t, \qquad (1)$$

unde:

$$v_r=r\cdot 2\omega \quad \text{și} \quad v_t=MC\cdot\omega=2r\omega\cos\alpha, \quad \text{iar} \quad \alpha=\omega t.$$

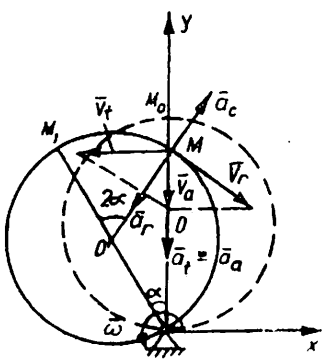
Din relația (1) se deduce viteza absolută:

$$v_a=\sqrt{v_r^2+v_t^2+2v_rv_t\cos(\bar{v}_r\cdot\bar{v}_t)}=2r\omega\sqrt{1+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha}=$$
$$=2r\omega\sin\omega t.$$

Accelerația absolută este dată de relația (M), în care:

$$a_r=(MO')(2\omega)^2=4r\omega^2;$$
$$a_t=(MC)\omega^2=2r\omega^2\cos\omega t;$$
$$a_c=2\omega\cdot v_r\sin\frac{\pi}{2}=4r\omega^2.$$

Fig. 8.21.



Accelerația complementară fiind egală și de sens contrar cu accelerația relativă, rezultă: $a_a=a_t=2r\omega^2\cos\omega t$.

Metoda analitică. Față de axele xCy, coordonatele punctului M sînt:

$$x=-(CO')\sin\alpha+(O'M)\sin(2\alpha-\alpha)=0;$$
$$y=(CO')\cos\alpha+(O'M)\cos(2\alpha-\alpha)=2r\cos\alpha,$$

de unde se deduce că punctul (M) se deplasează de la (M) la (C) cu viteza:

$$v_a=v_y=-2r\omega \sin \omega t,$$

avînd accelerația:

$$a_a=a_y=-2r\omega^2 \cos \omega t.$$

8.21. Un disc circular greu, aflat într-un plan vertical, cade în planul său sub acțiunea gravitației și în același timp se rotește în jurul centrului său, cu viteza uniformă ω. Să se studieze mișcarea unui punct M de pe periferia discului, determinînd viteza și accelerația absolută a punctului.

Rezolvare.

a) Mișcarea relativă este mișcarea punctului pe cerc, iar mișcarea de transport este mișcarea cercului pe verticală (fig. 8.22).

Viteza absolută a punctului (M) este:

$$\bar{v}_a=\bar{v}_r+\bar{v}_t \tag{1}$$

în care $v_r=r\omega$ și $v_t=gt$.

Mărimea vitezei absolute este:

$$v_a=\sqrt{v_r^2+v_t^2+2v_rv_t\cos(\bar{v}_r,\ \bar{v}_t)}. \tag{2}$$

Mișcarea de transport fiind de translație, accelerația lui Coriolis este nulă și deci:

$$\bar{a}_a=\bar{a}_r+\bar{a}_t$$

în care $a_r=r\omega^2$ și $a_t=g$.

Cum unghiul dintre cele două accelerații este $\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$, rezultă:

$$a_a=\sqrt{r^2\cdot\omega^4+g^2+2gr\omega^2\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}; \tag{4}$$

Observație. În afară de metoda întrebuințată, această problemă poate fi rezolvată și prin alte metode, după cum se arată mai jos.

Fig. 8.22.

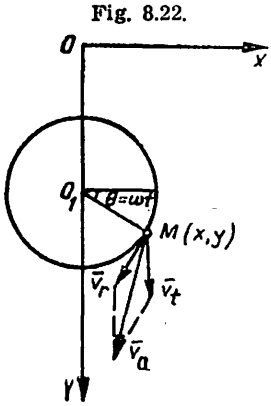
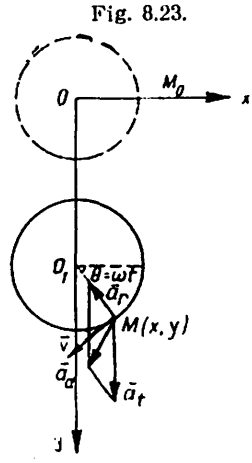


Fig. 8.23.



b) Metoda analitică. În raport cu axele de coordonate alese (fig. 8.23) coordonatele lui (M) la timpul t, sînt:

$$x=r\cos\omega t,\quad y=\frac{1}{2}gt^2+r\sin\omega t. \tag{5}$$

Traiectoria lui (M) este curba plană reprezentată parametric de ecuațiile de mai sus.

Componentele vitezei punctului (M) sînt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t; \tag{6}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = g \cdot t + r\omega \cdot \cos \omega t,$$

iar viteza este:

$$v_M = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + g^2 \cdot t^2 + 2r\omega \cdot g \cdot t \cos \omega t}. \tag{6'}$$

Se regăseşte expresia (2)

Componentele acceleraţiei sînt:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -r\omega^2 \cos \omega t: \tag{7}$$

$$a_y = g - r\omega^2 \sin \omega t,$$

iar acceleraţia este:

$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{r^2\omega^4 + g^2 - 2gr\omega^2 \sin \omega t}. \tag{7'}$$

Se regăseşte expresia (4).

8.22. O roată planetară de centru O_1 şi de rază r are o mişcare de rotaţie uniformă cu viteza unghiulară ω, în jurul unei axe proiectate în O, astfel încît $OO_1 = 2r$. În acelaşi timp, roata se învîrteşte în jurul centrului O_1 cu aceeaşi viteză unghiulară ω (fig. 8.24). Să se afle viteza şi acceleraţia unui punct M de pe marginea roţii.

Rezolvare

Metoda analitică. Se presupune că în poziţia iniţială, punctul se află în M_0, pe axa Ox, iar în timp ce discul s-a rotit cu unghiul θ, punctul M_0' s-a rotit cu unghiul θ, ocupînd astfel poziţia M (fig. 8.24).

Faţă de axele considerate, coordonatele punctului M sînt date de ecuaţiile parametrice:

$$x = 2r \cos \theta + r \cos 2\theta;$$
$$y = 2r \sin \theta + r \sin 2\theta.$$

Prin derivare se obţine:

$$v_x = -2r\omega \sin \omega t - 2r\omega \sin 2\omega t;$$
$$v_y = 2r\omega \cos \omega t + 2r\omega \cos 2\omega t,$$

relaţii din care, prin transformări succesive, se deduce:

$$v_M = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4r\omega \cos \frac{\omega t}{2}.$$

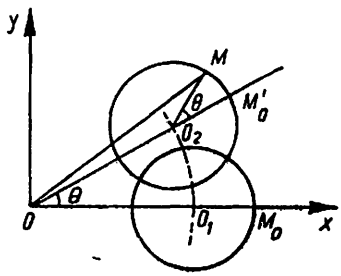


Fig. 8.24.

Valoarea acceleraţiei este:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2r\omega^2 \cos \omega t - 4r\omega^2 \cos 2\omega t;$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2r\omega^2 \sin \omega t - 4r\omega^2 \sin 2\omega t,$$

de unde:

$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2r\omega^2 \sqrt{5 + 4 \cos \omega t}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

8.23. Să se studieze mişcarea definită de ecuaţiile parametrice:

$$x = 2 \sin t; \quad y = \cos 2t.$$

Răspuns. Componentele vitezei şi acceleraţiei sînt:

$$\dot{x} = 2 \cos t; \quad \dot{y} = -2 \sin 2t; \quad a_x = \ddot{x} = -x; \quad a_y = \ddot{y} = -4y$$

Punctul are o mişcare oscilatorie pe traiectoria sa (fig. 8.25), care este porţiunea parabolei de ecuaţie $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$, cuprinsă în domeniul $t \in [-2, +2]$.

Mişcarea este rezultanta celor două mişcări oscilatorii armonice definite de ecuaţiile parametrice ale mişcării de direcţii perpendiculare şi avînd raportul perioadelor 2.

8.24. La ieşirea din ţeavă un proiectil are o viteză v_0. Ştiind că lungimea ţevii este l şi presupunînd că mişcarea proiectilului este uniform accelerată, să se determine timpul în care proiectilul străbate gura de foc. *Aplicaţie:* $v_0 = 900$ m/s; $l = 1{,}8$ m.

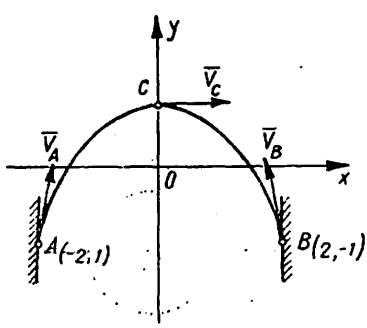
Indicaţie şi răspuns. Proiectilul avînd o mişcare uniform accelerată şi ţinînd seamă că $s_0 = 0$ şi $v_0 = 0$, ecuaţiile mişcării sale sînt:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \text{şi} \quad v = a \cdot t,$$

din care, eliminînd acceleraţia, se obţine:

$$t = \frac{2s}{v}.$$

Fig. 8.25.



Pentru aplicaţie se obţine $t = 0{,}004$ s.

8.25. O suveică are la intrarea în rost, o viteză v_1 iar la ieşirea din rost, viteza v_2. Ştiind că lungimea rostului este l, să se determine timpul de trecere al suveicii prin rost şi acceleraţia întîrzietoare.

Indicație și răspuns. Suveica avînd la trecerea prin rost o mișcare uniform întîrziată, din legile mișcării:

$$s=v_0\cdot t-\frac{1}{2}a\cdot t^2;\quad v=v_0-at \quad \text{și} \quad a=const.$$

se obține:

$$t=\frac{2s}{v_1+v_2} \quad \text{și} \quad a=\frac{v_1-v_2}{t}.$$

8.26. Să se arate că într-o mișcare uniform variată, viteza medie a mobilului între două momente t_1 și t_2 este egală cu media vitezelor din același interval de timp.

Indicație. Scriind legea de mișcare, exprimînd *media vitezelor* între două puncte și *viteza medie* în acel interval, se obține relația cerută.

8.27. Două trenuri, aflate la timpul $t=0$ la o distanță de 800 m, se deplasează unul către altul pe două linii paralele. Primul are o mișcare uniformă cu viteza $v_1=80$ km/h, iar al doilea o mișcare uniform accelerată cu viteza inițială $v_0=10$ km/h și accelerația de 1 m/s². Să se găsească timpul și punctul de întîlnire al trenurilor.

Indicație și răspuns. Însemnînd cu x distanța pe care o va parcurge primul tren din poziția inițială pînă la locul de întîlnire, ecuațiile mișcării sînt:

— pentru primul tren: $x=v_1\cdot t$;

— pentru trenul al doilea: $800-x=v_0\cdot t+\frac{1}{2}a\cdot t^2$,

și

$$v_2=v_0+a\cdot t.$$

Pentru valorile numerice date, diagramele mișcării trenurilor sînt arătate în figura 8.26, din care se deduce:

$$t=22{,}1\text{ s};\quad x=492\text{ m}.$$

8.28. Două mobile (fig. 8.27) pornesc în același moment, din punctele A_0 și B_0 situate pe axele perpendiculare Ox și Oy, îndepărtîndu-se spre originea O. Mișcarea mobilelor fiind uniform accelerată, să se determine: timpul la care distanța dintre cele două mobile va fi minimă și mărimea acestei distanțe.

Indicație și răspuns. Pornind de la ecuațiile de mișcare ale mobilelor:

$$x=x_0-\frac{1}{2}a_1t^2$$

și

$$y=y_0-\frac{1}{2}a_2t^2$$

Fig. 8.26

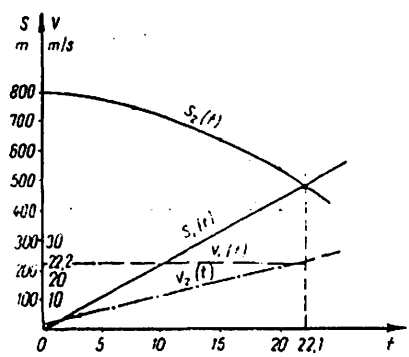
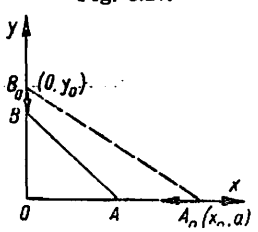


Fig. 8.27.



unde a_1 și a_2 sînt accelerațiile acestora, se calculează distanța AB

$$AB^2=d^2=\frac{1}{4}(a_1^2+a_2^2)t^4-(x_0a_1+y_0a_2)t^2+(x_0^2+y_0^2).$$

și din condiția de minim rezultă:

$$t=\sqrt{\frac{2(x_0\cdot a_1+y_0\cdot a_2)}{a_1^2+a_2^2}},$$

și ca urmare

$$d=\frac{y_0a_1-x_0a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}.$$

8.29. Se dă o mișcare definită prin ecuațiile parametrice:

$$x=at^2 \quad \text{și} \quad y=b-ct^2.$$

Să se determine:

1. traiectoria mobilului;
2. viteza și accelerația la timpul t.
3. Timpul în care mobilul se mișcă pe traiectoria în porțiunea cuprinsă între axele de coordonate.

Răspuns

1) $cx+ay=ab$
2) $v=2\sqrt{a^2+c^2}t$; $a=2\sqrt{a^2+c^2}$
3) $t=\sqrt{\frac{b}{c}}$.

8.30. Un tren intrînd în curbă, cu o viteză v, frînează, reducîndu-și viteza de k ori ($k>1$), după parcurgerea unei distanțe d. Știind că raza de curbură a căii ferate este ρ, să se determine accelerațiile trenului, precum și timpul în care ajunge la această viteză.

Indicație și răspuns.

Trenul avînd în curbă o mișcare uniform întîrziată, accelerația tangențială este:

$$a_\tau=\frac{v_1-v_2}{t}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{v_1}{t} \tag{1}$$

unde $v_1=kv_2$,

Eliminînd timpul t între relația (1) și legea spațiului

$$d=v_1t-\frac{1}{2}a_\tau t^2 \tag{2}$$

se obține:

$$a_\tau=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\frac{v_1^2}{d}; \quad t=\frac{2kd}{k+1}\cdot\frac{1}{v_1}; \quad a_v=\frac{(v_1-a_\tau t)^2}{\rho}.$$

Accelerația normală scade cu scăderea vitezei trenului.

8.31. O bielă AB se poate deplasa cu capetele sale de-a lungul a două şanţuri rectangulare (fig. 8.28). Să se determine:
a) traiectoria descrisă de un punct M al bielei ($AM=a$; $MB=b$);
b) viteza şi acceleraţia punctului M, cunoscînd viteza u a culisei A.

Indicaţie şi răspuns.
a) Traiectoria este elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

b) Proiecţiile vitezei punctului M pe axele de coordonate sînt:

$$v_x=-\frac{a}{a+b}u\operatorname{tg}\alpha;\quad v_y=\frac{b}{a+b}u$$

unde u este viteza extremităţii A a bielei de-a lungul şanţului OA.

c) $$a_x=\frac{a}{(a+b)^2}\cdot\frac{u^2}{\cos^2\alpha};\quad a_y=0.$$

8.32. O roată cu raza r se rostogoleşte fără să alunece pe un drum rectiliniu (fig. 8.29). Să se determine:
a) traiectoria şi viteza unui punct oarecare M de pe roată;
b) prin consideraţii cinematice, raza de curbură într-o poziţie oarecare a punctului pe traiectorie.

Indicaţie şi răspuns. Punctul M descrie cicloida $\bar{r}=r(\theta-\sin\theta)\,\bar{\imath}+r(1-\cos\theta)\bar{\jmath}$. Derivînd, se obţine viteza de modul $2r\dot{\theta}\sin\theta$, şi care trece prin A, diametralul opus punctului de contact I dintre roată şi drum. Acceleraţia, de modul $r\dot{\theta}^2\cos\theta$, trece prin centrul O' al cercului. Raza de curbură este

$$\rho=MC=\frac{v^3}{|\bar{v}\times\bar{a}|}=2MI.$$

8.33. Să se determine prin consideraţii de mecanică raza de curbură în mişcarea unui punct pe elicea circulară dreaptă de pas p (fig. 8.30).

Indicaţie şi răspuns. Prin derivarea coordonatelor unui punct oarecare M;

$$x=r\cos\theta;\quad y=r\sin\theta;\quad z=\frac{p}{2\pi}\theta=r\theta\operatorname{tg}\alpha;\quad \theta=f(t)$$

Fig. 8.28.

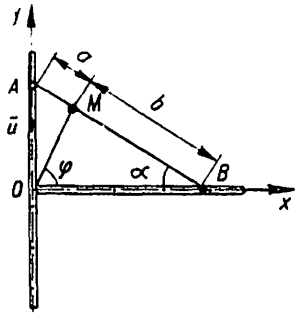
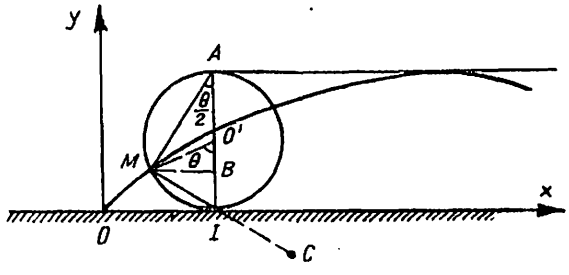


Fig. 8.29.



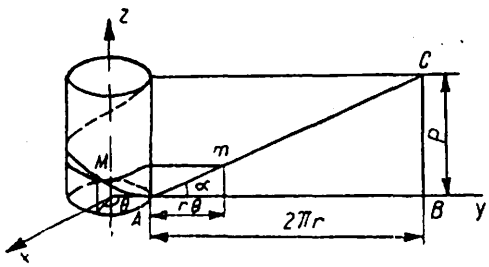


Fig. 8.30.

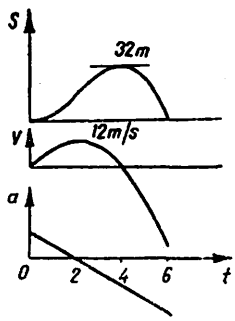


Fig. 8.31.

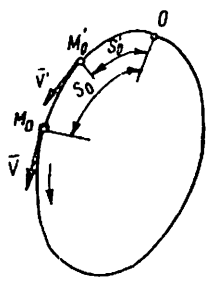
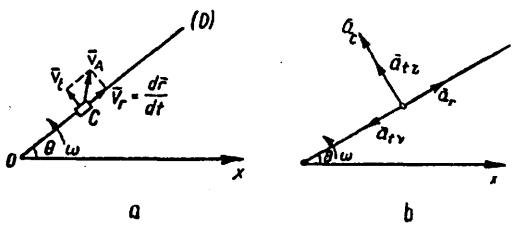


Fig. 8.32.



a b

Fig. 8.33.

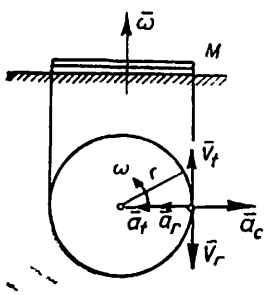


Fig. 8.34.

se obţine

$$\dot{x}=-r\dot{\theta}\sin\theta;\quad \dot{y}=r\dot{\theta}\cos\theta;$$

$$\dot{z}=r\dot{\theta}\operatorname{tg}\alpha;\quad v=\frac{r}{\cos\alpha}\dot{\theta}$$

$$\ddot{x}=-y\varepsilon-x\dot{\theta}^2;\quad \ddot{y}=x\varepsilon-y\dot{\theta}^2;$$

$$\ddot{z}=r\dot{\theta}\operatorname{tg}\alpha$$

şi

$$\rho=\frac{v^3}{|\bar{v}\times\bar{a}|}=\frac{r}{\cos^2\alpha}.$$

8.34. Să se studieze mişcarea rectilinie a unei particule definită de legea orară $s=-t^3+6t^2$ precizînd punctele caracteristice ale spaţiului, vitezei şi acceleraţiei, în funcţie de timp. Timpul se consideră în secunde iar spaţiul în metri.

Indicaţie şi răspuns. Din legea orară se obţine:

$$v=\dot{s}=-3t^2+12t \text{ şi } a=\ddot{s}=-6t+12.$$

Diagramele mişcării reprezentate în figura 8.31. arată drept puncte caracteristice pentru acceleraţie viteză şi spaţiu valorile corespunzătoare timpului de 2, 4, 6 secunde.

8.35. Două mobile parcurg o curbă închisă de lungime l, cu mişcări uniforme, avînd vitezele $\bar{v}$ şi $\bar{v}'$ $(v>v')$ figura 8.32. Care este timpul t_0 care separă două întîlniri succesive?

Indicaţie şi răspuns. Imprimînd sistemului o mişcare cu viteza $-v'$, faţă de al doilea mobil care rămîne imobil, primul se deplasează cu viteza constantă $v-v'$. Ca urmare:

$$t_0=\frac{l}{v\pm v'},$$

semnul negativ corespunzînd situaţiei în care cele două mobile se mişcă în sens contrar.

8.36. Pe bara D, care se roteşte în jurul axului O cu o viteză unghiulară $\bar{\omega}$, se deplasează culisa C cu o viteză constantă $\bar{u}$ (fig. 8.33, *a*). Să se determine viteza şi acceleraţia absolută a culisei.

Indicaţie şi răspuns. Culisa C de coordonate r, θ va avea o mişcare relativă în lungul barei D şi ca mişcare de transport o mişcare de rotaţie în jurul centrului o (fig. 8.33, *a*) Deci :

$$\bar{v}_a=\bar{v}_r+\bar{v}_t \quad \text{unde} \quad v_r=\frac{dr}{dt}=u \quad \text{şi} \quad v_t=r\frac{d\theta}{dt}=r\omega.$$

Pentru acceleraţia absolută :

$$\bar{a}_a=\bar{a}_r+\bar{a}_t+\bar{a}_c.$$

se regăsesc valorile :

$$a_D=a_r-a_v=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2;$$

$$a_P=a_t^n+a_c=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

ce reprezintă proiecţiile în lungul razei vectoare şi pe o direcţie perpendiculară pe ea (fig. 8.33, *b*).

8.37. Un punct material se mişcă pe un disc circular de raza r cu o viteză unghiulară constantă ω, în timp ce discul se mişcă în sens contrar, cu aceeaşi viteză unghiulară ω (fig. 8.34). Să se afle vitezele şi acceleraţiile absolute ale mişcării punctului. Discuţie pentru cazul $\omega_r \neq \omega_t$.

Indicaţie şi răspuns. Mişcarea punctului pe disc este o mişcare relativă, iar mişcarea discului este o mişcare de transport.

Vitezele unghiulare fiind aceleaşi, rezultă :

$$|\bar{v}_r|=|\bar{v}_t|=r\omega; \quad v_a=0$$

$$a_a=r\omega^2; \quad a_t=r\omega^2; \quad a_c=2r\omega^2$$

$$a_a=a_r+a_t-a_c=0.$$

Viteza şi acceleraţia absolută sînt nule.

Capitolul 9

CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Mișcarea unui rigid** (fig. 9.1) este perfect cunoscută cînd se poate determina traiectoria, viteza și accelerația oricărui punct al acestuia. Rigidul liber are șase grade de libertate. Pentru studiu se folosesc fie coordonatele unui punct și unghiurile lui Euler, fie două funcții vectoriale de timp

$$\bar{v}_0(t)=\dot{\bar{r}}_0(t), \tag{a}$$

ce reprezintă viteza originii triedrului mobil și vectorul rotație, definit de relația:

$$\bar{\omega}(t)=\bar{\omega}=\omega_x\bar{i}+\omega_y\bar{j}+\omega_z\bar{k} \tag{b}$$

Vitezele și accelerațiile sînt date respectiv de legile:

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}\,;\quad \bar{a}=\bar{a}_0+\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}), \tag{c}$$

unde:

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k},\quad \bar{v}_0=\bar{v}_{0x}\bar{i}+v_{0y}\bar{j}+v_{0z}\bar{k} \tag{d}$$

$$\dot{\bar{\omega}}=\bar{\varepsilon}=\varepsilon_x\bar{i}+\varepsilon_y\bar{j}+\varepsilon_z\bar{k}\,;\quad \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})=(\bar{\omega}\cdot\bar{r})\,\bar{\omega}-\omega^2\bar{r}. \tag{e}$$

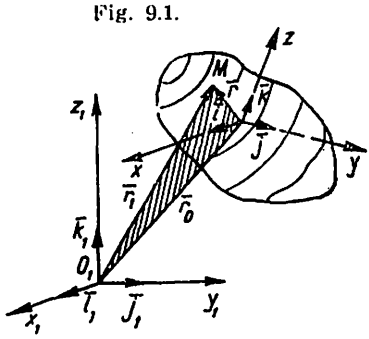
Distribuția vitezelor satisface anumite legi generale, utile în aplicații:

— proiecțiile vitezelor a două puncte oarecare ale rigidului pe dreapta care le unește sînt egale;

— proiecțiile vitezelor a două puncte oarecare pe vectorul $\bar{\omega}$ sînt egale;

— diferența vectorilor viteză a două puncte oarecare ale rigidului este un vector perpendicular pe dreapta ce unește cele două puncte;

Fig. 9.1.



Un solid rigid poate avea o serie de mișcări particulare, caracterizate prin mărimea și așezarea unul față de celălalt a vectorilor $\bar{v}_0$ și $\bar{\omega}$: mișcare de *translație*, de *rotație*, de *roto-translație*, de *șurub*, *plan* paralelă și mișcarea în *jurul unui punct fix*.

2. **Mișcarea de translație.** Într-o astfel de mișcare (fig. 9.2) o dreaptă ce unește două puncte oarecare ale

rigidului rămîne paralelă cu ea însăşi. În timpul mişcării toate punctele rigidului descriu traiectorii egale (rectilinii, circulare sau curbilinii oarecare), care pot fi suprapuse prin translaţie. Ca urmare toate punctele rigidului au aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie faţă de rigidul fix. Pentru a studia mişcarea, este suficient să se cunoască elementele cinematice ale unui singur punct al rigidului, de obicei se ia în considerare mişcarea centrului de masă G.

$$\bar{v}=\bar{v}_0=\bar{v}_G\,;\quad \bar{a}=\bar{a}_0=\bar{a}_G. \tag{f}$$

3. **Mişcarea de rotaţie.** Într-o astfel de mişcare două puncte oarecare, aparţinînd rigidului, rămîn fixe şi definesc *axa de rotaţie*. Rigidul are în acest caz un singur grad de libertate (fig. 9.3) definit de parametrul

$$\theta=\theta(t), \tag{g}$$

ce reprezintă unghiul format de două plane ce trec prin axa de rotaţie: unul mobil π, legat de corpul care se roteşte, iar altul π_0 fix.

Traiectoriile punctelor rigidului sînt cercuri, avînd centrul pe axa fixă (figura 9.4). Legea de distribuţie a vitezelor este:

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}, \tag{h}$$

unde $\bar{\omega}$ este vectorul instantaneu de rotaţie, vector liber aşezat pe axa de rotaţie, ce caracterizează mişcarea de rotaţie, iar $\bar{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct oarecare al rigidului faţă de originea axelor O, arbitrar aleasă pe axa de rotaţie.

Distribuţia de viteze (h) poate fi exprimată sub forma:

$$\bar{v}=v_x\bar{\imath}+v_y\bar{\jmath}=-y\omega\bar{\imath}+x\omega\bar{\jmath}, \tag{h'}$$

iar componentele acceleraţiei sînt date de relaţia:

$$\bar{a}=\bar{a}_\tau+\bar{a}_\nu=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})=(-y\varepsilon-\omega^2x)\bar{\imath}+(x\varepsilon-\omega^2y)\bar{\jmath}. \tag{i}$$

Vectorul acceleraţie unghiulară $\bar{\varepsilon}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ are ca suport axa de rotaţie. Un punct oarecare P are o traiectorie circulară caracterizată prin ε, ω şi ca rază distanţa d la axa de rotaţie. Toate proprietăţile mişcării circulare ale punctului vor fi aplicate şi aici.

Fig. 9.2.

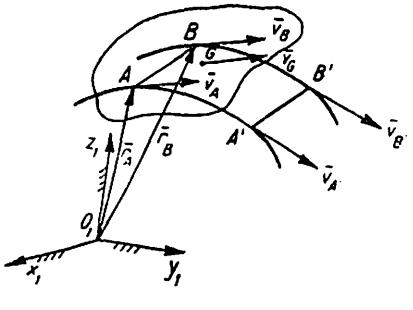


Fig. 9.3.

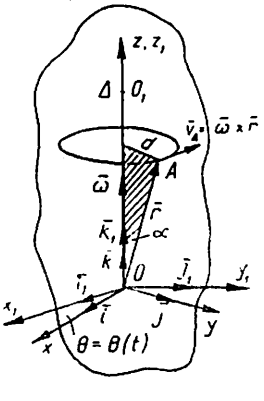
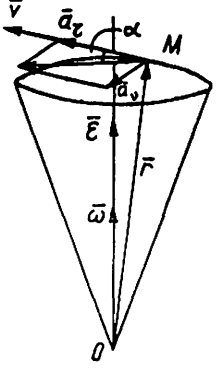


Fig. 9.4.



4. **Mişcarea de rototranslaţie** este mişcarea particulară a rigidului care, în timp ce se roteşte în jurul unei axe fixe, înaintează simultan în lungul acesteia (fig. 9.5).

Ecuaţiile de mişcare ale unui punct sînt:

$$x=R\cos\theta;\quad y=R\sin\theta;\quad z=z(t);\quad \theta=\theta(t), \tag{j}$$

unde R este distanţa de la punct la axa mişcării.

Distribuţiile de viteze şi acceleraţii sînt date de proiecţiile:

$$\begin{gathered} v_x=\dot{x}=-\omega y;\quad v_y=\dot{y}=\omega x;\quad v_z=\dot{z}=v_0 \\ a_x=\ddot{x}=-\varepsilon y-\omega^2 x;\quad a_y=\ddot{y}=\varepsilon x-\omega^2 y;\quad a_z=\ddot{z}=a_0. \end{gathered} \tag{k}$$

Ca urmare:

$$v=\sqrt{R^2\omega^2+v_0^2};\quad a=\sqrt{R^2(\varepsilon^2+\omega^4)+a_0^2}. \tag{l}$$

În cazul în care $a_0=0$ obţinem viteza şi acceleraţia punctului în mişcarea de rotaţie.

Mişcarea de şurub este mişcarea particulară de rototranslaţie la care există proporţionalitatea între viteza mişcării de translaţie şi viteza unghiulară de rotaţie în jurul axei:

$$\bar{v}_0=k\bar{\omega}.$$

5. **Mişcarea rigidului cu punct fix.** Un rigid are o mişcare cu punct fix, dacă un punct al rigidului rămîne fix faţă de sistemul de referinţă fix. În mişcarea cu punct fix rigidul are trei grade de libertate. Pentru studiu se folosesc unghiurile lui Euler: ψ unghiul de precesie, φ unghiul de rotaţie proprie şi θ unghiul de nutaţie care sînt funcţii de timp (fig. 9.6). Axa nodurilor ON este intersecţia planului mobil xOy legat de rigid cu planul fix x_1Oy_1.

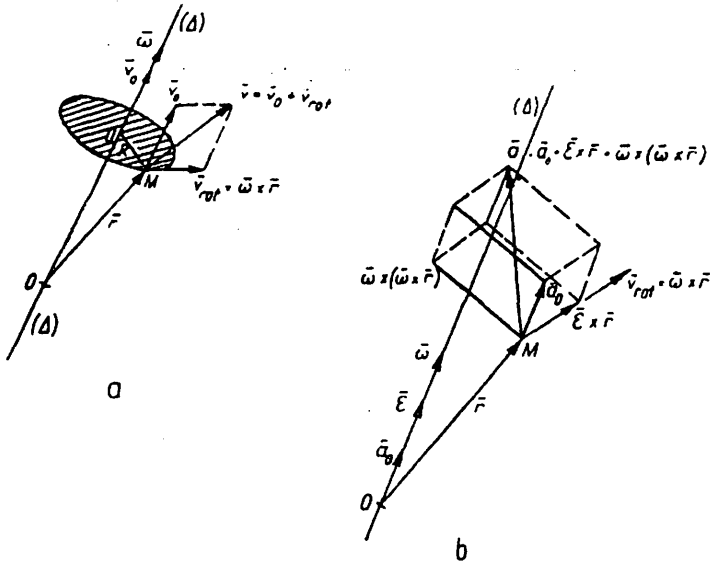


Fig. 9.5.

Distribuția vitezelor este dată de relația $\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}$, unde $\bar{\omega}=\dot{\theta}\bar{n}+\dot{\varphi}\bar{k}+\dot{\psi}\bar{k}_1$, iar $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$; $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ sînt respectivi versorii triedrului mobil și fix, iar $\bar{n}$ versorul axei nodurilor.

Componentele ω_x, ω_y, ω_z ale vitezei unghiulare instantanee $\bar{\omega}$ pe axele sistemului de coordonate mobil sînt:

$$\begin{aligned}\omega_x&=\dot{\theta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi\\ \omega_y&=-\dot{\theta}\sin\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\\ \omega_z&=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{aligned}\qquad (m)$$

iar $$|\bar{\omega}|=\sqrt{\dot{\psi}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta}.$$

Proiecțiile vectorului $\bar{\omega}$ pe axele fixe $x_1O_1y_1z_1$ sînt:

$$\begin{aligned}\omega_x&=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\\ \omega_y&=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\\ \omega_z&=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\end{aligned}\qquad (n)$$

Axa instantanee de rotație trece necontenit prin punctul fix și este generatoarea comună a conului polodic (mobil) care se rostogolește în timpul mișcării fără să alunece peste conul herpolodic (fix) figura 9.7.

Axa instantanee de rotație față de cele două sisteme de referință are respectiv ecuațiile:

$$\frac{x}{\omega_x}=\frac{y}{\omega_y}=\frac{z}{\omega_z}\quad\text{și}\quad\frac{x_1}{\omega_{x1}}=\frac{y_1}{\omega_{y1}}=\frac{z_1}{\omega_{z1}}.$$

Legea de distribuție a acceleraților este:

$$\bar{a}=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})=\bar{a}_{rot}+\bar{a}_{ax},\qquad (q)$$

unde $\bar{\varepsilon}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ este vectorul accelerație unghiulară,

iar componenta accelerației $\bar{\varepsilon}\times\bar{r}$ este numită *accelerație de rotație.* Cealaltă componentă a accelerației, $\bar{a}_{ax}$ numită *accelerație axipetă*, perpendiculară pe axa instantanee de rotație se mai poate scrie:

$$\bar{a}_{ax}=\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})=-\omega^2\overline{PP}_1\qquad (r)$$

unde P_1 este piciorul perpendicularei dusă din punctul P pe suportul vectorului $\bar{\omega}$.

Mișcarea plan-paralelă, avînd o deosebită importanță în studiul mecanismelor, este tratată separat în cap. *X*.

Fig. 9.6.

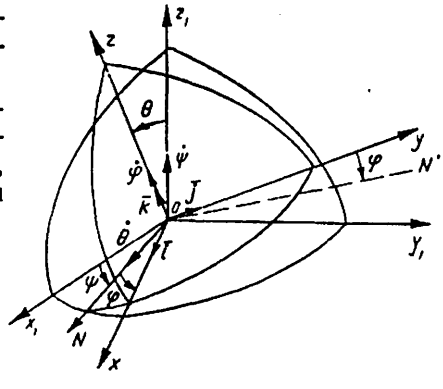
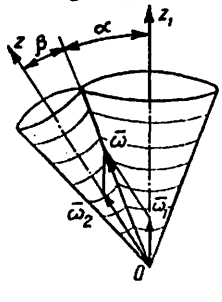


Fig. 9.7.



B. PROBLEME REZOLVATE

9.1. Frînîndu-se o roată, care are o turaţie de n_0 rot/min, viteza ei unghiulară scade în mod constant, oprindu-se după t_0 secunde. Să se determine legile mişcării şi numărul de rotaţii pe care-l mai face roata pînă la oprire.

Rezolvare. Din momentul frînării, cînd roata are viteza unghiulară

$$\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60}$$

aceasta are o mişcare uniform întîrziată de acceleraţie constantă ε_0. Admiţînd condiţiile iniţiale $t=0$; $\theta_0=0$, legile mişcării sînt:

$$\varepsilon = -\varepsilon_0; \quad \omega = -\varepsilon_0 t + \omega_0; \quad \theta = -\frac{1}{2}\omega_0 t^2 + \omega_0 t.$$

Roata oprindu-se cînd $\omega=0$, rezultă:

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi n_0}{30\, t}; \quad N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{n_0 t_0}{120}.$$

9.2. Rotorul unei maşini electrice are o turaţie n_0, cînd intervine acţiunea de frînare. Raza rotorului este r. Ştiind că rotorul se opreşte după ce a mai făcut N rotaţii, să se determine:

a) timpul în care s-a oprit maşina;

b) acceleraţiile rotorului în mişcarea de regim şi după ce rotorul a mai făcut N_1 ture.

Aplicaţie: $n_0=1\,500$ rot/min; $r=20$ cm; $N=500$ ture; $N_1=100$ ture.

Rezolvare. a) Ţinînd seama de ultima relaţie stabilită în problema anterioară, rezultă:

$$t_0 = 120\frac{N}{n_0}.$$

b) Acceleraţiile în mişcarea de regim sînt:

$$a_\tau = 0; \quad a_\nu = r\omega_0^2,$$

în timp ce în mişcarea uniform întîrziată avem:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{\pi n_0}{30\, t}; \quad a_\tau = r\varepsilon; \quad a_\nu = r\omega^2,$$

unde ω este viteza unghiulară a rotorului după ce acesta a făcut N ture. Pornind de la ecuaţiile mişcării:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t; \quad \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

se obţine $\theta = \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varepsilon}$.

Dar cum $\theta=2\pi N_1$, rezultă:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-4\pi\varepsilon N_1}$$

iar accelerația normală este $a_v=r\omega^2$.

c) În cazul aplicației avem: $t_0=40$ s; iar accelerațiile în mișcarea de regim sînt $a_\tau=0$; $a_v=4\,930$ m/s², în timp ce în mișcarea uniform întîrziată rezultă:

$$a_\tau=0{,}78\ \text{m/s}^2;\quad a_v=3\,940\ \text{m/s}^2$$

accelerația normală este de 5 000 ori mai mare decît accelerația tangențială.

9.3. Un paralelipiped dreptunghic, de muchii $OA=a$, $OB=b$; $OC=c$ se rotește uniform în jurul diagonalei sale OF cu o viteză unghiulară constantă $\bar{\omega}$. Se cere să se determine vitezele colțurilor paralelipipedului (fig. 9.8).

Rezolvare. Avem succesiv:

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \omega\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \omega\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ x & y & z \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}[(bz-cy)\bar{i}+(cx-az)\bar{j}+(ay-bx)\bar{k}],$$

$$|\bar{v}|=\frac{\omega\sqrt{(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

unde x,y,z sînt coordonatele punctului a cărui viteză se află. De exemplu pentru vîrfurile $A(a,\ 0,\ 0)$ și $G(0,\ b,\ c)$ se obține

$$v_A=v_G=\omega a\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

9.4. Două roți de moară, avînd raza r, unite între ele printr-un ax O_1O_2 de lungime $2R$, se rotesc, cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul axei verticale ce trece prin punctul O (fig. 9.9). Datorită acestei rotiri, valțurile se rostogolesc pe un plan orizontal. Să se determine viteza și accelerația punctului M, situat la extremitatea diametrului vertical al roții O_1.

Rezolvare. Roata va avea o mișcare de rotație în jurul axului O_1O_2 cu viteza unghiulară ω_1 și în același timp axul O_1O_2 se rotește în jurul axului vertical Oz cu viteza unghiulară ω. Între cele două viteze unghiulare există relația:

$$v=\omega_1 r=\omega R,$$

Fig. 9.8.

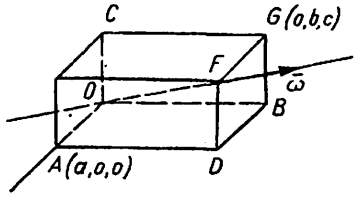
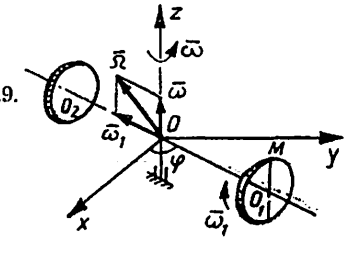


Fig. 9.9.



Componentele vitezei unghiulare de rotire a punctului M ($R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$, r) în raport cu sistemul de axe $Oxyz$ sînt:

$$\omega_x=-\omega_1\cos\varphi=-\omega\frac{R}{r}\cos\varphi;\quad \omega_y=\omega_1\sin\varphi=-\omega\frac{R}{r}\sin\varphi;\quad \omega_z=\omega$$

de unde:

$$\Omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}=\omega\frac{\sqrt{R^2+r^2}}{r}.$$

Viteza punctului M este:

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -\omega\frac{R}{r}\cos\varphi & -\omega\frac{R}{r}\sin\varphi & \omega\\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & r\end{vmatrix}=-2R\omega(\bar{i}\sin\varphi+\bar{j}\cos\varphi)$$

de unde $|\bar{v}_M|=2R\omega$.

Acceleraţiile unghiulare fiind nule, rezultă pentru componentele acceleraţiei punctului M valorile:

$$a_x=-2R\omega^2\cos\varphi;\quad a_y=-2R\omega^2\sin\varphi;\quad a_z=-\frac{2R^2}{r}\omega^2,$$

de unde $a_M=2R\omega\Omega$.

9.5. Un con cu raza bazei r şi înălţimea h se rostogoleşte fără să alunece pe un plan orizontal, avînd vîrful în punctul fix O. Să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$ a conului, dacă viteza centrului bazei conului $\bar{v}_C$ (fig. 9.10) este constantă.

Rezolvare. Exprimînd viteza centrului C a bazei conului în funcţie de viteza unghiulară de rotaţie ω în jurul axei instantaneee de rotaţie Oy şi viteza unghiulară de rotaţie în jurul axei de rotaţie Oz avem succesiv:

$$\omega_1=\frac{v_c}{h\cos\alpha}=\frac{v_c}{h^2}\sqrt{h^2+r^2};\quad \omega=\frac{v_c}{h\sin\alpha}=\frac{v_c}{hr}\sqrt{h^2+r^2},$$

acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$ este:

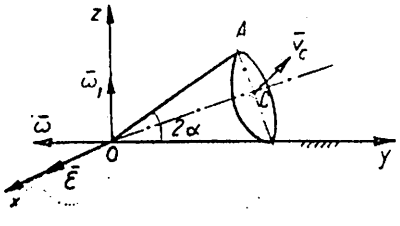
$$\bar{\varepsilon}=\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}=\omega\bar{j}\times\omega_1\bar{k}=\frac{v_c^2}{h^3r}(h^2+r^2)\bar{i}.$$

9.6. Să se studieze mişcarea unui solid cu punct fix de precesie regulată dată de ecuaţiile:

$$\psi=at;\quad \varphi=bt;\quad \theta=\frac{\pi}{c}$$

unde a, b, c sînt constante. Să se determine viteza şi acceleraţia unui punct $P(x_1y_1z_1)$ şi axa instantanee de rotaţie în raport cu triedrul mobil şi fix. Aplicaţie: $a=30$; $b=2$; $c=6$; $x_1=2$ cm; $y_1=3$ cm; $z_1=5$ cm.

Fig. 9.10.



Rezolvare. Vitezele unghiulare de precesie, rotație proprie și nutație sînt $\dot{\psi}=a$; $\dot{\varphi}=b$; $\dot{\theta}=0$, iar componentele vitezei unghiulare instantanee pe axele sistemului mobil sînt:

$$\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi=a\sin\frac{\pi}{c}\sin bt$$

$$\omega_y=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi=a\sin\frac{\pi}{c}\cos bt$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta=b+a\cos\frac{\pi}{c}$$

$$\omega_{x1}=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi=b\sin\frac{\pi}{c}\sin at$$

$$\omega_{y1}=-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi+\dot{\theta}\sin\psi=-b\sin\frac{\pi}{c}\cos at$$

$$\omega_{z1}=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=a+b\cos\frac{\pi}{c}.$$

Ca urmare:

$$\omega=\sqrt{\dot{\psi}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\frac{\pi}{c}}.$$

Viteza punctului $P(x_1y_1z_1)$ față de sistemul de axe fixe este definită de relația:

$$\bar{v}_1=\bar{\omega}_1\times\bar{r}_1=\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ b\sin\frac{\pi}{c}\sin at & -b\sin\frac{\pi}{c}\cos at & a+b\cos\frac{\pi}{c} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Axa instantanee de rotație față de sistemul mobil este:

$$\frac{x}{a\sin\frac{\pi}{c}\sin bt}=\frac{y}{a\sin\frac{\pi}{c}\cos bt}=\frac{z}{b+a\cos\frac{\pi}{c}};$$

iar față de sistemul fix

$$\frac{x_1}{b\sin\frac{\pi}{c}\sin at}=\frac{y_1}{-b\sin\frac{\pi}{c}\cos at}=\frac{z_1}{a+b\cos\frac{\pi}{c}}.$$

Din ecuațiile precedente se află ecuațiile celor două axoide: axoida mobilă, de ecuație:

$$x^2+y^2-\left(\frac{a\sin\frac{\pi}{c}}{b+a\cos\frac{\pi}{c}}\right)^2z^2=0$$

și axoida fixă, avînd ecuația:

$$x_1^2+y_1^2-\left(\frac{b\sin\frac{\pi}{c}}{a+b\cos\frac{\pi}{c}}\right)^2 z_1^2=0,$$

conuri cu unghiurile la vîrf (fig. 9.11) definite respectiv de relațiile:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sin\frac{\pi}{c}}{b+a\cos\frac{\pi}{c}}; \qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{b\sin\frac{\pi}{c}}{a+b\cos\frac{\pi}{c}}.$$

Componentele accelerației pe axele mobile sînt:

$$\varepsilon_x=\dot{\omega}_x=ab\sin\frac{\pi}{c}\cos bt; \quad \varepsilon_y=\dot{\omega}_y=-ab\sin\frac{\pi}{c}\sin bt; \quad \varepsilon_z=0.$$

În cazul aplicației numerice avem:

$$\omega\approx 31{,}8\ \mathrm{s}^{-1}; \quad \operatorname{tg}\alpha=0{,}536; \quad \operatorname{tg}\beta=0{,}0316$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

9.7. La o placă de oțel trebuie practicate $g=10$ găuri, avînd fiecare un diametru $d_0=24$ mm și o adîncime $h=60$ mm. Viteza de tăiere a burghiului fiind $v=20$ m/min, iar înaintarea acestuia fiind $\delta=0{,}3$ mm pe fiecare rotație, să se determine:

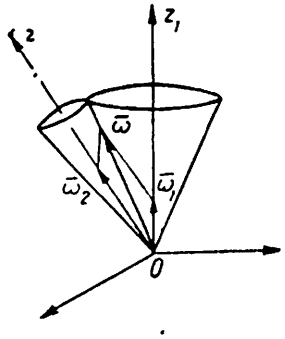
a) turația n a burghiului;

b) timpul efectiv T necesar perforării plăcii.

Răspuns. $n=\frac{v}{\pi d_0}=265$ rot/min; $T=60\,\pi\frac{d\cdot g\cdot h}{v\delta}=453$ s.

9.8. Pentru a evita ruperea, un volant din fontă are viteza tangențială limitată la 36 m/s. Să se verifice dacă un volant, avînd diametrul 1,2 m și care are o turație de 420 rot/min, îndeplinește această condiție. Care este turația maximă n_M care poate fi dată volantului?

Fig. 9.11.



Răspuns. $v=26{,}4$ m/s; $n_M=572$ rot/min.

9.9. Între ce limite trebuie să varieze turația unei bobine pentru a înfășura o lungime de sîrmă L în T minute? Diametrul bobinei goale este d_0 iar al bobinei pline d_f.

Aplicație: $L=120$ m; $T=20$ min; $d_0=3$ cm; $d_f=5{,}6$ cm.

Indicație și răspuns. Viteza tangențială trebuie să fie constantă. Ca urmare turația variază între limitele $\frac{L}{\pi d_0 T}$ și $\frac{L}{\pi d_f T}$. Pentru aplicație se obține $n_0 = 636$ rot/min și $n_f = 340$ rot/min.

9.10. Mecanismul de antrenare a unei benzi rulante are forma din figura 9.12. Știind că turația motorului este de 1 400 rot/min, să se calculeze viteza de deplasare a benzii.

Răspuns.

$$v = r_5\omega = r_5 \frac{2\pi n_6}{60} = r_5 \frac{2\pi}{60} n_2 \frac{d_3}{d_4} = \frac{2\pi}{60} r_5 \frac{d_1}{d_2}\frac{d_3}{d_4} n_1 = 2{,}44 \text{ m/s}$$

9.11. Axa pe care este fixat discul D se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_1. Să se determine viteza unghiulară cu care trebuie să se rotească discul în jurul axei sale astfel încît punctul A al discului să aibă viteza absolută nulă. Elementele geometrice sînt indicate pe figura 9.13.

Indicație și răspuns. Viteza unghiulară rezultantă $\bar{\Omega}$

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega} + \bar{\omega}_1; \quad \omega = \omega_1 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

trece prin A.

9.12. Un disc vertical de rază r, se rostogolește fără să alunece, pe un plan orizontal cu viteza unghiulară constantă ω_1, descriind cercul de rază R (fig. 9.14).

Să se afle viteza unghiulară ω de rotație proprie cu axa perpendiculară pe disc, viteza unghiulară instantanee $\bar{\Omega}$ și accelerațiile axipetă $\bar{a}_{ax}$ și de rotație $\bar{a}_{rot}$ a unui punct oarecare P de pe marginea discului definit de unghiul θ.

Răspuns. Alegînd un sistem de axe ca în figură avem:

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \quad \text{și} \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{R}{r}; \quad \Omega = \omega_1 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2}$$

$$\bar{\omega} = -\omega\cos\alpha\,\bar{i} + \omega\sin\alpha\,\bar{j}; \quad \bar{r} = r\sin\theta\,\bar{i} + R\bar{j} - r\cos\theta\,\bar{k}$$

$$\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r} = -\omega_1 R(1-\cos\theta)\bar{i} + \omega_1 r\sin\theta\,\bar{j} + \omega_1 R\sin\theta\,\bar{k}$$

$$\bar{a}_x = \bar{\omega}\times\bar{v}; \quad a_{ax} = 2\frac{\omega_1^2}{r}\sqrt{(r^2+R^2)\left(R^2 + r^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\bar{a}_{rot} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r}; \quad a_{rot} = \frac{R}{r}\cdot\omega_1^2\sqrt{R^2 + r^2\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Fig. 9.12.

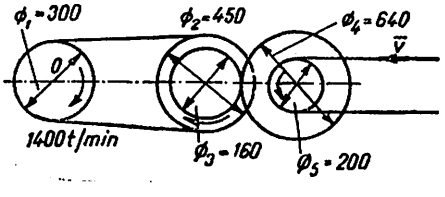


Fig. 9.13.

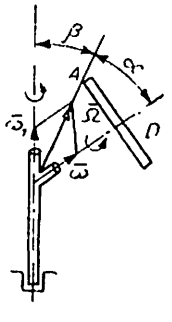
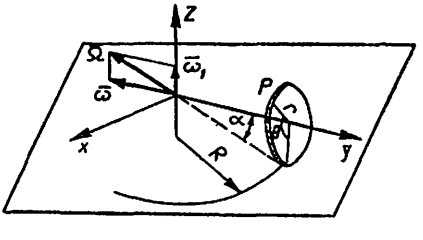


Fig. 9.14.



9.13. Conul A se rostogolește fără să alunece pe conul fix B cu turația n (fig. 9.15). Să se determine viteza unghiulară de transport ω_t a conului mobil în jurul axei Oz, viteza unghiulară relativă în jurul axei conului mobil, precum și viteza și accelerația absolută ω_a și ε_a.

Indicație și răspuns. Viteza punctului O_1 se poate scrie

$$\bar{v}_{O_1}=\bar{\omega}_t\times\overline{OO_1}=\bar{\omega}_a\times\overline{OO_1},$$

de unde $\omega_a=\dfrac{\omega_t}{\sin\alpha}$. Viteza relativă ω_r este:

$$\omega_r=\omega_a\cos\alpha.$$

Accelerația absolută este $\bar{\varepsilon}_a=\dfrac{d\bar{\omega}_a}{dt}=\bar{\omega}_t\times\bar{\omega}_a$, ca urmare

$$\varepsilon_a=\omega_t\omega_a\sin(\bar{\omega}_t,\ \bar{\omega}_a)=\omega_t^2\operatorname{ctg}\alpha.$$

9.14. Roata AB, de rază r, se poate rostogoli fără alunecare pe un plan orizontal (fig. 9.16). Axa OO_1 a roții, de lungime h, este fixată în O, aflat la distanța H de terenul orizontal. Perioada mișcării de transport a roții fiind T, se cere să se determine viteza absolută și relativă în mișcarea roții.

Răspuns.

$$\omega_t=\frac{2\pi}{T};\quad \bar{\omega}_a=\bar{\omega}_r+\bar{\omega}_t;\quad \omega_r=\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{a}{r}.$$

Fig. 9.15.

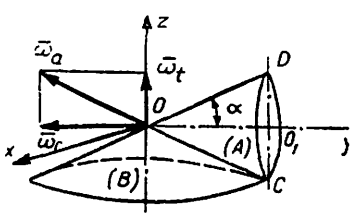
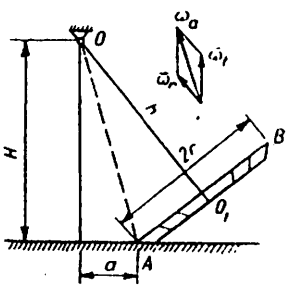


Fig. 9.16.



Capitolul 10

MIŞCAREA PLAN PARALELĂ. CINEMATICA MECANISMELOR

A. CONSIDERAŢII TEORETICE

1. **În mişcarea plan-paralelă** trei puncte oarecare ale rigidului sînt conţinute, sau rămîn într-un plan fix din spaţiu. Parametrii vectoriali $\bar{v}_0(t)$ şi $\bar{\omega}(t)$, cari definesc mişcarea generală a rigidului, rămîn ortogonali. Pentru definirea mişcării sînt suficienţi trei parametri scalari: coordonatele $x_0(t)$; $y_0(t)$ ale originii triedrului mobil legat de corp şi unghiul $\theta(t)$ cu care se roteşte rigidul în jurul unei axe normale la planul fix şi care trece prin originea O (fig. 10.1). Pentru cunoaşterea poziţiei oricărui punct este suficient să se cunoască în orice moment poziţia a două din punctele sale.

2. **Distribuţia de viteze şi acceleraţii.** Viteza este dată prin proiecţiile sale:

$$v_x = v_{ox} - \omega y\,; \quad v_y = v_{oy} + \omega x, \tag{a}$$

unde $\bar{v}_0\,(v_{ox},\ v_{oy})$ este viteza originii triedrului mobil, iar $\bar{\omega}\,(0, 0, \omega)$ vectorul viteză unghiulară de rotaţie, normal la planul fix. Acestea se deduc din relaţia lui Euler privitoare la relaţia dintre vitezele a două puncte oarecare A şi B (fig. 10.2):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}. \tag{b}$$

Centrul instantaneu de rotaţie I este punctul care are la un moment dat viteza nulă. Are faţă de sistemul mobil coordonatele:

$$\xi(t) = -\frac{v_{oy}}{\omega}\,; \quad \eta(t) = \frac{v_{ox}}{\omega}. \tag{c}$$

Locul geometric al centrului instantaneu de rotaţie faţă de sistemul mobil (legat de corp) este centroida mobilă (rostogolitoarea), de ecuaţie $f(\xi, \eta) = 0$,

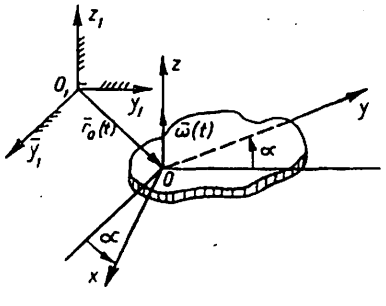


Fig. 10.1.

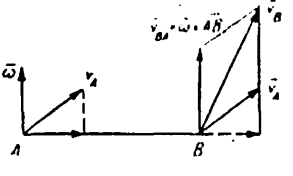


Fig. 10.2.

obținută prin eliminarea parametrului t între ecuațiile (*c*). Față de sistemul fix, centrul instantaneu de rotație are drept coordonate:

$$\xi_1 = x_0 - \frac{dy_0}{d\alpha}; \quad \eta_1 = y_0 + \frac{dx_0}{d\alpha} \tag{d}$$

unde α este unghiul axei mobile Ox, legată de corp, față de axa fixă O_1x_1. Locul geometric al centrelor instantanee de rotație I în raport cu sistemul de coordonate fix este centroida fixă (baza).

În mișcarea plană centroida mobilă se rostogolește peste centroida fixă fără să alunece, iar generatoarea de contact dintre cele două axoide este chiar axa instantanee de rotație din acel moment, a cărei urmă pe planul fix este I, centrul instantaneu de rotație (fig. 10.3).

Cunoscînd viteza $\bar{v}_A$ a unui punct oarecare A și viteza unghiulară $\bar{\omega}$, distanța centrului instantaneu de rotație I este dat de relația vectorială:

$$\overline{AI} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_A}{\bar{\omega}^2}. \tag{e}$$

Punctul I se află pe perpendiculara în A pe $\bar{v}_A$, la distanța:

$$IA = \frac{v_A}{\omega}. \tag{f}$$

Odată determinat I, viteza unui punct oarecare A, este viteza pe care o are punctul în mișcarea lui circulară în jurul lui I din acel moment (fig. 10.4).

3. **Accelerația** unui punct oarecare în mișcarea plană se deduce din relația lui Euler și are forma particulară:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} - \omega^2 \cdot \overline{AB}, \tag{g}$$

de componente pe axe:

$$a_x = a_{0x} - \omega^2 \cdot x - \varepsilon \cdot y; \quad a_y = a_{0y} - \omega^2 y + \varepsilon x \tag{g'}$$

Cunoscînd accelerația unui punct oarecare $\bar{a}_A$, viteza și accelerația unghiulară ($\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$), se poate determina grafic accelerația oricărui punct B (fig. 10.5).

Prin proiecția relației Euler pe direcția AB, rezultă că:

$$pr_{BA}\bar{a}_B = pr_{BA}\bar{a}_A + \bar{a}_v \tag{h}$$

Fig. 10.3

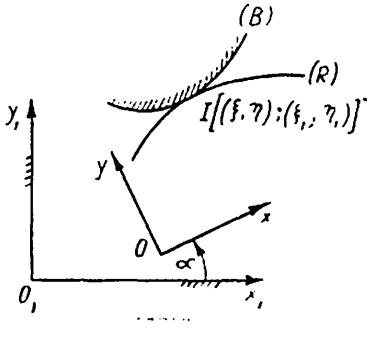


Fig. 10.4.

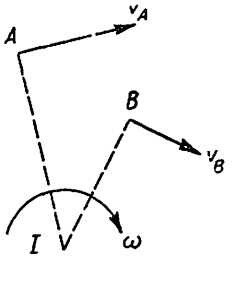
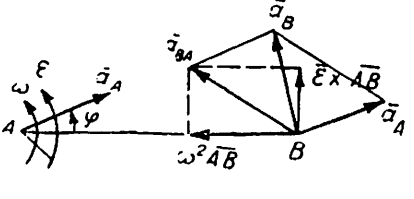


Fig. 10.5.



adică proiecţia acceleraţiei punctului B pe AB se află adăugînd la proiecţia acceleraţiei punctului A pe AB, acceleraţia normală în mişcarea de rotaţie a lui B în jurul lui A.

Cunoscînd ω şi ε se determină unghiul φ al acceleraţiei totale $\bar{a}_{BA}$, cu ajutorul relaţiei $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Centrul instantaneu de rotaţie are o acceleraţie care nu poate fi nulă. Există totuşi în plan un punct P, de acceleraţie nulă, numit *polul acceleraţiilor* de coordonate:

$$\xi' = \frac{a_{ox}\cdot\omega^2 - a_{oy}\cdot\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^4}; \quad \eta' = \frac{\varepsilon\cdot a_{ox} + a_{oy}\cdot\omega^2}{\varepsilon^2+\omega^4}. \tag{i}$$

Dacă punctul A ar fi în P, atunci $\bar{a}_A = \bar{a}_P = 0$ şi relaţia (g) devine:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_\tau + \bar{a}_\nu, \text{ în care } a_\tau = PB\cdot\varepsilon \text{ şi } a_\nu = PB\cdot\omega^2.$$

Mişcarea se face în aşa fel încît, la un moment dat, acceleraţiile tuturor punctelor corpului fac un acelaşi unghi φ, definit de relaţia $\operatorname{tg}\varphi = \frac{|\bar{\varepsilon}|}{\omega^2}$, cu dreapta care uneşte punctele A, B, C, respectiv cu polul acceleraţiilor P din acel moment (fig. 10.6)

Cunoscînd direcţia acceleraţiei $\bar{a}_A$ a unui punct A şi valorile ω şi ε la un moment dat, se poate construi geometric polul P şi apoi mărimea şi direcţia acceleraţiei oricărui punct.

Polul acceleraţiilor P se determină vectorial prin relaţia:

$$\overline{AP} = \frac{\omega^2\bar{a}_A + \bar{\varepsilon}\times\bar{a}_A}{\varepsilon^2+\omega^4}. \tag{j}$$

ar construcţia polului se face cu ajutorul coordonatelor polare:

$$AP = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{k}$$

Odată determinat polul acceleraţiilor P, acceleraţia unui punct oarecare A este acceleraţia pe care o are punctul datorit mişcării de rotaţie a corpului (cu ε şi ω date) în jurul unei axe, trecînd prin polul acceleraţiilor din acel moment.

4. **Teorema proiecţiilor.** Vitezele a *două puncte oarecare* A şi B sînt diferite în timpul mişcării, însă proiecţiile lor pe dreapta ce le uneşte sînt egale.

5. **Teorema asemănării.** (Burmester şi Mehmke). În mişcarea plană a unei figuri invariabile, următoarele figuri:

— *figura vitezelor*, fig. 10.7, *a* determinată de vîrfurile vitezelor punctelor $A, B, C, \ldots$;

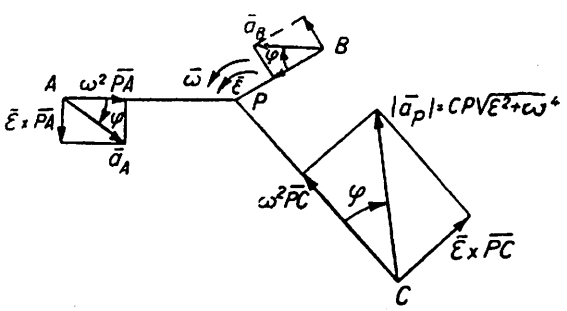


Fig. 10.6.

— *figura vitezelor rabătute*, obținute prin rotirea vectorilor $\bar{v}_A = \overline{AA'}$, $\bar{v}_B = \overline{BB'}$, $\bar{v}_i = \overline{CC'}$, cu 90° într-un sens arbitrar în jurul punctului respectiv ;

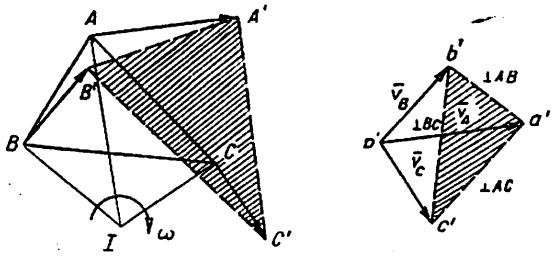
— *poligonul vitezelor*, obținut prin ducerea dintr-un punct p', arbitrar ales, numit polul vitezelor, (fig 10.7, *b*), vectori echipolenți cu vitezele :

$$\overline{p'a'} = \bar{v}_A ; \quad \overline{p'b'} = \bar{v}_B \quad \text{etc.} ;$$

— *poligonul acceleraţiilor*, obținut analog cu poligonul vitezelor, dacă se duce prin punctul p'', numit *polul acceleraţiilor*, vectori echipolenți cu acceleraţiile (fig. 10.8, *a*) ;

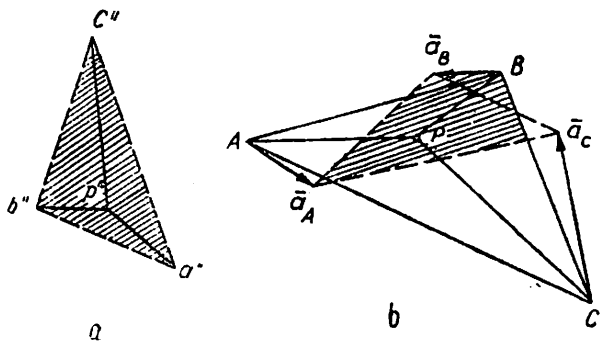
— *figura acceleraţiilor* (fig. 10.8, *b*) determinată de vîrfurile acceleraţiilor, sînt direct asemenea cu figura în mişcare.

Fig. 10.7.



a b

Fig. 10.8.



a b

Fig. 10.9.

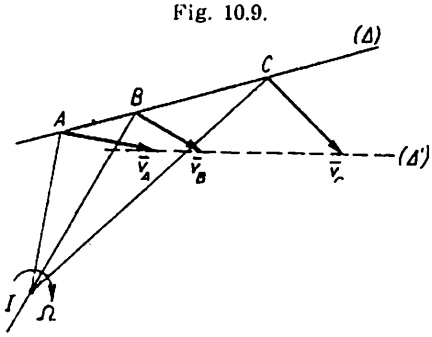
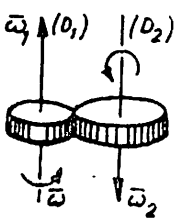


Fig. 10.10.



6. În particular, dacă trei puncte sînt coliniare, extremităţile vectorilor viteză şi extremităţile vectorilor acceleraţii, sînt de asemenea coliniare (fig. 10.9).

7. Un **mecanism** este constituit dintr-un ansamblu de organe ale unei maşini, sau numai o parte a acestor organe, considerate sub raportul legăturilor lor cinematice, adică sub raportul mişcărilor pe care pot să le aibă unele în raport cu celelalte.

Angrenajele cilindrice transmit rotaţia de la un ax D_1, cu turaţia n_1, la un ax D_2, paralel cu precedentul, dar avînd turaţia n_2 (fig. 10.10).

Notînd cu r_1, r_2 ; D_1, D_2 ; z_1,z_2 ; n_1, n_2 ; ω_1, ω_2, respectiv razele, diametrele, numărul de dinţi, turaţiile şi vitezele unghiulare ale celor două roţi dinţate, între aceste elemente există relaţiile :

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{z_1}{z_2} . \qquad (l)$$

Sensurile de rotaţie sînt contrare.

La *trenurile de angrenaje*, care sînt dispuse ca în figura 10.11, iar roţile de pe un ax sînt solidare cu axul respectiv, există relaţia :

$$n_n=(-1)^k\frac{R_1\cdot R_2\dots R_{n-1}}{r_2\cdot r_3\dots r_n}n_1=(-1)^k\frac{\text{produs raze conducătoare}}{\text{produs raze conduse}}n_1, \qquad (m)$$

unde k este numărul de contacte dintre roţi.

Raportul $\rho=\frac{R_1\cdot R_2\dots R_{n-1}}{r_2\cdot r_3\dots r_n}$ se numeşte *raport de transmitere.*

8. **Cremalierele** au scopul de a transforma o mişcare uniformă de rotaţie într-o mişcare uniformă de translaţie, perpendiculară pe axa de rotaţie. În acest caz există relaţia :

$$v=r\cdot\omega$$

9. **Angrenajele conice** au scopul să transforme o rotaţie în jurul unei axe, într-o rotaţie în jurul unei alte axe, concurentă cu prima (fig. 10.12).

Dîndu-se axele Ox şi Oy care fac unghiul $\alpha+\beta=\gamma$ şi turaţiile n_1 şi n_2 ale axelor, unghiurile 2α şi 2β care definesc deschiderea roţii conice, sînt date de relaţiile :

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\gamma}{\frac{n_1}{n_2}+\cos\gamma}\,.$$

şi

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\gamma}{\frac{n_2}{n_1}+\cos\gamma}\,. \qquad (n)$$

Angrenajul cu şurub fără sfîrşit transmite rotaţia de la un ax la un alt ax perpendicular pe primul (fig. 10.13). Cînd axul (xx') face o rotaţie completă în jurul axei sale, punctul de contact C dintre cei doi cilindri s-a deplasat cu un pas pe cilindrul (*1*), în lungul axei (xx'). În acelaşi timp, cilindrul (*2*) s-a rotit cu unghiul $\frac{2\pi}{z}$, în care z este numărul de dinţi ai cilindrului (*2*).

Raportul de transmisie este :

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{2\pi}{\left(\frac{2\pi}{z}\right)}=z. \qquad (p)$$

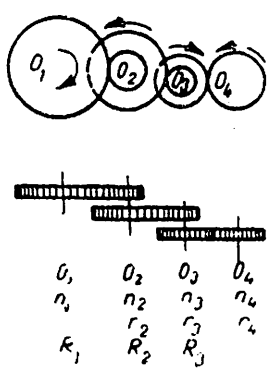


Fig. 10.11.

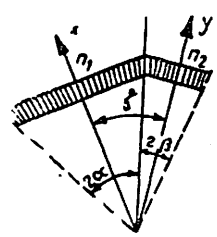


Fig. 10.12.

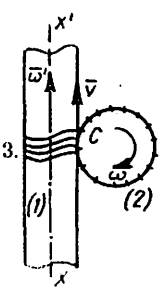


Fig. 10.13.

10. **Trenuri epicicloidale. Formula lui Willis.** Un tren epicicloidal este un *tren de angrenaje* ale căror axe nu sînt fixe, ci sînt purtate de o piesă C, numită *şasiu* şi care este ea însăşi mobilă în raport cu punctul O (fig. 10.14).

Notînd cu n turaţia şasiului, cu n_1, n_2, ..., n_n turaţiile succesive ale axelor $O_1 \dots O_n$, cu ρ raportul de transmitere a trenului de angrenaje, aşa cum s-a indicat la punctul (2), există relaţia :

$$\frac{\omega_n - \omega}{\omega_1 - \omega} = \rho, \qquad (q)$$

denumită şi formula lui Willis, care dă viteza unghiulară a ultimului ax O_n, în raport cu viteza unghiulară a primului ax O_1 şi a şasiului.

11. **Transmisii elastice.** Sînt cuprinse mai ales transmisiile prin curele. Viteza v a curelei fiind aceeaşi în tot lungul ei, există relaţiile :

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{D_1}{D_2}, \qquad (r)$$

Sensurile de rotire la două roţi antrenate prin curea, sînt aceleaşi.

Dacă se folosesc axe intemediare, există o relaţie analogă trenurilor de angrenaje :

$$n_n = (-1)^k \frac{R_1 \cdot R_2 \dots R_{n-1}}{r_2 \cdot r_3 \dots r_n} n_1 = (-1)^k n_1, \qquad (s)$$

în care k este numărul de încrucişări ale curelelor.

12. **Clasificarea centrelor de rotaţie.** Într-o mişcare plană a unui mecanism compus din mai multe elemente şi care se mişcă unele în raport cu altele, se deosebesc trei categorii de centre de rotaţie : centre de rotaţie fixe, permanente şi instantanee.

Centrele de rotaţie fixe sînt articulaţii care permit rotirea unei piese a mecanismului în raport cu partea fixă.

Centrele de rotaţie permanente sînt articulaţiile dintre piesele mobile ale mecanismului.

Centrele instantanee de rotaţie sînt puncte fictive de viteză nulă, în raport cu care se consideră că se poate roti întregul mecanism.

La un mecanism format din n piese componente, între care intră şi partea fixă a acestuia, numărul centrelor de rotaţie N este dat de relaţia :

$$N = C_n^2 \qquad (t)$$

13. **Teorema coliniarităţii centrelor de rotaţie.** În cazul unui mecanism plan compus, cele trei centre de rotaţie, relative la trei piese ale acestuia, sînt coliniare.

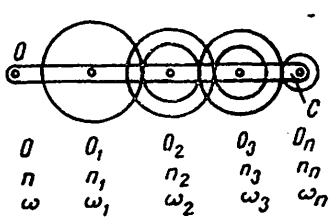


Fig. 10.14.

B. PROBLEME REZOLVATE

10.1. Capetele AB ale barei $AB=l$ alunecă pe două axe perpendiculare Ox_1, Oy_1. Cunoscînd viteza v_B a capătului B al barei într-o poziție oarecare, definită de unghiul α, se cere :

a) centrul instantaneu de rotație ;

b) baza și rostogolitoarea ;

c) viteza punctului M mijloc al barei ;

d) punctul P de pe bară care are viteza minimă și mărimea ei (fig. 10.15).

Rezolvare geometrică :

a) Centrul instantaneu de rotație I se află la intersecția normalelor în punctele A și B care descriu dreptele OA și OB, luate ca axe de coordonate.

b) Cum figura $OAIB$ este un dreptunghi, baza (locul lui I în raport cu axele fixe BOA) este cercul cu centrul O și rază : $OI=AB=l$.

Rostogolitoarea (locul lui I față de axele xBy legate de bară) este cercul descris pe AB ca diametru, căci unghiul AIB este drept.

c) În orice moment, mișcarea barei este produsă de rostogolirea fără alunecare a cercului M (rostogolitoare) pe cercul O (bază), care sînt tangente în I. Viteza punctului M, mijlocul lui AB, este perpendiculară pe normala MI și :

$$v_M=MI\cdot\omega\,;\quad v_B=BI\cdot\omega\,;\quad BI=2\,MI\cos\alpha,$$

de unde :

$$v_M=\frac{v_B}{2\cos\alpha}\,.$$

d) Punctul de viteză minimă este proiecția lui I pe AB.

Direcția vitezei are direcția barei. Cum punctele $APMB$ sînt coliniare, rezultă că și extremitățile vitezelor lor sînt coliniare. Dreapta care unește extremitățile vitezelor v_A și v_B taie pe AB în L, iar $\overline{PL}=\bar{v}_P$.

Rezolvare analitică. a) Coordonatele lui I în raport cu axele fixe sînt :

$$x_1=l\sin\alpha\,;\quad y_1=l\cos\alpha, \tag{1}$$

iar în raport cu axele mobile Bx și By :

$$x=PI=BI\sin\alpha=y_1\sin\alpha=l\cos\alpha\sin\alpha\,;$$

$$y=BP=BI\cos\alpha=y_1\cos\alpha=l\cos^2\alpha. \tag{2}$$

b) Pentru aflarea bazei se elimină parametrul variabil între ecuațiile (1), obținîndu-se :

$$x_1^2+y_1^2=l^2.$$

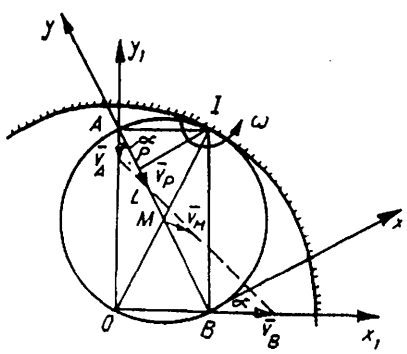


Fig. 10.15.

Pentru aflarea rostogolitoarei se elimină parametrul între ecuațiile (2), putîndu-se scrie succesiv:

$$x=l\cos\alpha\sin\alpha=\frac{l}{2}\sin 2\alpha;\quad \sin 2\alpha=\frac{2x}{l};$$

$$y=l\cos^2\alpha=l\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\quad \cos 2\alpha=\frac{2y}{l}-1.$$

Eliminînd parametrul α se obține:

$$x^2+y^2-ly=0,$$

ecuația cercului descris pe AB ca diametru.

10.2. O bară AC de lungime l alunecă cu unul dintre capete A pe un suport fix, trecînd necontenit prin articulația fixă B, situată la o distanță d de suport (fig. 10.16). Viteza capătului A fiind constantă și egală cu v să se determine:

a) centrul instantaneu de rotație;

b) viteza unui punct M de pe bară în momentul trecerii sale prin articulația B;

c) viteza capătului C al barei.

Rezolvare. a) Poziția barei definită de unghiul α, are centrul instantaneu de rotație I, care se găsește la intersecția perpendicularelor în A și B pe vectorii viteză $\bar{v}_A$, respectiv $\bar{v}_M$;

b) Viteza punctului M de pe bară este $v_M=IM\cdot\omega$, iar viteza punctului A este $v_A=IA\cdot\omega$. De unde:

$$v_M=v_A\frac{IM}{IA}. \tag{1}$$

Din triunghiul dreptunghi AMI, se deduce:

$$IM=AI\cos\alpha.$$

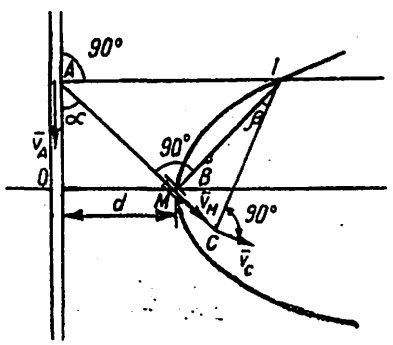
Deci:

$$v_M=v_A\cos\alpha \tag{1'}$$

c) Viteza capătului C al barei este $v_c=IC\cdot\omega$. Însă cum $v_A=IA\cdot\omega$, rezultă:

$$v_c=v_A\frac{IC}{IA}. \tag{2}$$

Fig. 10.16.



Din triunghiul dreptunghi IBC, se deduce:

$$IC=\sqrt{IB^2+BC^2}=\sqrt{\frac{d^2}{\sin^4\alpha}+l^2-2l\frac{d}{\sin\alpha}},$$

iar din tringhiurile ABI și AOB se poate scrie:

$$IA=\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{d}{\sin^2\alpha}.$$

Introducînd valorile găsite pentru IC și IA în expresia (2), rezultă :

$$v_C = v_A \frac{\sqrt{d^2 + l^2 \sin^4 \alpha - 2ld \sin^3 \alpha}}{d}. \qquad (2')$$

Observație. Valorile vitezelor punctelor M și C se mai pot determina aplicînd teorema egalității proiecțiilor vectorilor viteză pe dreapta care unește punctele lor de aplicație. În adevăr :

$$v_M = pr_{AC} v_A = v_A \cos \alpha ;$$

$$v_C = \frac{pr_{AC} v_A}{\cos \beta} = v_A \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Din triunghiul dreptunghi IBC, rezultă : $\cos \beta = \frac{IB}{IC}$, și făcînd înlocuirile, se obține același rezultat ca în (2').

10.3. Un mecanism format dintr-o bară AB ce alunecă în B pe o jumătate de cilindru de rază r, iar capătul A culisează pe o bară orizontală care trece prin axa cilindrului (fig. 10.17).

Să se afle baza, rostogolitoarea și să se verifice că viteza unghiulară a barei în jurul capătului A este identică cu viteza unghiulară instantanee de rotație în jurul lui I.

Rezolvare. a) Centrul instantaneu de rotație se află la intersecția perpendicularelor ridicate pe vectorii viteză în punctele A și B, $\bar{v}_A$ respectiv $\bar{v}_B$.

Luînd ca axe fixe diametrul OA și perpendiculara în O pe acesta, coordonatele lui A, originea axelor mobile, sînt :

$$x_0 = \frac{r}{\cos \alpha}; \quad y_0 = 0.$$

Ecuațiile parametrice ale bazei sînt date de relațiile :

$$x_1 = \frac{r}{\cos \alpha}; \quad y_1 = \frac{r \sin \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

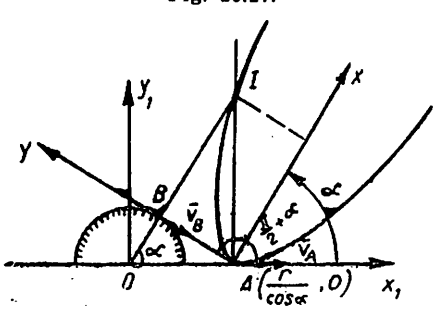
din care, eliminînd parametrul variabil α, se obține ecuația :

$$x_1^4 - r^2 x_1^2 - r^2 y_1^2 = 0.$$

Ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei, determinate cu relațiile (*c*), ținînd seama că $y_0 = 0$, sînt :

$$x = r \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad y = r \operatorname{tg} \alpha.$$

Fig. 10.17.



Eliminînd parametrul α, se obține ca rostogolitoare parabola :

$$y^2 = rx$$

care are vîrful în A, axa Ax și parametrul $r/2$.

b) Ţinînd seamă de egalitatea unghiurilor existente în jurul punctelor A şi I, rezultă că viteza unghiulară de rotaţie a barei în jurul lui A, este egală cu viteza unghiulară de rotaţie a barei în jurul lui I, deoarece :

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

10.4. Două bare AC şi BC sînt legate între ele printr-o articulaţie în punctul C şi de două culise în punctele A şi B, care se mişcă în linie dreaptă cu vitezele $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ (fig. 10.18).

Aplicînd teorema proiecţiilor vectorilor viteză, să se determine viteza punctului C şi centrul instantaneu de rotaţie al barei AC.

Rezolvare. Proiectînd vectorii viteză $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ respectiv pe direcţiile barelor AC şi BC, se obţin componentele $\bar{v}_A'$ şi $\bar{v}_B'$. Punctul C, comun barelor AC şi BC, va avea o astfel de mişcare încît viteza sa absolută va avea drept proiecţii pe barele AC şi BC tocmai vitezele v_A' şi v_B', determinate anterior. Ca urmare, la intersecţia perpendicularelor ridicate din extremităţile vectorilor $\bar{v}_A'$ şi $\bar{v}_B'$ pe direcţia barelor AC şi BC se găseşte extremitatea vectorului $\bar{v}_C$.

Perpendicularele în A şi C pe direcţiile vitezelor punctelor A şi C se întîlnesc în punctul I, centrul instantaneu de rotaţie al barei AC.

10.5. Un paralelogram articulat $OACB$ are punctul O fix, iar barele OA şi OB se rotesc uniform, cu vitezele unghiulare ω_1 şi ω_2; $AO=a$, $OB=b$ (fig. 10.19). Aplicînd teorema proiecţiilor vectorilor viteză, să se determine viteza punctului C.

Rezolvare. Vectorii viteză, corespunzători punctelor A şi B, sînt perpendiculari pe direcţia barelor, avînd mărimea :

$$v_A = OA \cdot \omega_1 = a\omega_1; \quad v_B = OB \cdot \omega_2 = b\omega_2.$$

Proiectînd vectorii $\bar{v}_A$ şi $\bar{v}_B$ pe direcţia barei AC, respectiv BC, se obţin proiecţiile $\bar{v}_A'$ şi $\bar{v}_B'$. Ridicînd perpendiculare din extremităţile componentelor pe direcţiile barelor, intersecţia lor este extremitatea vectorului căutat $\bar{v}_C$.

Dacă $\omega_1=\omega_2$, vectorul viteză a punctului C este perpendicular pe diagonala OC. Paralelogramul se roteşte fără a se deforma.

10.6. O pîrghie rigidă, cu braţele rectangulare, alunecă cu capătul A de-a lungul unei şine D, în timp ce bara BC trece printr-un lagăr fix C, care poate pivota (fig. 10.20). Să se determine baza şi rostogolitoarea mecanismului.

Rezolvare. Centrul instantaneu de rotaţie se află la intersecţia perpendicularelor în A şi C pe direcţia vectorilor viteză, $\bar{v}_A$, respectiv $\bar{v}_C$.

Fig. 10.18.

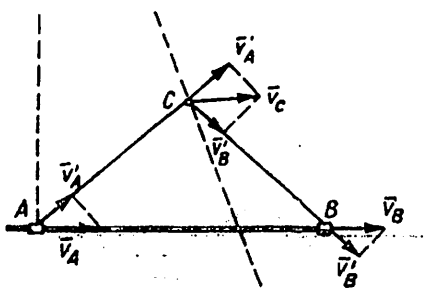
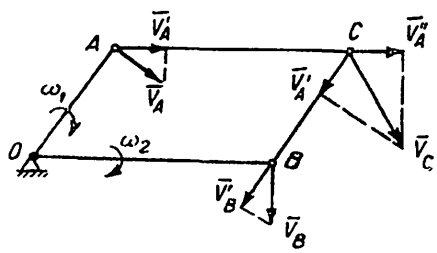


Fig. 10.19.



Luînd ca axe fixe o paralelă şi o perpendiculară dusă prin C la şina D, iar ca axe mobile direcţiile braţelor pîrghiei, coordonatele (a, b) ale originii B a axelor mobile în raport cu sistemul fix, în funcţie de distanţa l şi unghiul α, sînt :

$$a=AF+FG-AH=\frac{l}{\cos\alpha}+l\operatorname{tg}\alpha-l\cos\alpha=l(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha;$$

$$b=-(CG+HB)=-(l+l\sin\alpha)=-l(1+\sin\alpha).$$

Ecuaţiile parametrice ale bazei rezultă aplicînd relaţiile (d) :

$$x_1=(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha+l\cos\alpha=\frac{l}{\cos\alpha}+l\operatorname{tg}\alpha;$$

$$y_1=-l(1+\sin\alpha)+l\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{l}{\cos^2\alpha}+l\sin\alpha=x_1\operatorname{tg}\alpha.$$

Eliminînd parametrul variabil α între ecuaţiile precedente, se obţine pentru bază parabola :

$$x_1^2-2ly_1-l^2=0,$$

care are vîrful în punctul C, ca axă Cy, ca directoare axa Cx şi focarul în F', simetricul punctului G faţă de C.

Ecuaţiile parametrice ale rostogolitoarei rezultă aplicînd relaţiile (16.5) :

$$x=\left(\frac{l\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{l}{\cos^2\alpha}+l\sin\alpha\right)\sin\alpha+l\cos\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$y=\left(\frac{l\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{l}{\cos^2\alpha}+l\sin\alpha\right)\cos\alpha-l\cos\alpha\cdot\sin\alpha.$$

Eliminînd parametrul α, se obţine ca ecuaţie a rostogolitoarei parabola :

$$2lx=y^2+l^2,$$

care are axa BX, vîrful în mijlocul M al barei AB, focarul în A şi , ca directoare, direcţia barei BC.

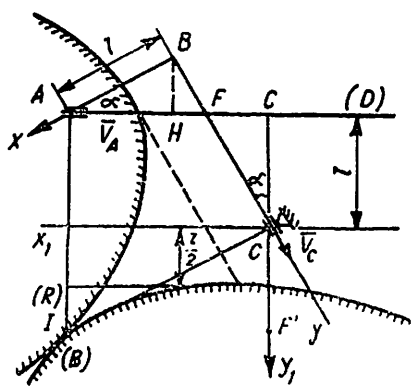
10.7. Să se determine centrul instantaneu de rotaţie şi viteza unui punct de pe periferia roţilor motoare ale unei locomotive care trage un tren, în următoarele cazuri :

a) roţile motoare au o mişcare de rostogolire fără alunecare ;

b) datorită încărcăturii mari a trenului şi aderenţei mici dintre roată şi şină, roţile alunecă, fără ca trenul să pornească ;

c) la pornirea trenului, roţile motoare se rostogolesc şi alunecă în acelaşi timp.

Fig. 10.20.



Rezolvare. a) Roţile motoare avînd o mişcare de rostogolire fără alunecare, centrul instantaneu

de rotație se găsește la punctul de contact dintre roată și șină. Viteza unui punct oarecare M este $v_M = MI \cdot \Omega$.

b) Roata motoare se învîrtește în jurul axei O, alunecînd de-a lungul șinei, în așa fel încît centrul roții O nu poate avea o mișcare în raport cu șina. O este deci centrul instantaneu de rotație (fig. 10.21).

Punctele A și B avînd raze de rotație egale, vor avea și vitezele egale.

Dacă roata se învîrtește cu o viteză unghiulară ω, rezultă :

$$v_A = v_B = R\omega.$$

c) Se notează cu v_A viteza periferică a unei roți motoare față de carcasă și cu v_B viteza față de șină ($v_A > v_B$). Din examinarea celor trei cazuri, se constată că v_B poate varia între valoarea 0 (rostogolire fără alunecare) și v_A (alunecare fără rostogolire). Aici avem un caz intermediar.

Centrul instantaneu de rotație se va găsi pe perpendiculara comună în A și B, pe vectorii viteză (fig. 10.22) și la o distanță de A și B, astfel încît :

$$v_A = \Omega \cdot AI \; ; \quad v_B = \Omega \cdot BI.$$

Împărțindu-le, rezultă :

$$\frac{AI}{BI} = \frac{v_A}{v_B}.$$

Cunoscînd că $AI + BI = 2R$, se poate determina distanța BI :

$$BI = \frac{v_B}{v_A + v_B} 2R. \tag{1}$$

Determinarea grafică a vitezei $\bar{v}_0$ a locomotivei, se poate face bazîndu-se pe proprietatea că extremitățile vectorilor viteză a trei puncte coliniare sînt de asemenea coliniare.

Analitic, valoarea lui $\bar{v}_0$ este :

$$v_0 = \Omega \cdot OI.$$

Deoarece $\Omega = \frac{v_B}{BI}$, rezultă :

$$v_0 = v_B \cdot \frac{OI}{BI} = v_B \left(\frac{R}{BI} - 1 \right).$$

Introducînd valoarea lui BI, dată de (1), se obține :

$$v_0 = \frac{v_A - v_B}{2}.$$

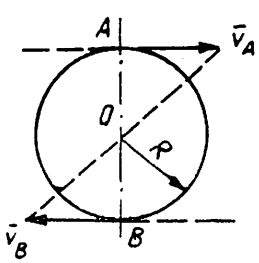


Fig. 10.21.

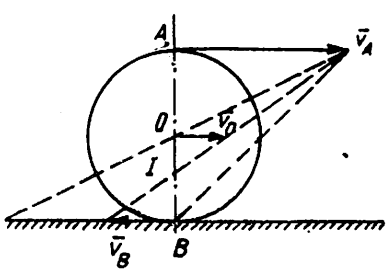


Fig. 10.22.

Sensul de mişcare al locomotivei este dat de sensul lui $\bar{v}_0$, adică dacă viteza periferică a roţii este mai mare ca viteza de alunecare pe şină, locomotiva va înainta.

10.8. Unele uşi de tramvai, comandate central, au forma unui unghi diedru cu feţe egale (fig. 10.23). Una din feţe rotindu-se în jurul axei Δ cu viteza unghiulară constantă ω, cealaltă faţă se deplasează cu punctul A în lungul unui şanţ de ghidaj. Să se determine :

a) centrul instantaneu de rotaţie, baza şi rostogolitoarea ;

b) viteza marginei AB a uşii.

Rezolvare. a) Uşa are o mişcare plană, care va fi studiată în planul ACE (fig. 10.23). În mişcare, latura CE descrie un arc de cerc, astfel încît centrul instantaneu de rotaţie se va găsi la intersecţia direcţiei EC cu perpendiculara în A pe vectorul $\bar{v}_A$, viteza punctului A.

Ţinînd seamă că triunghiul ACE este isoscel, deci :

$$AC=CE=l,$$

coordonatele punctului I, în raport cu un sistem de axe care trec prin E, sînt :

$$x_1=-2\,l\cos\alpha\,;\quad y_1=2\,l\sin\alpha.$$

Eliminînd parametrul variabil α între cele două ecuaţii, rezultă ecuaţia bazei :

$$x_1^2+y_1^2=4l^2,$$

un cerc avînd centrul în E şi raza $EI=2$.

Faţă de un sistem de axe mobil, cu originea în C, coordonatele centrului instantaneu de rotaţie sînt :

$$x=-IC\cos 2\,\alpha=-l\cos 2\,\alpha\,;$$
$$y=IC\sin 2\,\alpha=l\sin 2\alpha.$$

Eliminînd parametrul variabil α, rezultă ecuaţia rostogolitoarei :

$$x^2+y^2=l^2,$$

un cerc avînd centrul în C şi raza $CI=l$.

b) Viteza punctului A este :

$$v_A=IA\cdot\Omega.$$

Deoarece :

$$v_c=CE\cdot\omega=CI\cdot\Omega$$

şi cum $CE=CI=l$, rezultă : $\Omega=\omega$. Deci :

$$v_A=IA\cdot\omega=2l\omega\sin\alpha.$$

Viteza marginii uşii AB (fig. 10.23) este maximă pentru $\alpha=\frac{\pi}{2}$, deci cînd uşa este deschisă şi minimă pentru $\alpha=0$, deci cînd uşa este închisă.

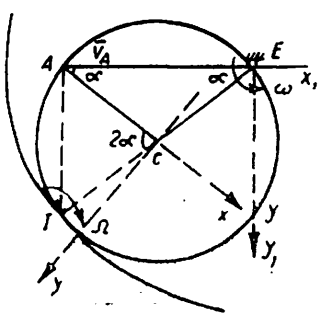


Fig. 10.23.

10.9. Pe bara OA, care se rotește în jurul axului O cu o viteză unghiulară constantă ω, se deplasează culisa C, cu o viteză constantă u (fig. 10.24). Să se determine:

a) centrul instantaneu de rotație, baza și rostogolitoarea;

b) viteza culisei după ce tija s-a rotit din poziția inițială cu un unghi θ.

Rezolvare. a) Mecanismul se compune din trei părți: tija, culisa și batiul, astfel încît are:

$$N=\frac{3\cdot 2}{2}=3$$

centre de rotație și anume:

— O, centru de rotație fix;

— culisa, avînd o mișcare de translație de-a lungul tijei, centrul ei de rotație este aruncat la infinit; acest centru aflîndu-se la infinit, se va găsi pe perpendiculara dusă pe axa tijei, în orice punct al ei;

— cel de-al treilea centru de rotație se va găsi pe direcția celor două centre de rotație, adică pe perpendiculara în O pe tijă, conform teoremei coliniarității centrelor de rotație, și la o distanță

$$OI=\frac{u}{\omega}.$$

Deoarece u și ω sînt constante, rezultă că OI=constant, astfel încît atunci cînd tija se rotește, punctul I va descrie un cerc cu raza u/ω. Deci baza este un cerc cu centrul în O.

În raport cu un sistem de axe mobil xoy, legat de culisă, se observă că y=constant. Deci rostogolitoarea este o dreaptă care se menține tot timpul paralelă cu tija.

b) Viteza absolută v a culisei va fi:

$$v=IC\cdot\Omega,$$

unde Ω este viteza unghiulară de rotație a sistemului, în jurul centrului instantaneu de rotație.

Pe de altă parte:

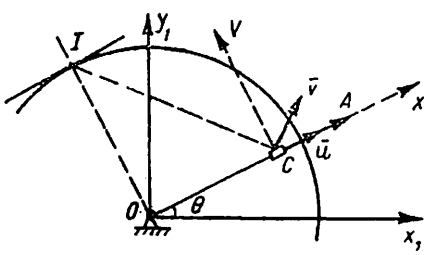
$$u=OI\cdot\Omega;$$

$$\text{însă: } \Omega=\omega, \text{ astfel încît: } v=IC\cdot\omega. \qquad (1)$$

Dar:

$$IC=\sqrt{OI^2+OC^2}=\sqrt{\frac{u^2}{\omega^2}+u^2t^2}=\frac{u}{\omega}\sqrt{1+\omega^2t^2}$$

Fig. 10.24.



și cum $\omega t=\theta$, înlocuind în (1) rezultă:

$$v=u\sqrt{1+\theta^2}.$$

10.10. Pentru menținerea tensiunii constante în fir pe timpul bobinării, se introduce un sis-

tem de doi conoizi: primul primește mișcarea de la axul de comandă, iar al doilea conoid imprimă mișcarea axului mosorului, prin intermediul a două roți tronconice $z_1=48$ dinți și $z_2=12$ dinți (fig. 10.25).

Diametrul mosorului gol $d_0=40$ mm.

Diametrul mosorului plin $d_f=100$ mm.

Diametrul inițial al conoidului (1) $D_{10}=172$ mm.

Diametrul inițial al conoidului (2) $D_{20}=90$ mm.

Știind că turația conoidului (1) este constantă și egală cu 210 rot/min, să se determine:

a) turația inițială a mosorului (cureaua de transmisie fiind la capătul conoizilor);

b) turația conoidului (2) la turația corespunzătoare mosorului plin;

Rezolvare: a) Turația inițială a conoidului (2) este:

$$N_{20}=N_1\frac{D_{10}}{D_{20}}=210\,\frac{172}{90}\approx 400 \text{ rot/min},$$

de unde rezultă turația mosorului:

$$n_0=4\,N_{20}=4\cdot 400=1\,600 \text{ rot/min}.$$

b) Tensiunea în fir trebuind să fie constantă, înseamnă că viteza tangențială a mosorului trebuie să fie menținută aceeași în tot timpul înfășurării firului pe mosor. Deci se poate scrie:

$$v_t=r_0\cdot\omega_0=r\omega, \quad \text{sau} \quad d_0n_0=dn,$$

de unde, la sfîrșitul bobinării, turația mosorului va fi:

$$n_f=n_o\frac{d_0}{d_f}=1\,600\,\frac{40}{100}=640 \text{ rot/min}.$$

La sfîrșitul bobinării, turația conoidului (2) va fi:

$$N_{2f}=\frac{1}{4}n_f=\frac{640}{4}=160 \text{ rot/min}.$$

10.11. La un sistem bielă-manivelă, manivela, în lungime r, se rotește cu n rot/min (fig. 10.26). Știind că lungimea bielei este l, să se determine viteza și accelerația piciorului P al bielei pentru θ dat.

Aplicație. $r=20$ cm; $l=80$ cm; $n=120$ rot/min.; $\theta=60°$.

Rezolvare. Distanța x de la centrul de rotație al manivelei O la piciorul bielei P, aflată într-o poziție oarecare în lungul cursei, este

$$x=r\cos\theta+l\cos\varphi. \qquad (1)$$

Fig. 10.25.

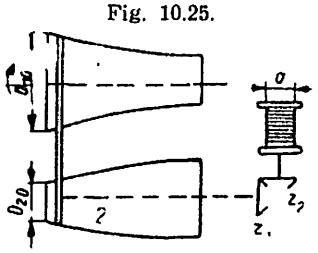
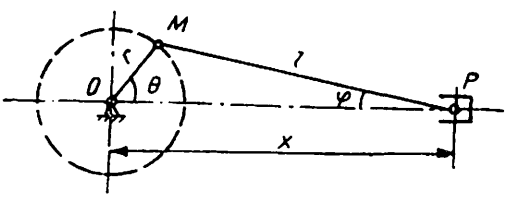


Fig. 10.26.



Din teorema sinusurilor, în triunghiul OMP avem:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{r^2}{2}\sin^2\theta}.$$

Ca urmare, relația (1) devine:

$$x = r\cos\theta + l\sqrt{1-\frac{r^2}{2}\sin^2\theta}. \tag{2}$$

Notînd $\frac{r}{l}=\lambda$ și știind că practic $\lambda<\frac{1}{2}$, se poate dezvolta în serie expresia de sub radical, astfel încît expresia (2) devine:

$$x = r\left(\frac{1}{\lambda}+\cos\theta-\frac{\lambda}{2}\sin^2\theta-\frac{\lambda^3}{8}\sin^4\theta-\frac{\lambda^5}{16}\sin^6\theta+\ldots\right).$$

Cum însă:

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta);$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta);$$

$$\sin^6\theta=\frac{1}{32}(10-15\cos 2\theta+6\cos 4\theta-\cos 6\theta),$$

se obține:

$$x = r\left(A_0+\cos\theta+\frac{1}{4}A_2\cos 2\theta+\frac{1}{16}A_4\cos 4\theta+\frac{1}{36}A_6\cos 6\theta+\ldots\right). \tag{3}$$

unde:

$$A_0=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{4}\lambda-\frac{3}{64}\lambda^3+\ldots;\quad A_2=+\frac{1}{4}\lambda^3+\ldots$$

$$A_4=\frac{1}{4}\lambda^3+\frac{3}{16}\lambda^5+\ldots;\quad A_6=\frac{9}{128}\lambda^5+\ldots.$$

Pentru diferite valori ale lui λ, se obțin valorile trecute în tabela 10.1.

Tabela 10.1

Valorile parametrului λ

$1/\lambda$	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
A_2	0,5312	0,4173	0,3431	0,2918	0,2540	0,2250	0,2020
A_4	0,0326	0,0182	0,0101	0,0062	0,0041	0,0028	0,0021
A_6	0,0016	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001	—	—

Se vede din această tabelă, că se pot lua cu suficientă aproximaţie numai primii doi termeni, A_0 şi A_2, astfel încît expresia (3) se mai poate scrie :

$$x = r\left(A_0 + \cos\theta + \frac{1}{4} A_2 \cos 2\theta\right). \qquad (3')$$

Viteza şi acceleraţia piciorului bielei se obţin luînd derivata întîi, respectiv a doua, a expresiei (3'), în raport cu timpul :

$$v = \dot{x} = -r\omega\left(\sin\theta + \frac{A_2}{2}\sin 2\theta\right). \qquad (4)$$

$$a = \ddot{x} = -r\omega^2(\cos\theta + A_2 \cos 2\theta). \qquad (5)$$

Pentru aplicaţie se obţine :

$$v = -2{,}42 \text{ m/s} \quad \text{şi} \quad a = -11{,}92 \text{ m/s}^2.$$

10.12. Un mecanism se compune dintr-o manivelă OA care se roteşte cu viteza unghiulară ω, acţionînd biela AB, capătul căreia poartă axa B a roţii dinţate R. Roata dinţată se poate deplasa pe o cremalieră fixă EF (fig. 10.27), cuplîndu-se cu cremaliera mobilă GH. Să se determine viteza de deplasare a cremalierei mobile.

Rezolvare. Manivela rotindu-se cu viteza unghiulară ω, butonul manivelei A va avea viteza $v_A = r\omega$, care poate fi descompusă în două componente : $\bar{v}_1$, în lungul bielei, de modul $v_1 = v_A \sin(\alpha - \beta)$ şi $\bar{v}_2$, perpendiculară pe bielă, de modul $v_2 = v_A \cos(\alpha - \beta)$.

Axul roţii B are o mişcare de translaţie orizontală, cu viteza $v_{Bx} = v_1 \cos\beta$, provenită din descompunerea vitezei v_1 după o direcţie orizontală şi alta verticală $v_{By} = v_1 \sin\beta$. Roata R avînd o mişcare de rostogolire fără alunecare pe cremaliera fixă, centrul instantaneu de rotaţie este I, şi ca urmare viteza v_D a cremalierei mobile este :

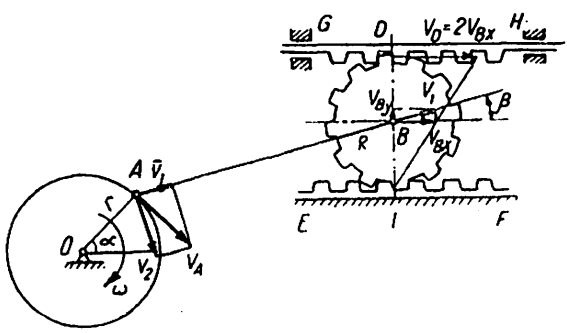
$$v_D = 2\, v_{Bx} = 2\, r\omega \sin(\alpha - \beta)\cos\beta.$$

10.13. Să se determine grafic viteza unghiulară de rotaţie a bielei în jurul axului O_1 în cazul unui mecanism *şeping*.

Rezolvare. a) Construcţia grafică. Se consideră o anumită poziţie a manivelei, definită de unghiul θ. Centrul instantaneu de rotaţie I relativ, dintre bielă şi manivelă, se va găsi la intersecţia direcţiei OO_1 cu perpendiculara pe bielă în punctul C.

Pe perpendiculara în O_1 pe direcţia axelor se ia un segment O_1A, reprezentînd la scară modulul vitezei unghiulare ω a manivelei (figura 10.28). Se uneşte I cu punctul A.

Fig. 10.27.



Prin O se duce o paralelă la direcția O_1A, astfel că segmentul OB reprezintă la scară viteza unghiulară ω' a bielei, corespunzătoare poziției considerate.

b) Justificarea construcției. Din asemănarea triunghiurilor AO_1I și BOI se deduce:

$$\omega' = \omega \frac{OI}{l + OI}. \tag{1}$$

Deoarece:

$$OI = r(\cos\theta + \sin\theta \operatorname{tg}\varphi)$$

și

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r\sin\theta}{l + r\cos\theta},$$

rezultă:

$$\omega' = \omega \frac{r(r + l\cos\theta)}{r^2 + l^2 + 2rl\cos\theta}.$$

10.14. Să se determine grafic viteza capului de cruce la un mecanism bielă-manivelă atunci cînd manivela se rotește cu o viteză unghiulară constantă ω.

Rezolvare.

Metoda 1. *a*) Construcția grafică. Fie o anumită poziție a manivelei, definită de unghiul θ. Prelungind direcția bielei pînă ce intersectează în H diametrul perpendicular pe direcția OP, viteza capului de cruce este:

$$v = OH \cdot \omega,$$

în care segmentul OH este măsurat pe epură la scară (fig. 10.29, *a*).

b) Justificarea construcției. În raport de centrul instantaneu de rotație I, se poate scrie:

$$u = r\omega = MI \cdot \Omega;$$

$$v = PI \cdot \Omega.$$

Fig. 10.28.

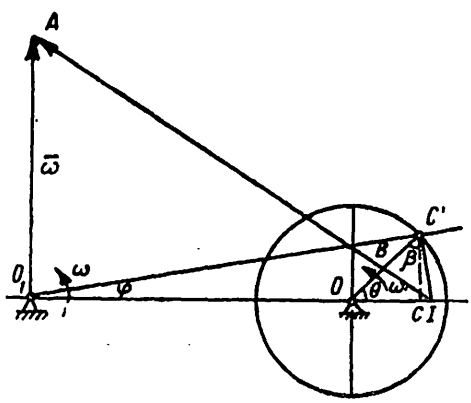
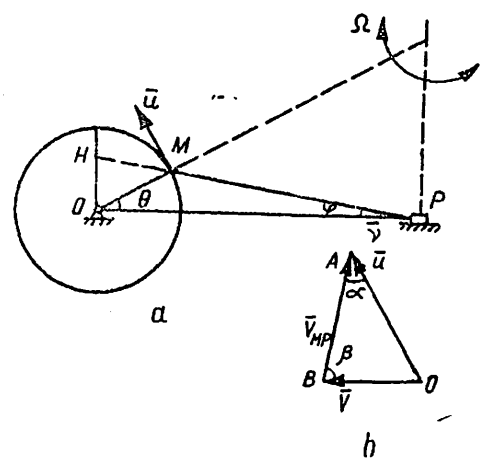


Fig. 10.29.



Împărţind aceste două relaţii, se obţine :

$$\frac{v}{u}=\frac{PI}{MI}=\frac{OH}{OM},$$

căci triunghiurile OHM şi IPM sînt asemenea. Deoarece $OM=r$ şi $u=r\omega$, rezultă :

$$v=\omega\cdot OH.$$

Metoda 2. Construcţia grafică. Se alege un punct O' (figura 10.29, *b*) denumit *pol*, prin care se duce o paralelă la direcţia vitezei u (perpendiculară pe direcţia manivelei) şi se ia la scară un segment :

$$O'A=u=r\omega.$$

Din A se duce o dreaptă perpendiculară pe direcţia bielei, iar din O' se duce o dreaptă paralelă cu direcţia vitezei capului de cruce. Cele două drepte se întretaie în B. Vectorul $O'B$, la scara considerată, reprezintă vectorul viteză al capului de cruce.

10.15. Să se determine grafic acceleraţia capului de cruce la un mecanism bielă-manivelă, acţionat de un piston, cînd manivela se roteşte cu o viteză unghiulară constantă ω.

Rezolvare.

Metoda 1. *a)* Construcţia grafică. Fie o poziţie oarecare a manivelei. Prelungind direcţia bielei pînă în punctul unde intersectează diametrul perpendicular pe direcţia OP, se obţine punctul H (fig. 10.30).

Cu centrul în M şi raza egală cu MH se construieşte un cerc. Apoi, cu centrul în G (mijlocul bielei), se construieşte un alt cerc, avînd raza egală cu jumătatea lungimii bielei.

Cele două cercuri, astfel construite, se intersectează în punctele N şi N'. Dreapta NN' intersectează biela în D şi direcţia lui OP în F. Acceleraţia capului de cruce este :

$$a=OF\cdot\omega^2.$$

b) Justificarea construcţiei. Proiectînd pe direcţia bielei conturul poligonului $OMDF$, se poate scrie :

$$OF\cdot\cos\varphi=OM\cos(\theta+\varphi)+MD. \qquad (1)$$

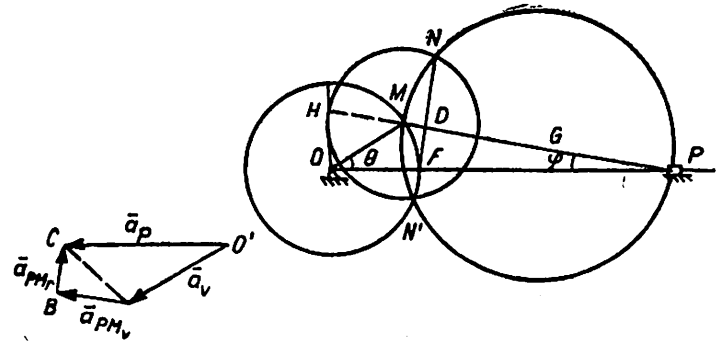


Fig. 10.30.

Pe de altă parte, bazîndu-ne pe o teoremă cunoscută din geometrie:

$$MN^2 = MD \cdot PM,$$

rezultă că: $MH^2 = MD \cdot PM$, deoarece $MN = MH$.

Înlocuind pe MD în relația (1), și dacă se ține seama de teorema sinusurilor, în triunghiul OHM, rezultă:

$$MH = OM \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}.$$

Ținînd seamă că $OM = r$ și $PM = l$, rezultă

$$OF = r \frac{\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{r\cos^2\theta}{l\cos^3\varphi}. \qquad (2)$$

Exprimînd funcțiile trigonometrice ale unghiului φ în raport cu cele ale unghiului θ, dacă se neglijează termenul $\frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta$ ca fiind mic, se obține:

$$OF = r\left(\cos\theta + \frac{r}{l}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right) = r\left(\cos\theta + \frac{r}{l}\cos 2\theta\right),$$

expresie care, înmulțită cu ω^2, dă tocmai valoarea accelerației găsite mai sus

Metoda 2. Printr-un punct O', denumit *pol*, se duce o paralelă la direcția accelerației normale a manivelei (paralelă cu direcția manivelei) și se ia la scară un segment:

$$O'A = a_v = r\omega^2.$$

Mișcarea manivelei fiind uniformă există numai accelerația normală.

Din A se duce o paralelă cu direcția bielei, luînd un segment $AB = \frac{v^2_{PM}}{l}$, unde v_{PM} este viteza extremității P a bielei în raport cu punctul M, viteză determinată prin segmentul AB din poligonul vitezelor (problema 10.14).

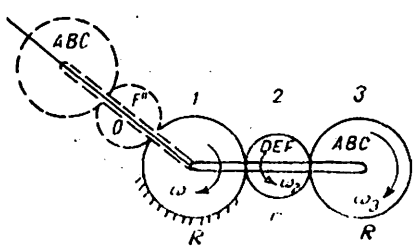
Segmentul AB, din poligonul accelerațiilor, reprezintă accelerația normală a punctului P a bielei.

Din O' se duce o paralelă la direcția accelerației capului de cruce (paralelă cu OP) și prin B se duce o paralelă la accelerația tangențială a bielei (perpendiculară pe direcția bielei). Cele două direcții se intersectează în C.

Segmentul $O'C$, la scară, reprezintă accelerația capului de cruce, iar segmentul BC, la scară, reprezintă accelerația tangențială a extremității P a bielei.

10.16. Dîndu-se angrenajul epicicloidal din figura 10.31, să se determine mișcarea ultimei roți 3, știind că roata 1 este fixă, iar șasiul se rotește cu viteza unghiulară ω.

Fig. 10.31.



Rezolvare. Roata 1 fiind fixă, roțile conducătoare sînt, respectiv roțile 1 și 2. Raportul de transmisie ρ este în acest caz:

$$\rho = (-1)^2 \frac{R}{r} \cdot \frac{r}{R} = +1.$$

Aplicînd formula lui Willis, în care $\omega_1=0$, rezultă:

$$\rho=\frac{\omega_3-\omega}{\omega_1-\omega}=+1,$$

relație care dă $\omega_3=0$, ceea ce arată că roata *3* are numai o mișcare de translație. Dacă, de exemplu, pe roata *3* se scriu literele *ABC*, după mișcare pe roata 3 se poate citi mereu aceste litere.

Observație. Mai general, angrenajul, avînd un număr impar de roți epicicloidale (un număr c par de contacte) între roți de mărimi diferite, dacă se fixează prima roată, atunci ultima roată are o mișcare de translație. Într-adevăr, relația lui Willis se poate scrie:

$$\omega_n=(-1)^c\rho\omega_1+(1-(-1)^c)\omega.$$

Pentru $c=2k$; $\omega_1=0$ rezultă și $\omega_n=0$.

10.17. Să se determine viteza unghiulară de rotație a bielei în jurul axului O_1O, în cazul unui mecanism *șeping* (fig. 10.32).

Rezolvare. Notăm cu ω viteza unghiulară a manivelei r și cu $\omega_1=\frac{d\varphi}{dt}$ viteza unghiulară a bielei, unde φ este unghiul ce-l face biela la un moment dat cu axa O_1O. Ușor se observă că:

$$\varphi=\text{arc tg}\frac{r\sin\theta}{l+r\cos\theta} \tag{1}$$

și

$$\omega_1=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{r(r+l\cos\theta)\omega}{r^2+l^2+2lr\cos\theta}. \tag{2}$$

10.18. Să se determine numărul și poziția centrelor de rotație în cazul unui mecanism *șeping*.

Rezolvare. Mecanismul *șeping* se compune din patru elemente: manivela *1*, culisa *2*, biela *3* și batiul *4* (fig. 10.33).

Numărul centrelor de rotație este:

$$N=\frac{4\cdot3}{2}=6,$$

dintre care:

— O_{14} și O_{34} sînt centre de rotație fixe:

— O_{12} este un centru permanent.

Culisa *2*, avînd o mișcare de translație de-a lungul bielei *3*, centrul de rotație O_{23} este aruncat la infinit.

Fig. 10.32.

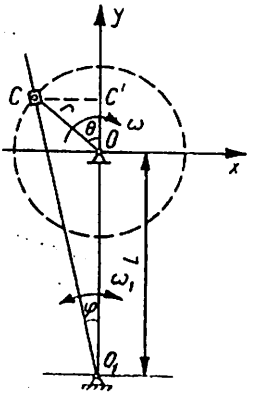
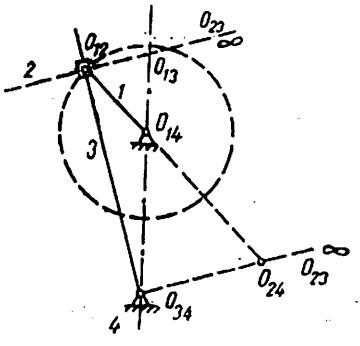


Fig. 10.33.



Centrele instantanee de rotație se determină cu ajutorul teoremei coliniarității a trei centre de rotație și anume: centrul instantaneu O_{13} se găsește la intersecția direcției (O_{12}, O_{23}) cu direcția (O_{14}, O_{34}).

Centrul instantaneu O_{24} se găsește la intersecția direcției (O_{12}, O_{14}), cu direcția (O_{34}, O_{23}). Trebuie remarcat că centrul de rotație O_{23} fiind la infinit, se va găsi pe perpendiculara dusă pe axa culisei, în orice punct al ei.

10.19. Să se determine centrele de rotație ale unui sistem bielă-manivelă, precum și viteza capului de cruce, atunci cînd manivela se rotește cu viteza unghiulară ω_1.

Rezolvare. a) Mecanismul bielă-manivelă se compune din patru elemente: manivela *1*, biela *2*, capul de cruce *3* și batiul *4* (fig. 10.34).

Numărul centrelor de rotație este:

$$N=\frac{4\cdot 3}{2}=6,$$

din care:

— O_{14} este un centru fix;

— O_{12} și O_{23} sînt centre permanente de rotație;

— O_{34} este un centru de rotație la infinit, capul de cruce avînd o mișcare de translație.

Centrul instantaneu de rotație O_{24} se găsește la intersecția direcțiilor $O_{23}O_{34}$ și $O_{14}O_{12}$, iar centrul instantaneu de rotație O_{13} se găsește la intersecția direcțiilor $O_{23}O_{12}$ și $O_{14}O_{34}$.

b) Notînd cu ω_1 viteza unghiulară de rotație a sistemului în jurul centrului instantaneu de rotație O_{24} și cu v_1 și v_3 vitezele extremităților manivelei și respectiv a capului de cruce, se poate scrie:

$$v_1=R\omega_1=P_{12}O_{24}\Omega, \tag{1}$$

$$v_3=O_{23}O_{24}\Omega, \tag{2}$$

și se obține:

$$v_3=R\omega_1\frac{O_{23}O_{24}}{O_{12}O_{24}},$$

în care R este lungimea manivelei.

10.20. Într-o mișcare plană cunoscînd, din poligonul vitezelor, viteza unui punct oarecare B față de punctul A, să se construiască grafic accelerația normală a punctului B față de A (fig. 10.35).

Fig. 10.34.

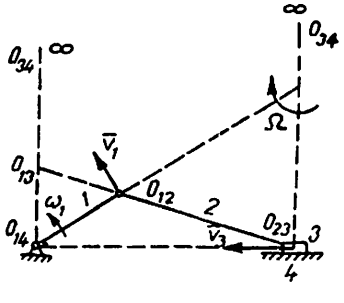
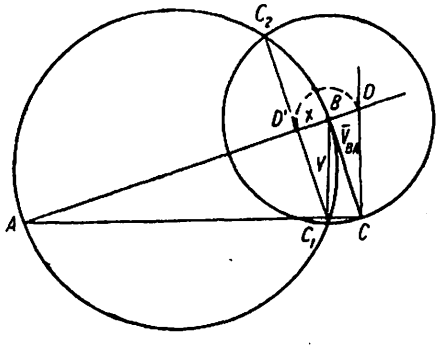


Fig. 10.35.



Rezolvare. Din proprietăţile poligomului vitezelor, avem $\frac{a'b'}{AB}=\omega$, deci $v_{BA}=a'b'=\omega\cdot AB$. Ca urmare se pot folosi următoarele construcţii:

1. În extremitatea B a lui AB ridicăm perpendiculara $BC=v_{BA}=a'b'$. Perpendiculara ridicată în C pe AC taie pe AB în D. Din proprietăţile elementare ale triunghiului dreptunghic ACD rezultă:

$$BD=\frac{\overline{BC}^2}{AB}=\omega^2\cdot AB.$$

Cu un compas de centru B şi raza BD construim simetricul D' a lui D faţă de B. Componenta acceleraţiei căutate, în mărime, direcţie şi sens, este $\overline{BD'}=(a_v)_{AB}=-\omega^2\cdot AB$.

2. Cercul de centru B şi rază $v_{BA}=a'b'$, taie cercul de diametru AB în C_1 şi C_2. Axa radicală C_1C_2 a celor două cercuri taie drepta AB în D', extremitatea componentei vitezei normale.

10.21. Să se determine viteza şi acceleraţia unghiulară într-o mişcare plan-paralelă cunoscînd vectorii $\bar{a}_A$ şi $\bar{a}_B$ a două puncte oarecare A şi B şi poziţia acestora (fig. 10.36).

Rezolvare. Se va folosi metoda planului acceleraţiilor. Din punctul arbitrar p'', la o scară convenabilă k_a, se duc vectorii $\overrightarrow{p''a''}$ şi $\overrightarrow{p''b''}$, paraleli respectiv cu $\bar{a}_A$ şi $\bar{a}_B$. Din a'' şi b'' se duc paralele şi perpendiculare pe dreapta AB, care se intersectează în d. La scara aleasă, cele două componente ale acceleraţiei lui B faţă de A sînt:

$$|\bar{a}_r|=|\overrightarrow{ab''}|=\varepsilon\cdot AB;\quad |\bar{a}_v|=|\overrightarrow{a''d}|=\omega^2\cdot AB.$$

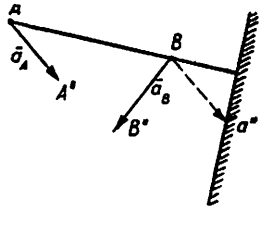
De aici rezultă valorile vitezei şi acceleraţiei unghiulare, ω şi ε.

Construcţia este posibilă numai în semiplanul nehaşurat.

10.22. Punctele A, B, C sînt articulaţii consecutive ale unui mecanism plan oarecare. Cunoscînd vitezele articulaţiilor A şi C se cer vitezele punctelor B şi D, folosind metoda rabaterii şi metoda proiecţiilor.

Rezolvare. a) Metoda rabaterii. (fig. 10.37). Se duc din A şi C perpendiculare pe vitezele cunoscute v_A şi v_c, a căror extremităţi se rabat în A_1' şi C_1'. Din A_1' se duce o paralelă la AB iar din C_1' o paralelă la CB, paralele ce se

Fig. 10.36.



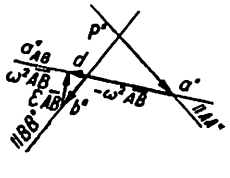
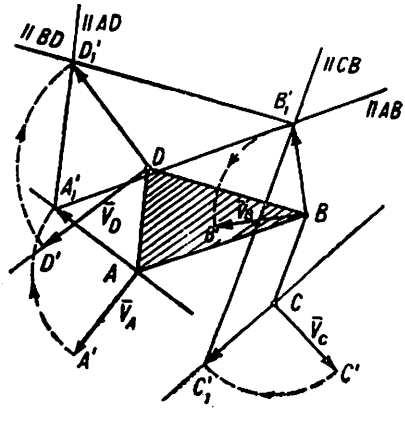


Fig. 10.37.



întretaie în B_1'. Segmentul BB_1' este viteza rabătută a punctului B. Ridicînd perpendiculara în B pe BB_1', prin rabatere obținem $\overline{BB'}=\bar{v}_B$.

Cunoscînd acum viteza punctelor D și B, printr-o construcție analogă, obținem vitezele punctului D, $\bar{v}_D=\overline{DD'}$.

b) Metoda proiecțiilor. (fig. 10.38) Se proiectează vitezele cunoscute ale punctelor A și C, respectiv, pe BA, DA și BC. Se ia $CC''=BB_1''$ și $BB''=AA''$, iar perpendicularele ridicate în BB'' pe BA și în B_1'' pe BC se întretaie în B', și viteza lui B este $\bar{v}_B=\overline{BB'}$. Analog se află viteza punctului D, care are drept proiecții pe barele DA și DB mărimile:

$$DD''=AA_1'' \quad \text{și} \quad DD_1''=BB_2''.$$

C. **PROBLEME NEREZOLVATE.**

10.23. La un flyer, axul de comandă O_1 are o turație de 360 rot/min, iar axul O_2, care pune în mișcare axul furcilor, trebuie să se rotească în același sens cu axul de comandă, cu 420 rot/min, (fig. 10.39). Cunoscînd că roata O_1, montată pe axul de comandă, are 28 dinți, să se studieze angrenajul.

Indicație și răspuns. Pentru a imprima axului O_2 o rotație în același sens cu axul O_1 trebuie să se intercaleze între cele două roți R_1 și R_2 o roată intermediară R_3, cu axul O_3.

Rezultă:

$$z_2=z_1\frac{n_1}{n_2}=28\frac{360}{420}=24 \text{ dinți.}$$

Se constată că roata intermediară nu are alt rol decît de a menține pentru axul comandat același sens de rotație ca al axului care comandă. Numărul dinților roții intermediare nu intră în calculul angrenajului.

10.24. La o presă cu fricțiune, roata orizontală R, solidară cu șurubul S, este acționată de un disc D, care se rotește cu o turație constantă n (fig. 10.40). Să se determine turația roții R.

Răspuns. $\omega'=\frac{x}{R}$.

10.25. Un strung primește mișcarea de la un ax central prin intermediul a două șaibe acționate de o curea de transmisie (fig. 10.41). Pe axul O_1 se găsește o șaibă, avînd diametrul D_1. Pe axul O_2 se găsește o altă șaibă. Distanța dintre axe fiind a, să se dimensioneze șaiba strungului astfel ca, turația axului O_1

Fig. 10.38.

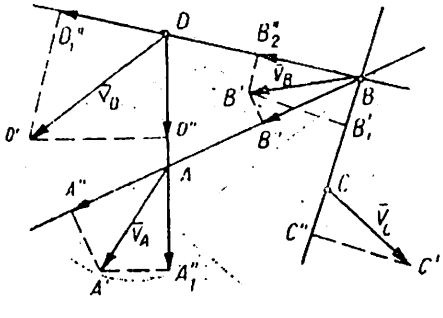


Fig. 10.39.

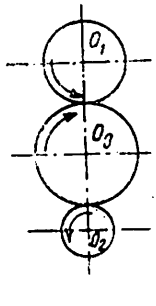
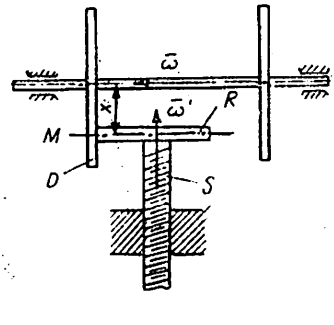


Fig. 10.40.



fiind n_1 rot/min, turaţia axului O_2 să fie n_2 rot/min. Să se determine lungimea curelei.

Răspuns. $R_2=R_1\frac{n_1}{n_2}$;

$$l=2\sqrt{a^2+(R_1-R_2)^2}+\pi(R_1+R_2)+2(R_1-R_2)\arcsin\frac{R_1-R_2}{a}.$$

10.26. Transmisia mişcării, de la electromotorul M la cilindrul debitor D al unui laminor, se face prin intermediul a două roţi dinţate care au, respectiv, z_1 şi z_2 dinţi, şi două roţi acţionate printr-o curea (fig. 10.42). Ştiind că electromotorul are n rot/min, să se determine diametrul roţii R_2.

Indicaţie şi răspuns. Din relaţiile $n_1z_2=nz_1$ şi $n_2R_2=n_1R_1$ rezultă:

$$R_2=\frac{n}{n_1}\cdot\frac{z_1}{z_2}R_1.$$

10.27. Un măsurător de urzeală, avînd forma din figura 10.43, are diametrul valţului d. Mişcarea valţului se transmite printr-un angrenaj de două roţi dinţate, avînd z_1 şi z_2 dinţi, la un şurub fără sfîrşit, care antrenează o roată elicoidală cu z_3 dinţi, Pe axul roţii elicoidale se găseşte un indicator care ştiind că s-a rotit din poziţia iniţială cu α°, se cere metrajul M de urzeală trecut prin valţuri.

Indicaţie şi răspuns. Raportul de transmitere dintre şurubul fără sfîrşit şi roata cu indicator este egal cu numărul de dinţi z_3 al indicatorului. La rotirea cu unghiul α, axul n_2 parcurge $z_3'=\frac{\alpha}{360^\circ}z_3$ dinţi. Ca urmare, ţinînd seamă de relaţia $z_1n_1=z_2n_2$, rezultă:

$$M=\pi\cdot d\cdot n_1=\pi d\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}\cdot\frac{z_2}{z_1}z_3.$$

10.28. Două cremaliere se deplasează în acelaşi sens cu viteza $\bar{v}$. Ele sînt acţionate de două roţi dinţate R_1 şi R_2 care se rotesc, respectiv, cu n_1 şi n_2 rot/min (fig. 10.44). Ştiind că distanţa dintre axele cremalierelor este d, să se dimensioneze roţile şi să se determine vitezele cremalierelor.

Răspuns. $R_1=\frac{1}{2}\frac{n_2}{n_1+n_2}d$; $R_2=\frac{1}{2}\frac{n_1}{n_1+n_2}d$; $v=\frac{\pi}{60}\cdot\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}d$.

10.29. O culisă este acţionată de o manivelă care se roteşte cu o turaţie constantă n (fig. 10.45). Să se determine viteza $\bar{v}_C$ şi acceleraţia $\bar{a}_C$ a culisei.

Fig. 10.41.

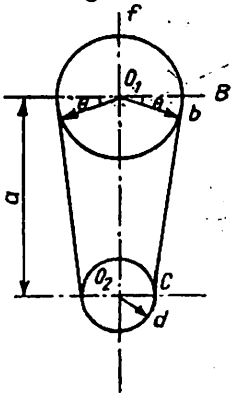


Fig. 10.42.

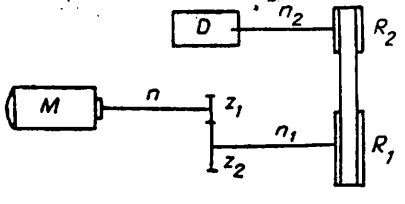


Fig. 10.43.

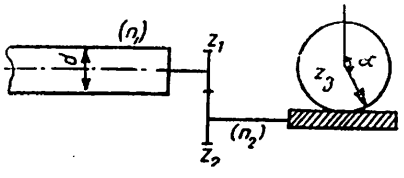
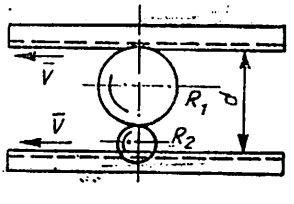


Fig. 10.44.



Indicație și răspuns. Viteza v_C a culisei este proiecția vitezei tangențiale a butonului manivelei v_M pe direcția culisei. Se obține: $v_C = v_M \sin\dot{\theta} = R\dot{\theta}\sin\theta$; $a_C = R\dot{\theta}^2\cos\theta$.

10.30. Se dă mecanismul din figura 10.46. Știind că manivela are o viteză unghiulară constantă, să se determine viteza capătului B al bielei AB, pentru poziția definită de unghiul θ.

Indicație și răspuns. Din ecuația mișcării $x = h\,\mathrm{ctg}\,\theta$, prin derivare rezultă:

$$\dot{x} = -\frac{h\dot{\theta}}{\sin^2\theta}; \quad \ddot{x} = \frac{2h\dot{\theta}^2\cos\theta}{\sin^3\theta},$$

$\theta = \omega \cdot t$. Se poate folosi și metoda mișcării relative.

10.31. Un sistem bielă-manivelă acționează vătala unui război de țesut (fig. 10.47). Cunoscînd dimensiunile pieselor componente ale mecanismului patrulater $ABCD$ și viteza unghiulară ω_1 a elementului motor, să se determine:

a) numărul și poziția centrelor de rotație ale mecanismului;
b) viteza unghiulară a vătalei (biela);
c) viteza articulației D;
d) viteza unui punct oarecare M de pe bielă.

Indicație și răspuns.

a) $N = C_4^2 = 6$; $O_{14} \equiv A$; $O_{34} \equiv B$ sînt fixe; $O_{12} \equiv C$; $O_{23} \equiv D$ sînt permanente. Centrele instantanee de rotație $I_1\,(O_{13})$; $I_2\,(O_{24})$ se determină din teorema coliniarității centrelor de rotație;

b) $\omega_3 = \omega_1 \cdot \dfrac{R}{L}\,\dfrac{O_{23}O_{13}}{O_{12}O_{13}}$;

c, d) Viteza articulației O_{23} și a unui punct M de pe bielă se determină prin teorema proiecției și coliniarității.

Fig. 10.45.

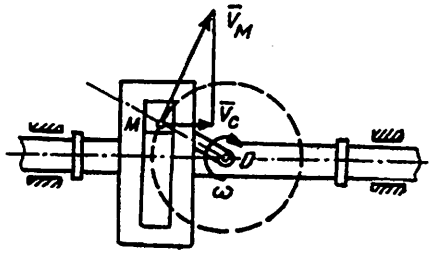


Fig. 10.46.

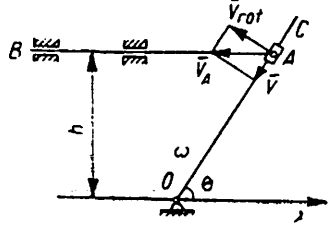


Fig. 10.47.

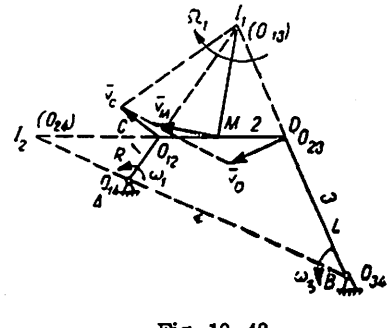
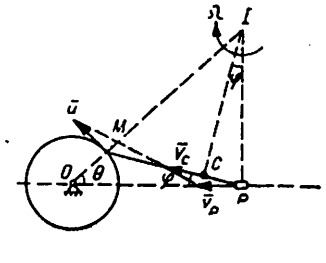


Fig. 10. 48.



10.32. Să se găsească pe biela unui sistem bielă-manivelă, un punct a cărui viteză este dirijată de-a lungul bielei şi să se determine valoarea acestei viteze (fig. 10.48).

Indicaţie şi răspuns. Punctul căutat este proiecţia centrului instantaneu de rotaţie I pe bielă. Extremităţile vitezelor punctelor MCP de pe bielă sînt coliniare.

Viteza punctului C este:

$$v=r\dot{\theta}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\theta}+\frac{r}{l}\cos\theta\right)\sin\theta,$$

unde r este raza bielei şi l lungimea bielei.

10.33. Dîndu-se mecanismul din figura 10.49, în care axul Ax este fix, iar carcasa diferenţialului se roteşte cu viteza unghiulară ω, să se afle raportul dintre turaţia axului Dy şi turaţia carcasei. Axele Ax şi Dy sînt în prelungire, iar roţile B şi C sînt liber montate pe axul lor EF, care este fixat de carcasa diferenţialului.

Indicaţie şi răspuns. Luînd $z_A=n-1$ dinţi, $z_B=z_D=n$ dinţi şi $z_C=n+1$ dinţi, axul Ax fiind fix ($\omega_x=0$), se obţine

$$\frac{\omega_y}{\omega}=\frac{1}{n^2},$$

deci la viteza unghiulară ω a carcasei se obţine o demultiplicare de n^2 ori. În particular, pentru $n=50$, raportul de demultiplicare este 2 500.

10.34. Să se determine viteza şi spaţiul parcurs de cadrul mecanismului cu excentric din figura 10.50

Indicaţie şi răspuns. Legea de mişcare a supapei pe verticala articulaţiei O, în lagărele L_1 şi L_2, este:

$$s=e\,(1-\cos\omega t).$$

De unde $\dot{s}=v_n=e\omega\cos\omega t$ şi $v_A=e\omega\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

10.35. Un excentric, avînd centrul de rotaţie la distanţa d de centrul cercului, acţionează asupra unui tachet T (fig. 10.51). Raza cercului fiind r, să se determine viteza şi acceleraţia tachetului în funcţie de unghiul θ.

Indicaţie şi răspuns. Prin deducţii elementare, rezultă:

$$OA=x=a\cos\theta+r\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta}.$$

Fig. 10.49.

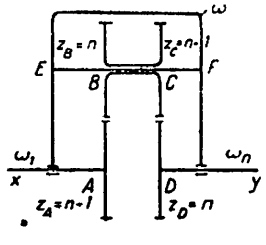


Fig. 10.50.

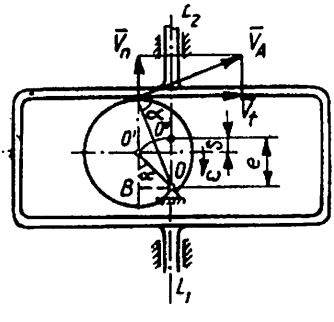
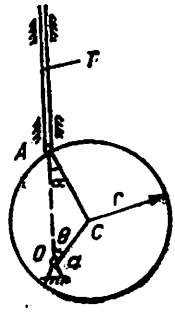


Fig. 10.51.



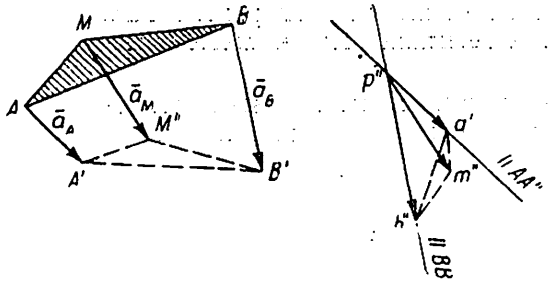


Fig. 10.52.

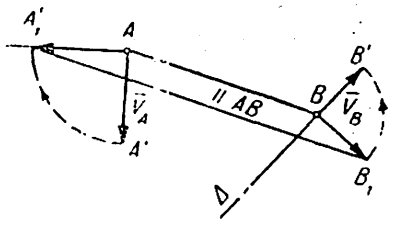


Fig. 10.53.

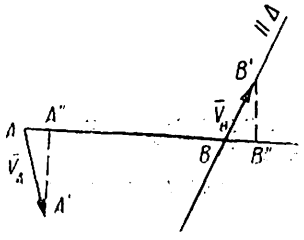


Fig. 10.54.

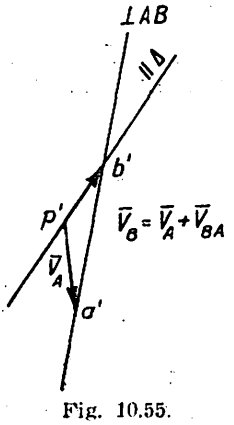


Fig. 10.55.

Fig. 10.56.

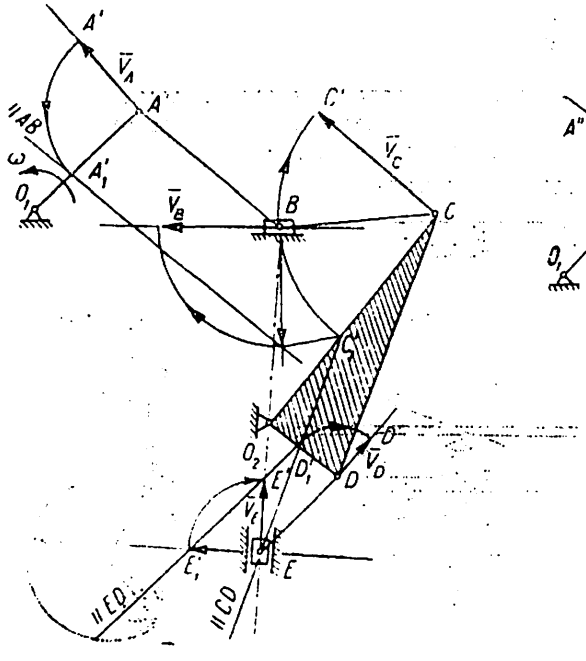
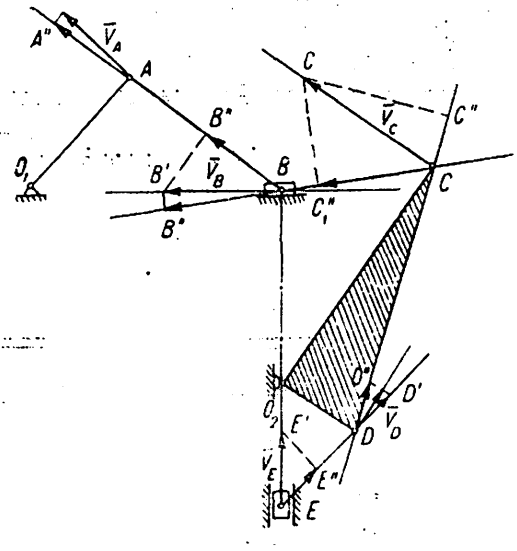


Fig. 10.57.



Considerînd numai doi termeni ai dezvoltării în serie, suficienți pentru practică, prin derivare se obține pentru viteză și accelerație valorile:

$$\dot{x} = -a\left(\sin\theta + \frac{a}{2r}\sin 2\theta\right)\dot{\theta}\,; \quad \ddot{x} = -a\left(\cos\theta + \frac{a}{r}\cos 2\theta\right)\dot{\theta}^2,$$

care reprezintă expresii similare cu cele aflate la mecanismul bielă-manivelă.

10.36. Cunoscînd accelerațiile a două puncte A și B, să se determine accelerația unui punct oarecare M al elementului hașurat din figura 10.52.

Indicație și răspuns. Accelerația $\bar{a}_M = \overline{MM''}$ a punctului M este definită de triunghiurile direct asemenea $A''M''B''$ și AMB.

Folosind metoda planului accelerațiilor rezultă că și triunghiurile $a''m''b''$ și AMB sînt direct asemenea, $\bar{a}_M = \overline{MM''} = \overline{p''m''}$. Se va ține seamă de scările alese.

10.37. Să se determine distribuția de viteze într-o mișcare plană, dacă se cunoaște viteza $\bar{v}_A$ a unui punct A și direcția Δ a vitezei unui punct B, prin metoda rabaterii, proiecțiilor și planul vitezelor.

Indicație și răspuns.

a) metoda rabaterii (fig. 10.53);

b) metoda proiecțiilor (fig. 10.54);

c) metoda planului vitezelor (figura 10.55).

10.38. Să se determine pentru mecanismul O_1ABCO_2DE din figura 10.56, căruia i se cunoaște viteza punctului A, viteza unghiulară ω a elementului motor O_1A și $\sphericalangle DO_2C = 90°$, vitezele punctelor A, B, C, D și E, prin metoda rabaterii și a proiecției.

Răspuns.

a) metoda rabaterii figura 10.56;

b) metoda proiecțiilor figura 10.57.

10.39. Fiind dat mecanismul O_1ABCDO_2EG din figura 10.58 și cunoscînd elementul conducător O_1A de viteză unghiulară ω, și avînd $DO_2 = O_2E$, se cere să se determine, prin metoda proiecțiilor, rabaterii și planului (poligonului) vitezelor, vitezele punctelor A, B, C, D, E, G.

Indicație și răspuns. În figurile 10.58 și 10.59 sînt determinate grafic vitezele punctelor solicitate.

Fig. 10.58.

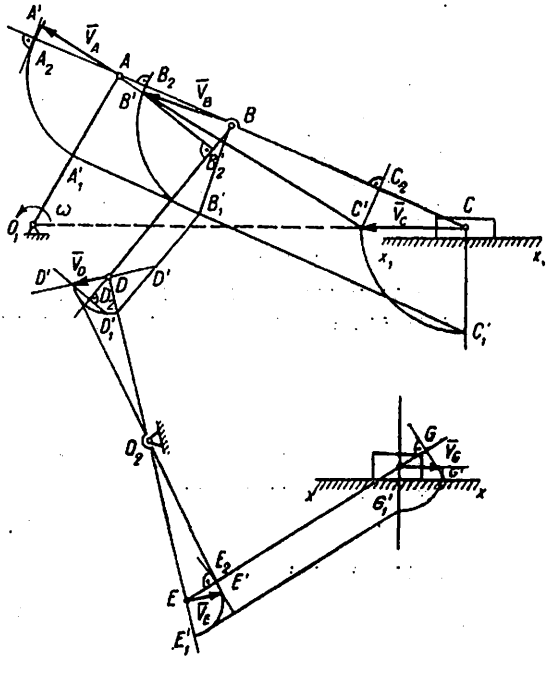
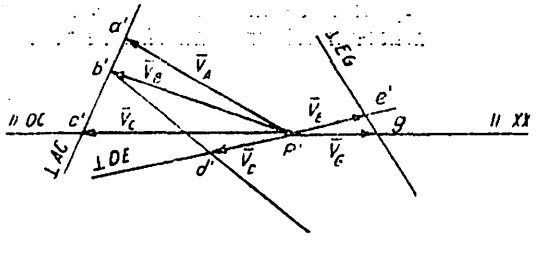


Fig. 10.59.



Capitolul 11

MIŞCAREA RELATIVĂ A RIGIDULUI. COMPUNERI DE MIŞCĂRI.

A. CONSIDERAŢII TEORETICE

1. În mişcarea relativă a rigidului, viteza absolută a unui punct oarecare P, faţă de triedrul fix T_0, este dată de relaţia:

$$\bar{v}_P = \sum_1^n \bar{v}_i + \sum_1^n \bar{\omega}_i \times \bar{r}_i. \tag{a}$$

unde (T_n) este un triedru solidar cu rigidul, $\bar{r}_i$ vectorii de poziţie ai punctului P în raport cu triedrul (T_i), iar $\bar{v}_i$, $\bar{\omega}_i$ parametrii cinematici ai mişcării triedrului (T_i) faţă de triedrul (T_{i+1}).

Există o serie de cazuri particulare de mişcări relative ale rigidului care conduc la *compuneri de translaţii, de rotaţii concurente* sau *de rotaţii paralele.*

Compuneri de translaţii. În asemenea situaţie $\bar{\omega}_i = 0$ şi viteza rezultantă este egală cu suma vectorială a vitezelor mişcărilor componente:

$$\bar{v}_P = \sum_1^n \bar{v}_i. \tag{b}$$

2. *Compuneri de rotaţii concurente.* Deoarece în acest caz $\bar{v}_i = 0$. Pentru $\bar{r}_i = \bar{r}$ $(i = 1, \ldots, n)$ se obţine:

$$\bar{v}_P = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{c}$$

unde s-a notat cu:

$$\bar{\omega} = \Sigma \bar{\omega}_i. \tag{d}$$

Compuneri de rotaţii paralele. Se pot distinge două situaţii, după cum vectorul $\bar{\omega} = \Sigma \bar{\omega}_i$ este diferit de zero sau egal cu zero.

a) În situaţia în care $\omega = \Sigma \omega_i \neq 0$, mişcarea rezultantă are distribuţia de viteze caracteristică unei mişcări de rotaţie dată de relaţia:

$$\bar{v}_P = \bar{\omega} \times \bar{r}_c, \tag{e}$$

unde s-a notat cu:

$$\omega=\Sigma\omega_i \quad \text{şi} \quad \bar{r}_c=\frac{\Sigma\omega_i\bar{r}_i}{\omega}. \tag{f}$$

Axa instantanee de rotaţie trece prin centrul vectorilor paraleli $\bar{\omega}_i$, definit de vectorul $\bar{r}_c$.

b) Dacă $\Sigma\omega_i=0$, mişcarea rezultantă are o distribuţie de viteze caracteristică translaţiei, vitezele oricărui punct Q fiind aceleaşi.

3. **Cazul general de compunere a mişcărilor.** Viteza unui al doilea punct Q, definit prin vectorul $\bar{r}=\overline{PQ}$, calculat cu relaţia (*a*), unde s-a notat $\omega=\Sigma\omega_i$, este dată de relaţia:

$$\bar{v}_Q=\bar{v}_P+\bar{\omega}\times\bar{r}, \tag{g}$$

Există o perfectă analogie între studiul şi proprietăţile mişcării relative a rigidului definită de torsorul vectorilor $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_0$ şi proprietăţile torsorului unui sistem de forţe din statică $\tau_0(\bar{R}, \bar{M}_0)$ Cap. I. Vectorii $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_0$ caracterizează mişcarea rigidului, după cum urmează:

a) $\bar{\omega}=0$; $\bar{v}_P=0$, rigidul se află în repaus;

b) $\bar{\omega}=0$; $\bar{v}_P\neq0$, în mişcarea rezultantă distribuţia de viteze corespunde unei translaţii de viteză $\bar{v}_P$;

c) $\bar{\omega}\neq0$; $\bar{v}_P=0$, distribuţia de viteze corespunde unei rotaţii de viteză unghiulară ω in jurul unei axe care trece prin punctul P;

d) $\bar{\omega}\neq0$; $\bar{v}_P\neq0$, se pot ivi două cazuri, după cum produsul scalar $\bar{\omega}\cdot\bar{v}_P$ este zero sau diferit de zero.

Astfel, cînd $\bar{\omega}\cdot\bar{v}_P=0$, distribuţia de viteze corespunde unei rotaţii cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, suportul axei de rotaţie trecînd prin punctul O, definit faţă de P prin distanţa:

$$PO=\frac{v_0}{\omega}.$$

Dacă $\bar{\omega}\cdot\bar{v}_P\neq0$, distribuţia de viteze în mişcarea rezultantă corespunde unei rototranslaţii. Ecuaţia axei instantanee de rototranslaţie este:

$$\frac{v_{0x}-(y\omega_z-z\omega_y)}{\omega_x}=\frac{v_{0y}-(z\omega_x-x\omega_z)}{\omega_y}=\frac{v_{0z}-(x\omega_y-y\omega_x)}{\omega_z}=\frac{\bar{v}_0\cdot\bar{\omega}}{\omega^2}. \tag{h}$$

4. **Compunerea acceleraţiilor.** În mişcarea relativă a rigidului, acceleraţia $\bar{a}_P$ a unui punct oarecare P, în cazul a n triedre mobile (T_n), este:

$$\bar{a}_P=\sum_{i=0}^{n-1}[\bar{a}_i+\bar{\varepsilon}_i\times\bar{r}_i+\bar{\omega}_i\times(\bar{\omega}_i\times\bar{r}_i)]+2\sum_{i}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\omega}_j\times(\bar{v}_i+\bar{\omega}_i\times\bar{r}_i) \tag{i}$$

unde $\bar{a}_i$, $\bar{\omega}_i$, $\bar{\varepsilon}_i=\dot{\bar{\omega}}_i$ sînt acceleraţiile, viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară ce caracterizează mişcarea triedrului (T_i) faţă de triedrul (T_{i+1}).

Pentru diferite cazuri particulare ale mişcării avem:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_Q, \tag{j}$$

pentru distribuţii de acceleraţii caracteristice translaţiei.

În cazul mişcărilor plane rezultă pentru acceleraţii distribuţii caracteristice unei rotaţii uniforme.

Pentru rotaţii concurente distribuţia de acceleraţii este caracteristică aceleia a unui rigid cu punct fix:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \sum_{i>j} \Sigma \bar{\omega}_j \times \bar{\omega}_i, \tag{k}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

11.1. O combină are o mişcare de înaintare cu viteza $\bar{v}$ şi în acelaşi timp valţul se roteşte în jurul axului cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$. Ştiind că raza valţului este R, să se determine viteza unui punct de pe periferia valţului.

Rezolvare. Mişcarea punctului M (fig. 11.1) de pe periferia secerătorii va fi compusă dintr-o mişcare de translaţie cu viteza $\bar{v}$ egală cu a axului O, şi o mişcare de rotaţie în jurul axului O, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$. Cum translaţia este perpendiculară pe axa de rotaţie, mişcarea punctului M se poate considera ca fiind o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară ω în jurul unui centru O_1, astfel încît:

$$OO_1 = \frac{v}{\omega}.$$

Deci:

$$v_M = O_1M \cdot \omega.$$

Din triunghiul OO_1M, se deduce:

$$v_M = \sqrt{v^2 + R^2\omega^2 - 2vR\omega\cos\alpha}.$$

11.2. O bara orizontală AB este acţionată de o manivelă OC prin intermediul culisei articulate A, care poate aluneca în lungul manivelei OC (fig. 11.2). Cunoscînd distanţa h, să se determine viteza barei AB pentru o poziţie a manivelei definită de unghiul α.

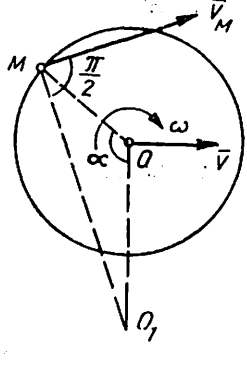


Fig. 11.1.

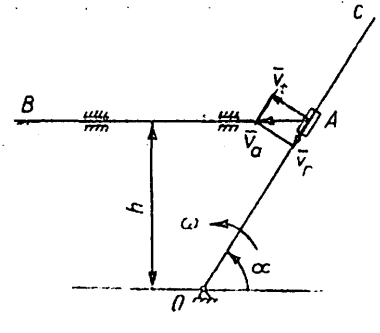


Fig. 11.2.

Rezolvare. Mişcarea barei este o mişcare de translaţie identică cu a punctului A. Mişcarea acestui punct (culisa) poate fi considerată ca o mişcare compusă dintr-o rotaţie, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, şi o mişcare de translaţie în lungul manivelei, cu viteza $\bar{v}$.

Deoarece $v_{rot}=\frac{h}{\sin\alpha}\cdot\omega$ şi $v=v_A\cos\alpha$, rezultă:

$$v_A=\frac{h}{\sin^2\alpha}\omega.$$

11.3. Un corp este supus simultan la o mişcare de rotaţie $\bar{\omega}$, trecînd prin punctul O, şi la o translaţie oarecare $\bar{v}$, trecînd prin punctul A (fig. 11.3). Să se afle mişcarea rezultantă. Discuţie.

Rezolvare. Viteza de translaţie $\bar{v}$ se poate descompune după direcţia vectorului rotaţie $\bar{\omega}$ şi după o direcţie perpendiculară pe ea:

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2.$$

Dacă $\bar{v}_2=0$, rezultanta mişcărilor produse de $\bar{\omega}$ şi $\bar{v}_1$ poate fi înlocuită cu o rotaţie echivalentă $\bar{\omega}$, însă aplicată în punctul B, aflat la distanţa $OB=\frac{v_1}{\omega}$.

Dacă componenta $\bar{v}_2\neq 0$, mişcarea rezultantă poate fi înlocuită cu o mişcare de şurub, aplicată în punctul B.

11.4. Un avion se deplasează cu viteza $\bar{v}$, într-un plan paralel cu planul yOz şi la o înălţime constantă (fig. 11.4). Să se calculeze viteza unghiulară cu care un observator aşezat în punctul O trebuie să rotească o lunetă pentru ca tot timpul avionul să se menţină în cîmpul lunetei. Care este axa în jurul căreia se face această rotire?

Rezolvare. Vitezele unghiulare ale lunetei în jurul axelor sale sînt derivatele coordonatelor polare ale punctului A:

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x};\quad \beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad z,$$

Derivînd relaţiile de mai înainte, în raport cu timpul, cum singura variabilă este y, rezultă:

$$\omega_\alpha=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot v=\frac{v\cos\alpha}{\Delta};$$

$$\omega_\beta=-\frac{zy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}v=$$

$$=\frac{v\cos\alpha\sin\beta}{D},$$

unde s-a notat:

$x^2+y^2+z^2=D^2$ şi $x^2+y^2=\Delta^2$.

Deci luneta va avea două rotiri simultane, una în planul orizontal

Fig. 11.3.

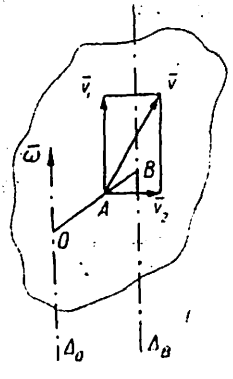
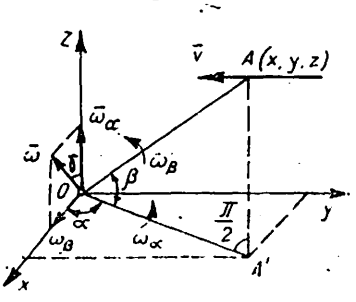


Fig. 11.4.



cu viteza unghiulară ω_α şi una în planul vertical cu viteza unghiulară ω_β, de axe perpendiculare. Viteza unghiulară rezultantă va fi:

$$\omega=\sqrt{\omega\alpha^2+\omega\beta^2}=\sqrt{\frac{1}{\Delta^2}+\frac{h^2}{D^2}}\,v\cos\alpha.$$

Axa în jurul căreia se va face această rotire va fi definită de unghiul γ format cu verticala:

$$\operatorname{tg}\gamma=\sin\beta\cos\beta.$$

11.5. Un paralelipiped dreptunghic, cu laturile *a, b, c,* se roteşte simultan cu vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$, în jurul muchiilor sale, ca în figura 11.5. Să se afle mişcarea rezultantă. *Aplicaţie.* $\omega_1=\omega_2=3\text{s}^{-1}$; $\omega_3=0$; $b=c=a=2$ cm.

Rezolvare. Deoarece sîntem în cazul unor rotaţii neconcurente, avem:

$$\bar{\omega}=\Sigma\bar{\omega}_i=\omega_1\bar{\imath}+\omega_2\bar{\jmath}+\omega_3\bar{k}$$

$$|\bar{\omega}|=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}.$$

Viteza punctului O este:

$$\bar{v}_0=\Sigma\bar{\omega}_i\times\bar{r}_i=\bar{\omega}_1\times\overline{OB}+\bar{\omega}_2\times\overline{OC}+\bar{\omega}_3\times\overline{OA}=-c\omega_2\bar{\imath}-a\omega_3\bar{\jmath}-b\omega_1\bar{k}.$$

Produsul $\bar{\omega}\cdot\bar{v}_0=-(c\omega_1\omega_2+a\omega_2\omega_3+b\omega_1\omega_3)\neq 0$. Distribuţia de viteze corespunde unei rototranslaţii de axă instantanee dată de relaţia (*h*), în care:

$$v_{ox}=-c\omega_2;\quad v_{oy}=-a\omega_3;\quad v_{oz}=-b\omega_1;\quad \omega_x=\omega_1;\quad \omega_y=\omega_2;\quad \omega_z=\omega_3.$$

Viteza de translaţie este:

$$v_t=-\frac{c\omega_1\omega_2+a\omega_2\omega_3+b\omega_1\omega_3}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}}.$$

În cadrul aplicaţiei avem: $\bar{\omega}=3(\bar{\imath}+\bar{\jmath})$; $\omega=3\sqrt{2}\,\text{s}^{-1}$; $\bar{v}_0=-b\omega_1(\bar{\imath}+\bar{k})$; $v_t=-3\sqrt{2}$ cm s^{-1}.

$$\frac{-b+3z}{3}=\frac{-3z}{3}=\frac{-b-3x+3y}{0}.$$

Axa instantanee se află la intersecţia planelor $z=1$ şi $x-y=2$.

Fig. 11.5.

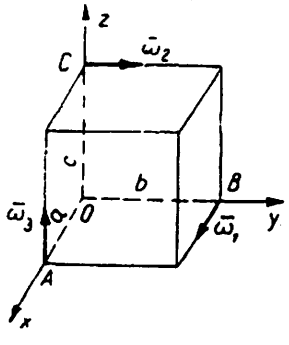
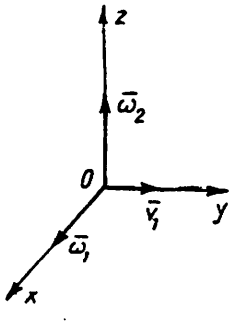


Fig. 11.6.



11.6. Un corp execută două rotaţii în jurul axelor Ox şi Oz, cu vitezele unghiulare $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_3$ (fig. 11.6), şi o mişcare de translaţie în lungul axei Oy, cu viteza $\bar{v}_1$. Să se determine mişcarea.

Rezolvare. Avem:

$$\bar{v}_0=v_1\bar{j};\quad v_x=0;\quad v_y=v_1;\quad v_z=0$$

$$\bar{\omega}=\omega_1\bar{i}+\omega_2\bar{k};\quad \omega_x=\omega_1;\quad \omega_y=0;\quad \omega_z=\omega_2.$$

Deorece $\bar{\omega}\cdot\bar{v}_0=0$, distribuţia de viteze corespunde unei rotaţii cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ trecînd prin 0.

Ecuaţia suportului axei de rotaţie este:

$$\frac{0-(y\omega_2-z\cdot 0)}{\omega_1}=\frac{v_1-(z\omega_1-x\omega_2)}{0}=\frac{0-(x\cdot 0-y\omega_1)}{\omega_2}=0,$$

ce reprezintă o dreaptă aflată în planul xOz, de ecuaţie

$$x\omega_2-z\omega_1=v_1$$

11.7. Pe axul unui motor electric se află un disc care are o viteză unghiulară constantă $\bar{\omega}_1$ (fig. 11.7). Suportul de fixare a carcasei motorului se roteşte cu viteza unghiulară constantă $\bar{\omega}_2$. Pentru o înclinare constantă θ a axului motorului faţă de verticală, să se determine viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară rezultantă a rotorului.

Rezolvare. Notînd cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{i}_1 \bar{j}_1 \bar{k}_1$ versorii axelor mobile Ox, Oy, Oz, şi fixe Ox_1, Oy_1, Oz_1 şi ţinînd seama de relaţia $\bar{k}_1=\bar{k}\sin\theta+\bar{j}\cos\theta$, rezultă:

$$\bar{\omega}=\omega_1\bar{j}+\omega_2\bar{k}_1=(\omega_1+\omega_2\cos\theta)\bar{j}+(\omega_2\sin\theta)\bar{k}.$$

Deorece ω_1, ω_2, θ sînt constante, aplicînd regulile de derivare ale unui vector variabil (derivata locală) avem:

$$\dot{\bar{\omega}}=\bar{\omega}_2\times[(\omega_1+\omega_2\cos\theta)\bar{j}+(\omega_2\sin\theta)\bar{k}].$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

11.8. Datorită propulsiei elicei, un vapor se deplasează într-o direcţie oarecare Δ cu viteza v_1 (fig. 11.8). Curentul apei îl deplasează în sens opus cu viteza v_2, iar vîntul îi imprimă o viteză v_v. Care este viteza v ce o va avea vaporul şi unghiul de drum β, faţă de direcţia Δ ?

Indicaţie şi răspuns. Mişcarea vaporului este o mişcare rezultantă a trei mişcări de translaţie:

$$v=\sqrt{(v_1-v_2)^2+v_v^2+2v_v(v_1-v_2)\cos\alpha};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{v_v\sin\alpha}{v_1-v_2}.$$

Fig. 11.7.

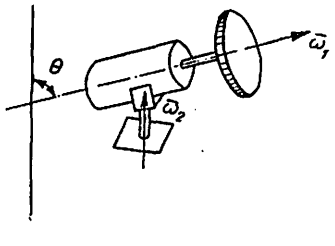
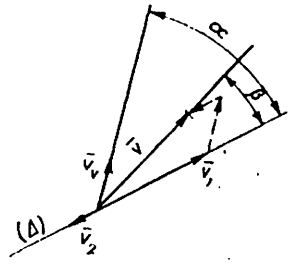


Fig. 11.8.



11.9. Un pod rulant se deplasează pe şine cu o viteză $\bar{v}_1$. Căruciorul macaralei se poate deplasa pe pod cu viteza $\bar{v}_2$ ridicînd în acelaşi timp o sarcină cu viteza $\bar{v}_3$ (fig. 11.9). Să se determine viteza sarcinii.

Indicaţie şi răspuns. Sarcina efectuînd o mişcare compusă din trei mişcări de translaţie după trei direcţii ortogonale viteza absolută este:

$$v = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}.$$

11.10. O pană A, avînd o viteză v, deplasează lateral două corpuri B şi C (fig. 11.10). Să se determine vitezele v_1 şi v_2 ale celor două corpuri, cunoscînd unghiurile α_1 şi α_2.

Indicaţie şi răspuns. La o deplasare y a penei A corespunzînd pentru cele două corpuri deplasate:

$$x_1 = y \operatorname{tg}\alpha_1 \quad \text{şi} \quad x_2 = y \operatorname{tg}\alpha_2,$$

rezultă

$$v_1 = v \operatorname{tg}\alpha_1 \quad \text{şi} \quad v_2 = v \operatorname{tg}\alpha_2.$$

11.11. Să se studieze mişcarea pe care o va avea o suveică la ieşirea din casetă (fig. 11.11).

Răspuns. $\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y$; $a = a_x = a_y = g$

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{g x^2}{2 v_0^2}.$$

11.12. Un disc circular greu, aflat într-un plan vertical, cade în planul său sub acţiunea gravitaţiei şi în acelaşi timp se învîrteşte în jurul centrului său, cu viteza uniformă ω (fig. 11.12). Să se studieze mişcarea unui punct M

Fig. 11.9.

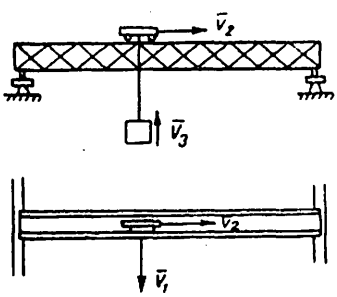


Fig. 11.10.

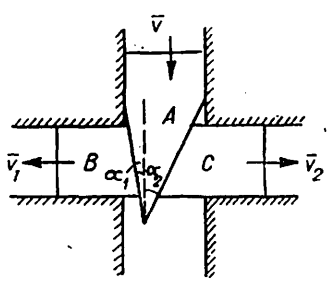


Fig. 11.11.

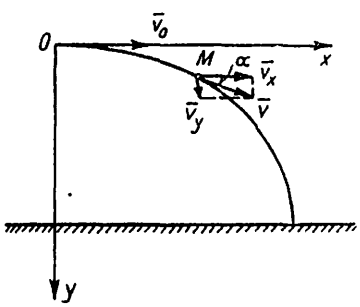
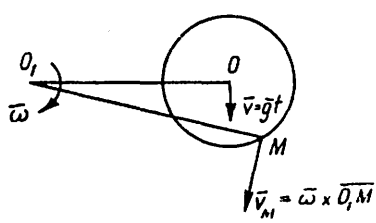


Fig. 11.12.



de pe marginea discului, determinînd viteza şi acceleraţia absolută a punctului.

Indicaţie şi răspuns. Translaţia $\bar{v}=\bar{g}t$ perpendiculară pe vectorul rotaţie $\bar{\omega}$, deplasează axa de rotaţie paralelă cu ea însăşi la distanţa:

$$OO_1=\frac{v}{\omega}.$$

Mişcarea poate fi înlocuită cu o rotaţie în jurul lui O_1 cu aceeaşi viteză unghiulară ω. Viteza unui punct oarecare M este:

$$v_M=\omega\cdot O_1M,$$

punctul O_1 coincizînd cu centrul instantaneu de rotaţie.

11.13. Un disc de rază r se poate roti cu viteza unghiulară ω_2, în jurul unei tije O_1O_2, care, la rîndul ei, se roteşte cu viteza unghiulară ω_1 în jurul pivotului O_1 (fig. 11.13). Discul fiind înclinat faţă de verticală cu un unghi α, iar raza cercului descris pe planul orizontal de marginea B a discului fiind R, să se determine viteza unghiulară rezultantă a discului.

Răspuns. $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2$; $v_B=R\omega_1=r\omega_2$; $r=R\sin\alpha$; $\omega_1=\omega_2\sin\alpha$;
$\omega=\omega_1\operatorname{ctg}\alpha$.

11.14. Manivela OO_1, de lungime l, se roteşte într-un plan, în jurul articulaţiei O (fig. 11.14), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$. Simultan se roteşte, în acelaşi plan, un disc de rază r, cu viteza unghiulară $\omega_2=k\omega_1$. Să se determine vitezele punctelor A, B, E, D ale discului. Discuţie după valorile lui k şi sensul de rotire.

Indicaţie şi răspuns. Existînd numai rotaţii avem $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2=(1+k)\bar{\omega}_1$. Centrul vectorilor paraleli este definit de:

$$\bar{r}_c=\overline{O_1C}=\frac{\overline{OO_1}\omega_2}{\omega_1+\omega_2}$$

$$|\bar{r}_c|=\frac{k}{1+k}l;\quad OC=\frac{k}{1+k}l;$$

$$CP=\sqrt{r_c^2+OP^2+2r_cOP\cdot\cos\theta};\quad \bar{v}_P=\bar{\omega}\times\overline{CP}.$$

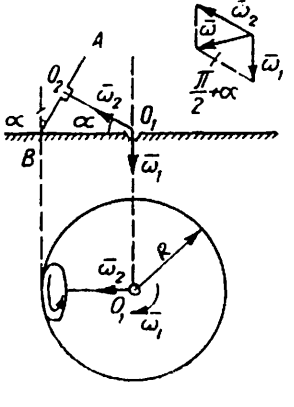


Fig. 11.13.

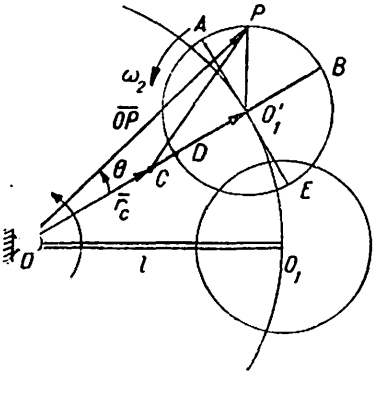


Fig. 11.14.

Pentru punctul A rezultă:

$$v_A=\omega\cdot CA=\omega_1\sqrt{l^2+r^2(1+k)^2}$$

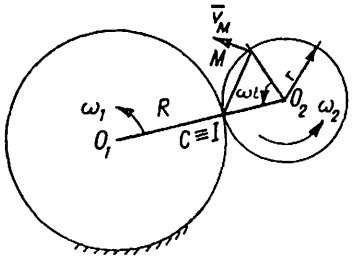
$$v_B=\omega\cdot CB=\omega_1[l+(1+k)r].$$

11.15. Un diferențial se compune dintr-o roată mare cu raza R, presupusă fixă, și o roată planetară cu raza r, care se rostogolește pe roata mare (fig. 11.15). Ea este susținută de pîrghia O_1O_2, care se rotește în jurul axei O_1 cu viteza unghiulară ω_1. Să se determine viteza unui punct de pe roata planetară.

Indicație și răspuns. Avem două rotații paralele de același sens. Viteza unghiulară rezultantă este:

$$\omega=\omega_1+\omega_2,$$

Fig. 11.15.

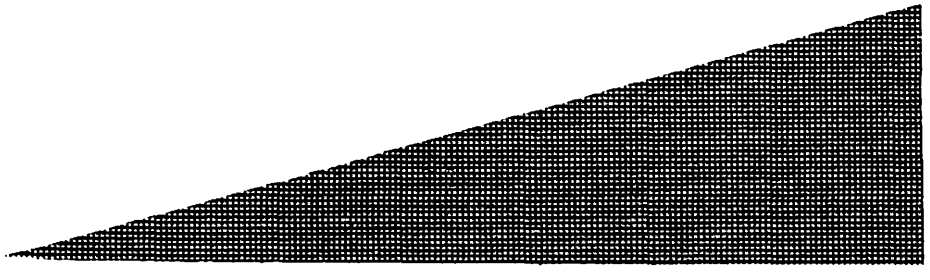


aplicată în punctul de contact C a celor două roți, care este și centrul instantaneu de rotație:

$$v_M=\sqrt{2}r(\omega_1+\omega_2)\sqrt{1-\cos\omega t}.$$

11.16. Un corp efectuează simultan trei mișcări de rotație, cu vitezele unghiulare ω_1, $a\omega_1$, $b\omega_1$, dirijate după trei axe perpendiculare concurente. Se cere mișcarea rezultantă.

Răspuns. $\bar{\omega}=\omega_1(\bar{i}+a\bar{j}+b\bar{k})$.



PARTEA A TREIA

DINAMICA

Capitolul **12**

PRINCIPIILE MECANICII. UNITĂȚI DE MĂSURĂ. OMOGENITATE. NOȚIUNI FUNDAMENTALE ALE DINAMICII

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Postulatele mecanicii** au fost enunțate de Newton și sînt în număr de trei: *principiul inerției, principiul acțiunii forței, principiul acțiunii și reacțiunii*, la care se mai adaugă și *principiul paralelogramului*.

2. **Principiul inerției.** Orice corp*) își menține starea de repaus relativ sau de mișcare uniformă și rectilinie, atît timp cît forțe aplicate asupra lui nu îi schimbă această stare.

3. **Principiul acțiunii forței.** Dacă unui corp aflat în repaus sau care are o mișcare rectilinie și uniformă i se aplică forțe succesive $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$, corpul căpătînd astfel accelerațiile $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$, experiența arată că aceste accelerații sînt proporționale cu forțele:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \ldots = \frac{F_n}{a_n} = \frac{G}{g} = m, \qquad (a)$$

iar raportul lor se numește *masa corpului*.

Rezultă două concluzii importante:

— masa unui corp este raportul dintre greutatea lui G și accelerația gravitațională g;

$$m = \frac{G}{g}; \qquad (b)$$

— forța este egală cu masa corpului înmulțită cu accelerația pe care o imprimă acestuia:

$$\bar{F} = m\bar{a}. \qquad (c)$$

4. **Principiul acțiunii și reacțiunii.** Dacă un corp A acționează asupra unui corp B cu o forță oarecare $\bar{F}$, atunci și corpul B acționează asupra corpului A, cu o forță egală și de sens contrar.

*) Newton înțelege prin *corp*, punctul material.

5. **Principiul paralelogramului.** Principiul paralelogramului fixează caracterul esenţial de vector pe care-l are forţa.

Din ecuaţiile :

$$\bar{F}_1 = m\bar{a}_1 ; \quad \bar{F}_2 = m\bar{a}_2 ;$$

rezultă :

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

în care :

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \quad \text{şi} \quad \bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2. \tag{d}$$

6. **Formule dimensionale.** În mecanică sînt necesare trei mărimi fundamentale cu ajutorul cărora se pot exprima celelalte mărimi. În raport cu mărimile fundamentale alese, unităţile de măsură ale mărimilor mecanice se împart în :

a) unităţi mecanice ale sistemelor generale MKS (metru, kilogram, secundă) — sistemul internaţional (SI) — şi CGS (centimetru, gram, secundă) ;

b) unităţi ale sistemului restrîns mecanic MKfS (metru, kilogram-forţă, secundă) şi *unităţi cu denumiri speciale*, temporar tolerate în mecanică.

Unitatea de măsură [X] a oricărei mărimi fizice X poate fi exprimată în funcţie de unităţile fundamentale de lungime (L), masă (M) şi timp (T) printr-o formulă dimensională de forma :

$$[X] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}, \tag{e}$$

unde α, β şi γ sînt numere raţionale, pozitive sau negative. Legile fizice sînt invariante faţă de orice schimbare a unităţilor de măsură (principiul invarianţei legilor fizice).

Tabela 18.1 cuprinde unităţile de măsură ale mărimilor mecanice în sistemul internaţional (SI), CGS şi MKfS, utile în aplicaţii.

7. **Omogenitate** Ambii membri ai formulei matematice care exprimă o lege fizică trebuie să aibă grade de omogenitate egale în raport cu fiecare din unităţile fundamentale.

Verificarea omogenităţii unei formule se face înlocuind diferitele mărimi mecanice cu dimensiunea respectivă, scrisă în paranteze drepte.

Respectarea strictă a dimensiunilor tuturor mărimilor la rezolvarea problemelor practice este o condiţie absolut necesară pentru obţinerea unor rezultate corecte. În acelaşi timp este un criteriu de control şi verificare a relaţiilor.

Orice ecuaţie sau formulă trebuie să fie omogenă în raport cu mărimile fundamentale. *Lipsa de omogenitate într-o formulă este o indicaţie sigură că ecuaţia sau formula este greşită, dar o formulă omogenă nu arată că formula este justă.*

Cu ajutorul omogenităţii :

— se poate deduce dimensiunea unei mărimi dintr-o ecuaţie, cînd se cunosc dimensiunile tuturor celorlalte mărimi :

— se pot prevedea relaţii fizice între mărimi despre care se ştie dinainte că figurează în anumite relaţii.

Tabela 12.1

Simboluri și unități de măsură

Denumirea și simbolul mărimii	Dimensiuni	Ecuația de definiție	Unitatea de măsură în sistemul internațional (SI)		Unitatea și simbolul în sistemul CGS. Relații de transformare	Unitățile sistemului mecanic MKfS (tehnic)			
			Denumire	Simbol		Dimensiuni	Unitatea de măsură: Denumire și definiție	Simbol	Relații de transformare
Lungime l	L	—	Metru (STAS 737-62)	m	Centimetru, cm 1 m = 100 cm	—	—	—	—
Timp t	T	—	Secundă (STAS 737-62)	s	Secundă, s	—	—	—	—
Viteză v	LT^{-1}	$v=\frac{l}{t}$	Metru pe secundă	m/s	Contimetru pe secundă, cm/s 1 m/s = 100 cm/s	—	—	—	—
Accelerație a	LT^{-2}	$a=\frac{v}{t}$	Metru pe secundă la pătrat	m/s^2	Centimetru pe secundă la pătrat cm/s^2	—	—	—	—
Viteză unghiulară ω	T^{-1}	$\omega=\frac{\alpha}{t}$	Radian pe secundă	1/s	Radian pe secundă, 1/s	—	—	—	—
Accelerație unghiulară ε	T^{-2}	$\varepsilon=\frac{\omega}{t}$	Radian pe secundă la pătrat	$1/s^2$	Radian pe secundă la pătrat $1/s^2$	—	—	—	—
Masă m, M	M	—	Kilogram (STAS 737-62)	kg	Gram, g 1 kg = 1 000 g	$L^{-1}FT^2$	Kilogram forță-secundă la pătrat pe metru	$\frac{kgf \cdot s^2}{m}$	1 $kgf \cdot s^2/m$ = 9,806 65 kg = 9,806 65 · 10^3 g
Forță F, f	LMT^{-2}	$F=ma$	Newton	N	Dynă, dyn 1 N = 10^5 dyn	F	Kilogram-forță	kgf	1 kgf = 9,806 65 N = 9,806 65 · 10^5 dyn
Masă volumică (densitate) ρ	$L^{-3}M$	$\rho=\frac{m}{v}$	Kilogram pe metru cub	kg/m^3	Gram pe centimetru cub, g/cm^3	—	—	—	—
Presiune p	$L^{-1}MT^{-2}$	$p=\frac{F}{A}$	Newton pe metru pătrat	N/m^2	Dynă pe centimetru pătrat dyn/cm^2	$L^{-2}F$	Kilogram-forță pe metru pătrat	kgf/m^2	Practic, 1 kgf/cm^2 este atmosfera tehnică

Tabela 12.1 (continuare)

Denumirea și simbolul mărimii	Dimensiuni	Ecuația de definiție	Unitatea de măsură în sistemul internațional (SI)		Unitatea și simbolul în sistemul CGS. Relații de transformare	Unitățile sistemului mecanic MKfS (tehnic)			
						Dimensiuni	Unitatea de măsură		Relații de transformare
			Denumire	Simbol			Denumire și definiție	Simbol	
Energie (lucru mecanic) W	L^2MT^{-2}	$W=Fl$	Joule	J	Erg, erg 1 J = 10^7 erg	LF	Kilogram-metru	kgm	1 kgm = 9,806 65 J
Putere P	L^2MT^{-3}	$P=\frac{W}{t}$	Watt	W	Erg pe secundă, erg/s 1 W = 10^7 erg/s	LFT^{-1}	Kilogram-metru pe secundă	kgm/s	1 kgm/s = 9,806 65 W
Momentul unei forțe (cuplu) M	L^2MT^{-2}	$M=F\cdot l$	Newton-metru	N·m	Dină-centimetru, dyn·cm 1 Nm = 10^7 dyn·cm	LF	Kilogram-metru	—	1 kgm = 9,806 65 N·m
Moment de inerție J	L^2M	$J=ml^2$	Kilogram-metru pătrat	$kg\cdot m^2$	Gram-centimetru pătrat, $g\text{-}cm^2$ 1 kg m^2 = 10^7 g cm^2	—	—	—	—
Impuls (cantitate de mișcare) H	LMT^{-1}	$H=m\upsilon$	Newton-secundă	N·s	Dynă-secundă, dyn·s 1 Ns = 10^5 dyn·s	—	—	—	—
Moment cinetic K	L^2MT^{-1}	$K=l\cdot m\upsilon$	Newton-secundă-metru	N·s·m	Dynă-secundă-cm dyn·s·cm 1 Nsm = 10^7 dyn·s·cm	—	—	—	—
Percuție P	LMT^{-1}	$P=Ft$	Newton-secundă	N·s	Dynă-secundă, dyn·s 1 Ns = 10^5 dyn·s	FT	Kilogram-forță-secundă	kgf·s	1 kgf·s = 9,806 65 N·s
Viscozitate dinamică η	$L^{-1}MT^{-1}$	$F=\eta A\frac{V}{l}$	Decapoise	da P	Poise, P 1 daP = 10 P	—	—	—	—
Viscozitate cinematică ν	$L^{-2}T^{-1}$	$\nu=\frac{\eta}{\rho}$	Decakilostokes	dakSt	Stokes, St 1 dak St = 10^4 St	—	—	—	—
Greutate volumică γ	—	$\gamma=\frac{G}{V}$	—	—	—	$L^{-3}F$	Kilogram-forță-pe metru cub	kgf/m^3	1 kgf/m^3 = 0,980 665 dyn/cm^3

8. **Lucrul mecanic** elementar al forței variabile $\bar{F}=X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k}$, a cărui punct de aplicație definit de vectorul $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$, se deplasează pe curba (C) figura 12.1, este definit de produsul scalar

$$dL=\bar{F}\cdot d\bar{r}=F\cdot dr\cdot\cos\alpha=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=\bar{F}\cdot\bar{v}\cdot dt. \qquad (f)$$

Dacă: $\alpha=0$, lucrul mecanic este produsul dintre forță și deplasare;

$\alpha<\frac{\pi}{2}$, lucrul mecanic este pozitiv (motor);

$\alpha>\frac{\pi}{2}$, lucrul mecanic este negativ (rezistent);

$\alpha=\frac{\pi}{2}$, forța este perpendiculară pe direcția deplasării și lucrul mecanic este nul.

Lucrul mecanic total se exprimă printr-o integrală curbilinie:

$$L_{AB}=\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}=\int_C X\,dx+Y\,dy+Z\,dz. \qquad (g)$$

În cazul particular al unei funcții de forță U, datorită condițiilor de existență Cauchy, avem:

$$dL=\bar{F}\cdot d\bar{r}=\text{grad}\,U\cdot d\bar{r}=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=dU, \qquad (h)$$

și

$$L_{A-B}=\int_{A-B}\bar{F}\cdot d\bar{r}=U_B(x_B,\,y_B,\,z_B)-U_A(x_A,\,y_A,\,z_A)=U_B-U_A. \qquad (i)$$

Ca urmare, lucrul mecanic al unei forțe conservative nu depinde de traiectoria parcursă, ci numai de poziția inițială și finală a punctului.

Reprezentarea grafică a lucrului mecanic este arătată în figura 12.2, unde în abscisă se reprezintă proiecția deplasării pe direcția forței, iar în ordonată forța. Lucrul mecanic este aria haşurată a diagramei $s_1 s_1' s_2 s_2'$:

$$L=\int_{s_1}^{s_2} F\cdot ds. \qquad (j)$$

9. **Lucrul mecanic al unui cuplu de moment** M, care se rotește cu un unghi elementar $d\bar{\theta}$, măsurat în radiani, este $dL=\bar{M}\cdot d\bar{\theta}$, iar pentru o rotire finită între poziția inițială (1) și cea finală (2), este $L_{1-2}=\int_1^2 M d\theta = M(\theta_2-\theta_1)$.

Există deasemenea relația $dL=M_x\cdot d\theta_x+M_y\cdot d\theta_y+M_z\cdot d\theta_z$, în care $d\theta_x$, $d\theta_y$, $d\theta_z$ sînt componentele rotației $d\bar{\theta}$ față de axele de coordonate.

10. **Puterea unei forțe** F în intervalul de timp (t_2-t_1) este

Fig. 12.1.

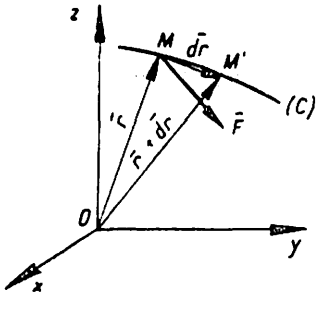
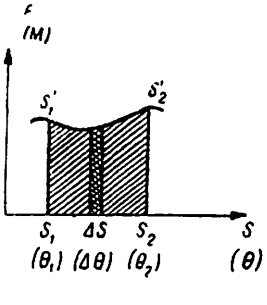


Fig. 12.2.



raportul $P_m = \frac{L}{t_2 - t_1}$, dintre lucrul mecanic al forței în acel interval de timp și timpul corespunzător.

Cînd forța sau momentul sînt variabile, puterea este:

$$P = \frac{dL}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v} = \overline{M} \cdot \overline{\omega}. \qquad (k)$$

11. **Randamentul** unei mașini este raportul η dintre puterea utilă produsă de aceasta și puterea motoare consumată de mașină:

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} \leqslant 1 \qquad (l)$$

sau raportul dintre lucru mecanic util L_u și lucrul mecanic motor L_m.

Dacă lucrul mecanic util este produs de mai multe dispozitive mecanice care au randamente diferite, atunci între lucrul mecanic util final și lucrul mecanic motor inițial există relația:

$$L_u = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdots \eta_{(n-1)} \cdot L_m. \qquad (m)$$

12. **Impulsul** $\overline{H}$ a unui punct material de masă m, care se mișcă cu viteza $\overline{v}$, este (fig. 12.3) un vector coliniar cu vectorul viteză dat de relația (p):

$$\overline{H} = m\overline{v}. \qquad (p)$$

13. **Momentul cinetic** al punctului material M de masă m, de viteză $\overline{v}$ în raport cu un punct *fix* O, este momentul impulsului punctului M:

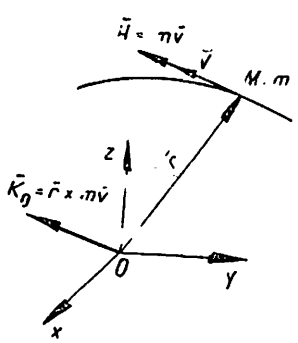
$$\overline{K}_0 = \overline{r} \times \overline{H} = \overline{r} \times m\overline{v}, \qquad (q)$$

un vector perpendicular pe planul format de vectorul impuls și punctul O.

14. **Energia cinetică** E_c a punctului material m care posedă viteza $\overline{v}$ este o mărime de stare, scalară, pozitivă, de expresie

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2. \qquad (r)$$

Fig. 12.3.



15. **Energia potențială** E_p, se pune în evidență în cazul forțelor conservative ce acționează asupra punctului material și diferă de funcția potențială U printr-o constantă:

$$E_p = -U + C \qquad (s)$$

16. **Energia mecanică** este suma energiei cinetice și potențiale din momentul respectiv. Pentru un sistem conservativ energia mecanică rămîne constantă în timpul mișcării.

B. PROBLEME REZOLVATE

12.1. Să se calculeze greutatea unui corp care, avînd o viteză inițială v_0, parcurge sub acțiunea unei forțe constante F, un spațiu s, în timpul t.

Aplicație. $v_0=10$ m/s; $F=200$ N; $s=200$ m; $t=5$s.

Rezolvare. Conform principiului acțiunii forței:

$$F=ma=\frac{G}{g}a, \tag{1}$$

în care accelerația a se obține din legea mișcării corpului, care este o mișcare uniform accelerată, deoarece corpul este acționat de o forță constantă:

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2;\quad a=\frac{2}{t^2}(s-v_0t). \tag{2}$$

Înlocuind valoarea accelerației a în ecuația (1), se obține:

$$G=F\frac{g}{a}=F\frac{gt^2}{2(s-v_0t)}=163{,}5\text{ N}.$$

12.2. În cît timp o forță de 200 N, acționînd asupra unui corp de greutate 300 N, îi va mări de cinci ori viteza sa inițială de 10 m/s?

Rezolvare. Conform principiului acțiunii forței:

$$F=ma, \tag{1}$$

însă:

$$a=\frac{v_1-v_0}{t}=\frac{nv_0-v_0}{t}=\frac{v_0\cdot(n-1)}{t}.$$

Introducînd în relația (1), se obține:

$$F=\frac{G}{g}\frac{v_0(n-1)}{t},\text{ de unde }t=\frac{G}{F}\frac{v_0(n-1)}{g}=6{,}12\text{ s}.$$

12.3. Cu ajutorul unei macarale se ridică pe verticală o mașină în greutate de $G=10$ kN în $t=10$ s, la o înălțime $h=12$ m. Care este forța, presupusă constantă, aplicată sarcinii?

Rezolvare. Notînd cu F forța care se aplică mașinii pentru a ridica sarcina G, forța motoare care produce mișcarea este $F-G$ și aplicînd principiul acțiunii forței, se obține:

$$F-G=\frac{G}{g}a. \tag{1}$$

Mișcarea fiind uniform accelerată, accelerația este:

$$a=\frac{2h}{t^2}, \tag{2}$$

iar din (1), se obține:

$$F=G\left(1+\frac{2h}{gt^2}\right)=10{,}240\,\text{N}.$$

12.4. Pentru determinarea coeficientului de frecare de alunecare μ în timpul mișcării, se folosește dispozitivul din figura 12.4. punîndu-se pe platan greutăți P din ce în ce mai mari, pînă cînd corpurile se pun în mișcare. Să se determine accelerația a cu care se mișcă sarcina P, și coeficientul de frecare μ al corpului Q pe planul orizontal, cunoscînd timpul t în care greutatea P parcurge distanța h.

Rezolvare. Masa care se mișcă este $\frac{P+Q}{g}$, iar mișcarea este produsă de greutatea P, căreia i se opune forța de frecare μQ.

Conform principiului fundamental al mecanicii, rezultă:

$$P-\mu Q=\frac{P+Q}{g}a,$$

de unde:

$$a=\frac{P-\mu Q}{P+Q}g. \tag{1}$$

Mișcarea fiind uniform accelerată, rezultă că:

$$a=\frac{2h}{t^2}. \tag{2}$$

Această valoare, introdusă în (1), permite calcularea coeficientului de frecare μ în mișcare:

$$\mu=\frac{P}{Q}-\left(\frac{P}{Q}+1\right)\frac{2h}{gt^2}.$$

12.5. Să se afle în sistemul general MKS, CGS și MKfS dimensiunile coeficientului k, din legea atracției universale:

$$F=k\frac{m_1m_2}{d^2},$$

în care m_1 și m_2 sînt masele corpurilor aflate la distanța d.

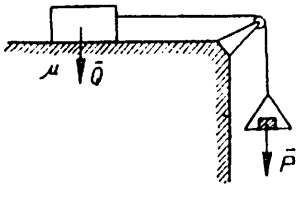
Rezolvare. În sistemul general MKS și CGS:

$$[k]=\left[\frac{\mathrm{d}^2F}{m_1m_2}\right]=\left[\frac{L^2\cdot LMT^{-2}}{M^2}\right]=\mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2}.$$

În sistemul mecanic MKfS:

$$[k]=\left[\frac{\mathrm{d}^2F}{m_1m_2}\right]=\left[\frac{L^2F}{(L^{-1}FT^2)^2}\right]=\mathrm{L}^4\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}^{-4}.$$

Fig. 12.4.



12.6. Experimental se constată că perioada t a unei oscilații mici pentru un pendul simplu depinde de lungimea l a pendulului și de accelerația gravitațională g. Să se determine prin considerente de omogenitate formula perioadei.

Rezolvare. Pe baza principiului invarianței legilor fizice, putem scrie:

$$t=kl^{\alpha}\cdot g^{\beta}, \tag{1}$$

unde k este o constantă. Dacă în locul mărimilor introducem unitățile lor prin formulele dimensionale respective: $[l]=\mathrm{T}$; $[k]=1$; $[l]=\mathrm{L}$; $[g]=\mathrm{LT}^{-2}$, obținem:

$$T=\mathrm{L}^{\alpha+\beta}\mathrm{T}^{-2\beta}. \tag{2}$$

Întrucît formula dimensională completă a perioadei T este $\mathrm{L}^{0}\mathrm{M}^{0}\mathrm{T}^{1}$, din condiția de omogenitate aplicată relației (2), se obține:

$$\alpha+\beta=0\,;\ -2\beta=1,\ \text{de unde}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\quad\text{și}\quad\beta=-\frac{1}{2}.$$

Introducînd aceste rezultate în relația (1) obținem relația căutată:

$$t=k\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Prin alte procedee se deduce $k=2\pi$.

12.7. Purificarea unui lichid impur se face cu ajutorul unei mașini centrifuge. Timpul de trecere t a unei picături de apă printr-un strat cilindric de ulei, este dat de formula;

$$t=\frac{4{,}5\eta g}{a^{2}\Omega^{2}(\gamma-\gamma_1)}\ln\frac{r_1}{r_0},$$

în care Ω este o viteză unghiulară, a este raza picăturii de apă, γ și γ_1 sînt greutățile unităților de volum ale apei și uleiului iar η este coeficientul de viscozitate dinamică. Să se verifice omogenitatea formulei.

Rezolvare. În S.I., există următoarele dimensiuni:

$$[\eta]=\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{MT}^{-1};\ [a]=\mathrm{L}$$

$$[g]=\mathrm{LT}^{-2};\ [\gamma]=\mathrm{L}^{-2}\mathrm{MT}^{-2},\ [\Omega]=\mathrm{T}^{-1}.$$

Cu elementele de mai sus se poate scrie succesiv:

$$[t]=\left[\frac{4{,}5\,\eta g}{a^{2}\Omega^{2}(\gamma-\gamma_1)}\ln\frac{r_1}{r_0}\right]=\frac{\mathrm{L}^{-1}\mathrm{MT}^{-1}\cdot\mathrm{LT}^{-2}}{\mathrm{L}^{2}\cdot\mathrm{T}^{-2}\cdot\mathrm{L}^{-2}\mathrm{MT}^{-2}}=T.$$

12.8. Un zidar construiește un perete de cărămidă, de lungime a înălțime b și lățime c. Cunoscînd greutatea specifică γ a cărămizii, să se determine lucrul mecanic efectuat.

Aplicație. $a=6$ m; $b=4$ m; $c=0{,}24$ m; $\gamma=260\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^{3}}$.

Rezolvare. Greutatea unei porțiuni elementare, cuprinse între două plane paralele cu baza, distanțate cu dz, este:

$$dG = A \cdot \gamma \cdot dz,$$

unde A reprezintă aria bazei.

Lucrul mecanic necesar construirii zidului este

$$L = \int_0^h dG \cdot z, \quad L = 10{,}52 \text{ Nm}.$$

Deoarece $dG \cdot z$ este momentul static al secțiunii elementare, pe baza teoremei momentelor statice rezultă că:

$$L = G\zeta, \quad \zeta = \frac{b}{2}.$$

12.9. Un rulou de la fereastră, având greutatea G și lungimea l, se înfășoară pe un sul subțire, în partea de sus a ferestrei. Ce lucru mecanic se efectuează pentru aceasta?

Aplicație. $G = 40$ N; $l = 2$ m.

Rezolvare. Luînd un element din rulou de înălțime dz, la distanța z de sulul de înfășurare, greutatea lui va fi:

$$dG = A dz \cdot \gamma,$$

în care A este secțiunea ruloului, iar γ densitatea lui.

Lucrul mecanic total va fi în acest caz:

$$L = \int_0^h dG \cdot z = A\gamma \int_0^h z\, dz = A\gamma \frac{h^2}{2}.$$

Cum însă $Ah\gamma = G$, rezultă:

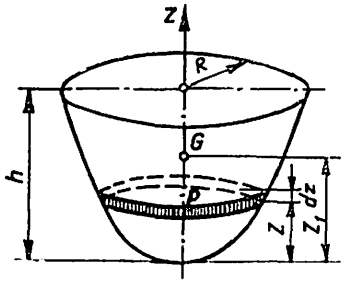
$$L = G\frac{h}{2} = 40 \text{ J}.$$

12.10. Un rezervor în formă de paraboloid conține apă pînă la un nivel h. Diametrul suprafeței apei este d (fig. 12.5). Să se determine lucrul mecanic necesar pentru golirea rezervorului, cu ajutorul unei pompe așezată la distanța l sub fundul rezervorului.

Aplicație: $h = 5$ m; $d = 16$ m; $l = 3$ m.

Rezolvare. Luînd un strat de apă la distanța $l+h-z$ de pompă, greutatea lui va fi: $\gamma\pi\rho^2 dz$. Avînd în vedere forma de paraboloid a rezervorului, se poate scrie:

Fig. 12.5.



$$\frac{\rho^2}{R^2} = \frac{z}{h}.$$

Lucrul mecanic necesar va fi:

$$L = \int_0^h \gamma\pi z \frac{R^2}{h} dz\,(l+h-z) = \gamma\pi \frac{R^2}{h} \int_0^h z\,(l+h-z)\, dz$$

de unde:

$$L=\gamma\pi R^2h\cdot\frac{3l+h}{6}=2{,}341\cdot10^4\,\text{J}.$$

Observație. La același rezultat se poate ajunge utilizînd relația:

$$L=G\,(z_1-z_2),$$

în care: $G=\gamma\frac{\pi}{2}R^2h$ (greutatea volumului de apă);

$z_2=\frac{2}{3}h$ (abscisa centrului de greutate),

$z_1=h+3=8$ m.

12.11. Să se exprime lucrul mecanic al unei forțe de greutate mg (fig. 12.6) și al unei forțe elastice $F=-kx$ (fig. 12.7).

Rezolvare. a) Deoarece forța de greutate derivă din funcția de forțe $U=mgz+C$, lucrul mecanic nedepinzînd de traiectoria parcursă este egal cu greutatea înmulțită cu diferența de nivel

$$L_{AB}=mg\,(z_B-z_A).$$

Cînd greutatea urcă, semnul lucrului mecanic este negativ.

b) Analog, $U=\frac{1}{2}kr^2+c$ și $L_{AB}=-\frac{1}{2}k\,(x_B^2-x_A^2)$.

Pentru corpurile elastice care lucrează la răsucire rezultă:

$$L_{1-2}=\frac{1}{2}k_r\,(\varphi_1^2-\varphi_2^2)$$

în care k_r este constanta corpului elastic, iar φ_1 și φ_2 unghiul inițial și final.

12.12. Să se determine lucrul mecanic necesar ridicării unei greutăți G din fundul unui puț de adîncime h, știind că greutatea specifică a cablului este γ (fig. 12.8).

Indicație și răspuns. Lucrul mecanic produs este datorit pe de o parte sarcinii G constante și pe de altă parte greutății variabile a cablului.

După parcurgerea unui drum x de la pornire, greutatea cablului în această poziție este $p(h-x)$, deci:

$$dL=[G+p\,(h-x)]\,dx,$$

și

$$L=-\int_0^h[G+p\,(h-x)]dx=-\left(Gh+\frac{ph^2}{2}\right).$$

Fig. 12.8.

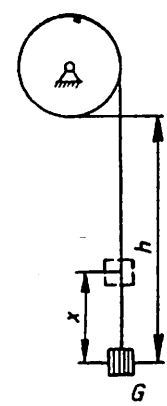


Fig. 12.6.

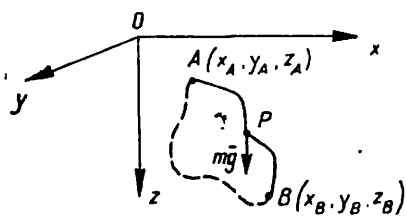
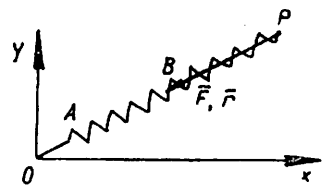


Fig. 12.7.



12.13. Ascensorul unei fabrici poate transporta o sarcină maximă de 8 000 N. Contragreutatea ascensorului este de 3000 N. Știind că viteza de regim a ascensorului este de 0,8 m/s, stabilită la 2 s după pornire, să se determine puterea electromotorului care acționează ascensorul (randamentul =0,8).

Să se traseze diagrama puterii utile a electromotorului în funcție de timp, de la pornire pînă la oprire.

Rezolvare.

a) La pornire ascensorul are o mișcare uniform accelerată.

Separînd corpurile (fig. 12.9, *a*), se poate scrie:

$$T_1=G_1+F_{i_1}=G_1+\frac{G_1}{g}a; \tag{1}$$

$$T_2=G_2-F_{i_2}=G_2-\frac{G_2}{g}a. \tag{2}$$

Trecînd la electromotor:

$$T_1R-C-T_2R=0, \tag{3}$$

de unde: $C=(T_1-T_2)\,R=(G_1-G_2)R+(G_1+G_2)\frac{a}{g}R$.

Puterea electromotorului este:

$$P=C\cdot\omega=C\cdot\varepsilon\cdot t=C\frac{a}{R}t=(G_1-G_2)\,at+(G_1+G_2)\frac{a^2t}{g}\cdot \tag{4}$$

Introducînd datele problemei și deoarece $a=0{,}4$ m/s², rezultă $P=2\,176\,t$.

Deci, puterea electromotorului în această perioadă variază liniar în funcție de timp.

— La sfîrșitul perioadei de accelerare, pentru $t=2$ s, puterea utilă este $P_u=4{,}352$ kW, iar puterea inițială este:

$$P_i=\frac{P}{\eta}=5{,}44\text{ kW}.$$

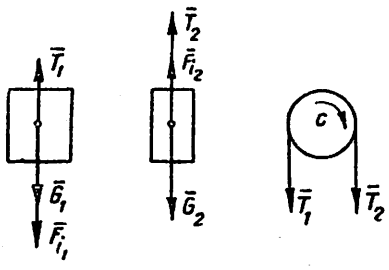
— În timpul mersului de regim, deoarece $a=0$, rezultă:

$$T_1=G_1;\quad T_2=G_2,$$

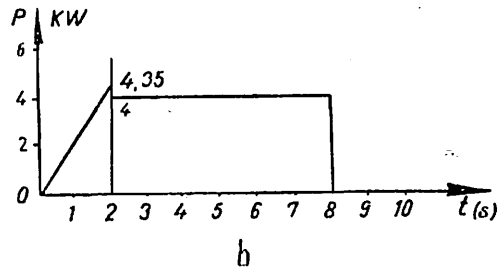
astfel încît:

$$C=(T_1-T_2)\,R=(G_1-G_2)\,R,$$

Fig. 12.9.



a



b

iar puterea:

$$P=C\cdot\omega=C\frac{v}{R}=(G_1-G_2)\,v=4\text{ kW},$$

— La oprirea ascensorului $P=0$.

b) Diagrama de variație a puterii utile a electromotorului în funcție de timp este arătată în figura 12.9, *b*.

12.14. Să se determine înclinarea optimă și randamentul maxim al unui șurub cu filet dreptunghiular în cazul unui coeficient de frecare $\mu=0{,}15$ între șurub și piuliță.

Rezolvare. Se știe că forța P necesară rotirii șurubului este:

$$P=Q\frac{r}{l}\operatorname{tg}(\alpha+\varphi),$$

în care Q este sarcina, α este înclinarea filetului, φ este unghiul de frecare.

La o rotire θ a șurubului, lucrul mecanic motor este:

$$L_m=Pl\theta=Qr\theta\operatorname{tg}(\alpha+\varphi).$$

Lucrul mecanic util este:

$$L_u=Qr\theta\operatorname{tg}\alpha.$$

Conform definiției, randamentul șurubului va fi:

$$\eta=\frac{L_u}{L_m}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}\cdot \tag{1}$$

Pentru ca randamentul să fie maxim, trebuie ca derivata în funcție de α a expresiei (1) să fie egală cu zero. Deci:

$$\frac{d\eta}{d\alpha}=0,\text{ de unde }\cos(2\alpha+\varphi)=0.$$

Rezolvînd ecuația, rezultă:

$$\alpha=45^\circ-\frac{\varphi}{2}\cdot$$

Pentru $\mu=0{,}15$, $\varphi=8^\circ35'$ și deci $\alpha=40^\circ42'30''$.

Introducînd în expresia (1) valoarea lui α astfel găsită, se obține randamentul maxim:

$$\eta_{max}=\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)}=\operatorname{tg}^2\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)=0{,}74.$$

În practică, realizarea unei înclinări atît de mari ($\alpha=40^\circ42'30''$) este foarte greu de obținut. Ea se limitează la valori cuprinse între 18° și 25°.

12.15. Un motor, avînd o putere de 40 kW şi o turaţie de regim de 1 200 rot/min, transmite mişcarea de rotaţie unei maşini, prin intermediul unei cuple cu fricţiune (fig. 12.10). Raza medie a cuplei $r=28$ cm, $\alpha=10°$. Coeficientul de frecare între roţile cuplei $\mu=0{,}15$. Să se determine presiunea Q necesară acuplării.

Rezolvare. Notînd cu N reacţiunile care iau naştere la suprafaţa de contact dintre roţile cuplei, din ecuaţia de echilibru a forţelor rezultă:

$$2N=\frac{Q}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}. \tag{1}$$

Cum forţa periferică T, la limită, trebuie să fie egală cu forţa de frecare $2\mu N$, se deduce:

$$Q=\frac{1}{\mu}T\,(\sin\alpha+\mu\cos\alpha). \tag{2}$$

Pe de altă parte, valoarea forţei T se deduce din expresia momentului de torsiune:

$$M=97\,400\,\frac{P,\text{ în kW}}{n,\text{ în rot/min}}=T\cdot r$$

de unde:

$$Q=97\,400\,\frac{P}{n}\cdot\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\mu r}=2{,}52\text{ kN}$$

12.16. Un tramvai, avînd greutatea de 80 kN, absoarbe de la reţea o putere de 12 kW pentru a merge cu viteza de regim de 36 km/h. Ştiind că această viteză o realizează după 10 s de la pornire, să se determine:

a) forţa rezistentă care se opune mişcării, în cazul deplasării cu viteză constantă.

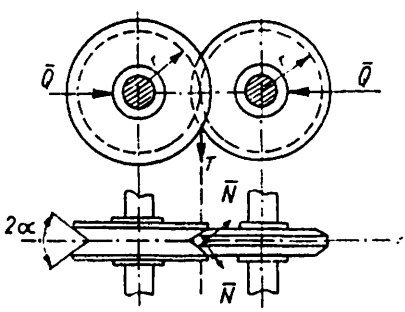
b) diagrama puterii şi a vitezei în funcţie de timp, în perioadele de pornire şi mers de regim.

Rezolvare. a) Tramvaiul va absorbi o putere maximă de la reţea la sfîrşitul perioadei de pornire deoarece, pe lîngă forţa rezistentă pe care o întîmpină şi în mişcarea de regim, se adaugă în această perioadă o forţă datorită acceleraţiei.

Forţa rezistentă în mişcare de regim este:

$$F_r=\frac{P}{v}=1\,224\text{ N}. \tag{1}$$

Fig. 12.10.



Forţa datorită acceleraţiei este:

$$F_a=ma=\frac{G}{g}\,\frac{v}{t}=8\,155\text{ N}.$$

Forţa totală care se opune mişcării este:

$$F=F_r+F_a=9\,379\text{ N}.$$

b) Ținînd seamă de relația (1), puterea absorbită de la rețea pe tot timpul perioadei de accelerare este:

$$P=Fv=Fat=9\,379 \text{ t}.$$

Puterea maximă de la sfîrșitul perioadei de accelerare (după 10 s de la pornire) este de 92 kW.

În figura 12.11 sînt reprezentate curbele de variație ale puterii și vitezei tramvaiului în perioadele de accelerare și în mersul de regim.

12.17. Să se afle lucrul mecanic efectuat în timp de o perioadă de o forță care variază armonic, după legea $F=F_0 \sin(\omega t+\varphi)$, asupra unui corp care are o mișcare definită de legea $X=x_0 \sin \omega t$.

Aplicație: $F_0=40$ N; $x_0=2$ cm; $\varphi=30°$.

Rezolvare. Se poate scrie succesiv:

$$dL=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F\,dx=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F\frac{dx}{dt}\,dt=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_0 \sin(\omega t+\varphi)\cdot x_0\omega\cos\omega t\,dt=$$

$$=F_0x_0\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t+\varphi)\cos\omega t\,d(\omega t).$$

Dezvoltînd pe $\sin(\omega t+\varphi)$, rezultă:

$$dL=F_0x_0\cos\varphi\int_0^{2\pi}\sin\omega t\cos\omega t\,d(\omega t)+F_0x_0\sin\varphi\int_0^{2\pi}\cos\omega t\cos\omega t d(\omega t).$$

Cum:

$$\int_0^{2\pi}\sin\omega t\cos\omega t d(\omega t)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d(\sin^2\omega t)=\frac{1}{2}\left|\sin^2\omega t\right|_0^{2\pi}=0,$$

iar:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\omega t d(\omega t)=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\,d(\omega t)=\pi,$$

rezultă:

$$L=\pi F_0x_0\sin\varphi=1{,}256 \text{ J}.$$

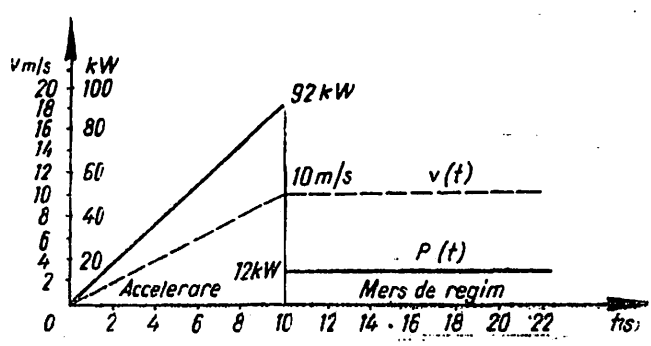


Fig. 12.11.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

12.18. Cu ce forță trebuie frînat un automobil de 7 kN pentru ca, după 10 s, viteza lui de 60 km/h să fie redusă la jumătate ?

Indicație și răspuns. Conform principiului acțiunii forței, rezultă :

$$F=ma=\frac{G}{g}\,\frac{v_0-v}{t}=594\text{ N}.$$

12.19. Să se afle în sistemele MKS și MKfS dimensiunile momentului de inerție $J=\Sigma mr^2$.

Răspuns. În sistemul MKS și CGS :

$$[J]=[L^2M]=L^2M.$$

În sistemul MKfS :

$$[J]=[L^{-1}FT^2\cdot L^2]=LFT^2.$$

12.20. Să se verifice omogenitatea formulei :

$$E\cdot I\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=M,$$

care dă ecuația fibrei neutre deformate a unei bare supuse la încovoiere, unde E este modulul de elasticitate, I momentul de inerție axial al secțiunii[1]), y ordonata curnei la abscisa x, iar M momentul încovoietor în acea secțiune.

Indicație și răspuns. În S. I. raportul $\frac{dy}{dx}$ fiind un coeficient unghiular este un număr, iar :

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]=\left[\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\right]=L^{-1}.$$

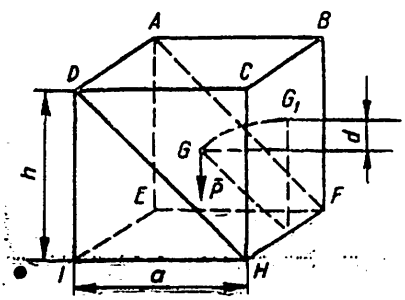
Rezultă deci :

$$\left[EL\,\frac{d^2y}{dx^2}\right]=[LM^{-1}T^{-2}\cdot L^4\cdot L^{-1}]=L^2MT^{-2}=[M].$$

12.21. Un om în greutate de 700 N merge pe un drum orizontal. Știind că la fiecare pas de 75 cm, corpul se ridică cu 20 mm, să se determine lucrul mecanic efectuat pe o distanță de 1 500 m.

Răspuns. $L_T=28$ kJ.

Fig. 12.12.



12.22. Un bloc paralelipipedic de piatră, cu baza un pătrat cu latura 0,80 m și înălțimea 1,40 m, stă pe un plan orizontal (fig. 12.12). Știind den-

[1]) I reprezintă momentul de inerție geometric.

sitatea pietrei $\rho=2\,500\frac{kg}{m^3}$, care este lucrul mecanic necesar răsturnării blocului ?

Indicație și răspuns. Pentru a putea răsturna blocul de piatră în jurul laturii FH, trebuie ca planul diagonal $ADFH$ să fie adus vertical. În acest caz, centrul de greutate se deplasează din G în G_1.

Diferența de cote d este :

$$d=\sqrt{\frac{h^2+a^2}{4}}-\frac{h}{2}=0{,}10\text{ m, deci }L=\rho Vg\cdot d\approx 2\,240\text{ J.}$$

Lucrul mecanic motor necesar răsturnării blocului trebuie să fie cel puțin egal cu lucrul mecanic rezistent calculat mai sus.

12.23. Un arc supus la o sarcină de P Newtoni, se întinde cu x_0 cm. Care este lucrul mecanic necesar pentru a-l întinde cu x_1 cm ?

Indicație și răspuns. Forța din arc fiind elastică, avem :

$$k=\frac{P}{x_0},$$

Ca urmare :

$$L=\int_0^{x_1} K\cdot x\cdot dx=\frac{1}{2}K\cdot x_1^2.$$

Acest lucru mecanic este egal cu energia potențială înmagazinată de arc.

12.24. Arborele unei mașini de greutate G, avînd fusele cu rază r, este susținut în două lagăre. Coeficientul de frecare în lagăre fiind μ, iar arborele avînd n rot/min, să se determine lucrul mecanic consumat de frecare în paliere în timpul t.

Răspuns.

$$L=-\mu G\cdot 2\pi r\cdot nt.$$

dacă t este exprimat în minute.

12.25. Un trunchi de pom, considerat cilindric, avînd raza bazei $R=20$ cm și greutatea $G=2\,400$ N, este lăsat să alunece pe o pantă înclinată față de orizontală cu un unghi $\alpha=30°$. Să se determine lucrul mecanic efectuat după parcurgerea unei distanțe $d=200$ m :

a) dacă trunchiul alunecă pe pantă cu un coeficient de frecare la alunecare $\mu=0{,}3$;

b) dacă se rostogolește, coeficientul de frecare la rostogolire fiind $s=0{,}10$ cm.

Să se compare rezultatele obținute.

Indicație și răspuns.

a) $L=Gd(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=115\,200$ J.

b) $L=Gd\left(\sin\alpha-\frac{s}{R}\cos\alpha\right)=237\,920$ J.

Cînd nu există frecare lucrul mecanic este același.

12.26. S-a constatat că energia necesară baterii țesăturii celei mai dense este echivalentă cu lucrul mecanic efectuat de un corp în greutate de 10 N, căzînd de la 0,45 m înălțime. Știind că baterea se face în 1/40 s, să se determine puterea P a unui electromotor, avînd $\eta=0,8$, care ar executa această operație.

Răspuns: $P=0,41$ kW.

12.27. Să se afle puterea frecării într-un palier de sprijin, la care $\mu=0,1$; $N=1\,000$ N; $a=2$ cm; $n=1\,200$ rot/min (fig. 12.13).

Răspuns: $P=M\omega=\mu Na\cdot\frac{2\pi n}{60}=251,2$ W.

12.28. Planimetrînd diagrama indicată a unui motor Diesel cu simplu efect și în doi timpi, s-a găsit un lucru mecanic egal cu 7 100 J. Turația de regim este 420 rot/min.

Pentru determinarea puterii arborelui s-a întrebuințat o frînă de absorbție cu un braț de 2 m, la capătul căruia s-a pus o greutate de 460 N (fig. 12.14).

Să se determine randamentul motorului.

Indicație și răspuns. Puterea utilă P_u a motorului este

$$P_u=C_{ef}\cdot\omega=P_a\cdot\omega=40,48\text{ kW}.$$

Puterea indicată este:

$$P_{ind}=\frac{L_i}{t}=49,70\text{ kW},\text{ unde } t=0,143\text{ s}.$$

Randamentul este $\eta=0,815$.

12.29. Prin intermediul unui sistem de roți dințate, roata Z_1 comandă cremaliera C (fig. 12.15). Știind că randamentul unei perechi de roți dințate este $\eta_1=0,97$ și randamentul cremalierei este $\eta_2=0,9$, să se determine randamentul întregului mecanism.

Răspuns.

$$\eta=\eta_1\cdot\eta_1\cdot\eta_2=0,85.$$

Fig. 12.13.

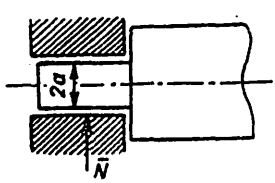


Fig. 12.14.

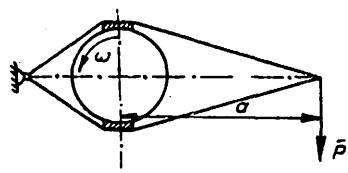
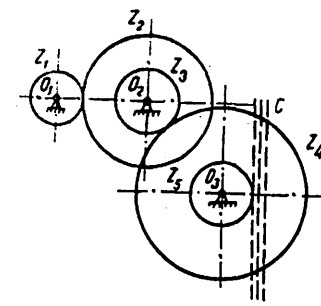


Fig. 12.15.



Capitolul 13

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Dinamica punctului material** studiază mișcarea unui punct sub acțiunea unor forțe date (exterioare) și de legătură. Studierea mișcării punctului se face în raport cu un sistem oarecare de axe de coordonate, convenabil ales. Aici se poate îngloba, în afară de mișcarea oricărui punct material de dimensiuni neglijabile, și mișcarea centrului de masă al unui rigid.

2. **Ecuația generală** de mișcare a punctului material este:

$$m\ddot{\bar{r}}=\bar{F}+\bar{L},$$

în care: $\ddot{\bar{r}}$ *este accelerația absolută a punctului* M;

forța $\bar{F}(X, Y, Z)$ *este rezultanta tuturor forțelor exterioare* (date);

$\bar{L}(L_x, L_y, L_z)$ *este rezultanta forțelor de legătură.*

Scalar, în coordonate carteziene ecuațiile sînt:

$$m\ddot{x}=X+L_x;\quad m\ddot{y}=Y+L_y;\quad m\ddot{z}=Z+L_z.$$

Forțele de legătură sînt în general funcții de coordonatele punctului (x, y, z), de viteza lui $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ și de timp.

Integrarea ecuațiilor (a) se face în funcție de șase constante $C_1, \ldots, C_6$.

$$\begin{aligned} x&=f_1(t, C_1, \ldots, C_6);\\ y&=f_2(t, C_1, \ldots, C_6);\\ z&=f_3(t, C_1, \ldots, C_6). \end{aligned} \qquad (b)$$

Constantele de integrare se pot calcula, și deci mișcarea este determinată, dacă se cunosc la timpul inițial t_0, poziția (x_0, y_0, z_0) și viteza $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ punctului.

Pentru aceasta, derivînd sistemul de ecuații (b), se obține sistemul (b'):

$$\begin{aligned} \dot{x}&=\frac{dx}{dt}=f_1'(t, C_1, \ldots, C_6);\\ \dot{y}&=\frac{dy}{dt}=f_2'(t, C_1, \ldots, C_6);\\ \dot{z}&=\frac{dz}{dt}=f_3'(t, C_1, \ldots, C_6). \end{aligned} \qquad (b')$$

Înlocuind pe $t=t_0$ în sistemul de ecuații (b) și (b'), se obține un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute, din care se determină constantele de integrare $C_1, \ldots, C_6$.

Adesea se aplică, cu rezultate imediate în rezolvarea problemelor de dinamică, teoremele generale (teorema energiei cinetice, teorema impulsului și a momentului cinetic) (cap. XV), care sînt de fapt integrale prime ale ecuațiilor diferențiale ale mișcării.

3. **În coordonate intrinseci** relația fundamentală

$$m\bar{a}=\bar{F}+\bar{L} \qquad (a')$$

se proiectează pe triedrul mobil (tangentă, normală, binormală) și în acest caz, ecuațiile de mișcare sînt:

$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau+L_\tau;\quad m\frac{v^2}{\rho}=F_\nu+L_\nu;\ 0=F_\beta+L_\beta, \qquad (c)$$

în care $\bar{F}(F_\tau, F_\nu, F_\beta)$ și $\bar{L}(L_\tau, L_\nu, L_\beta)$ sînt respectiv proiecțiile forțelor exterioare și de legătură pe triedrul mobil.

Ecuațiile (c) integrate ținînd seamă de condițiile inițiale, determină mișcarea.

4. **Mișcarea punctului material fără legături** se determină prin integrarea ecuațiilor diferențiale (a) sau (c) în care se face:

$$\bar{L}=0.$$

5. **În cazul mișcării rectilinii** există o singură ecuație diferențială:

$$m\ddot{x}=X=\varphi(t, x, \dot{x}), \qquad (d)$$

care, prin integrare, dă:

$$x=f(t, C_1, C_2). \qquad (d')$$

Deoarece la momentul inițial $t=t_0$, se cunosc x_0 și $\dot{x}_0$, se determină constantele de integrare din rezolvarea sistemului format de ecuațiile:

$$x_0=f(t_0, C_1, C_2),$$

$$\dot{x}_0=f'(t_0, C_1, C_2).$$

Există numeroase cazuri particulare ale mișcării rectilinii a punctului material, a căror integrare se poate face imediat și anume:

— mișcarea punctului sub acțiunea unei forțe constante $\bar{F}=\bar{C}$, mișcarea uniform accelerată sau decelerată după semnul forței;

— mișcarea numai sub acțiunea unei forțe funcție de timp $\bar{F}(t)$, unei forțe funcție de spațiu $X=X(x)$, sau unei forțe funcție de viteză $\bar{F}(v)$, ecuații care se pot ușor integra prin separarea variabilelor;

— mișcarea sub acțiunea unei forțe elastice $\bar{F}=-k\bar{r}$, care produce mișcarea oscilatorie armonică ce va fi studiată mai amănunțit la capitolul XIX *Vibrații în tehnică.*

Pe o suprafață $f(x\ y\ z)=0$ mișcarea punctului material este dată de ecuația vectorială:

$$m\bar{a}=\bar{F}+\lambda \operatorname{grad} f,$$

sau scalar:

$$m\ddot{x}=X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x};\quad m\ddot{y}=Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y};\quad m\ddot{z}=Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Traiectoria este definită de ecuația suprafeței și de ecuațiile:

$$\frac{m\ddot{x}-X}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{m\ddot{y}-Y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{m\ddot{z}-Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Mișcarea punctului material pe o curbă de ecuații:

$$f(x, y, z)=0;\quad \varphi(x, y, z)=0$$

este dată de ecuația vectorială:

$$m\bar{a}=\bar{F}+\lambda_1 \operatorname{grad} f+\lambda_2 \operatorname{grad}\varphi.$$

În cazul mișcării cu frecare a punctului material pe o suprafață sau pe o curbă, forța de legătură $\bar{L}$ nu mai este dirijată după normalele la suprafață sau curbă, deoarece există pe lîngă componenta normală și una tangențială $\bar{T}$. Ecuația mișcării este în acest caz:

$$m\bar{a}=\bar{F}+\bar{T}+\bar{N},$$

unde $|\bar{T}|\leqslant\mu|\bar{N}|$.

6. **Forțe centrale.** Dacă rezultanta forțelor exterioare care acționează punctul material M trece necontenit printr-un punct fix O, punctul descrie o traiectorie plană definită de punctul O și direcția vitezei inițiale $\bar{v}_0$ a punctului. O astfel de mișcare urmează legea ariilor:

$$r^2\dot{\theta}=const=r_0v_0\sin(\bar{r}_0, \bar{v}_0)=C, \qquad (e)$$

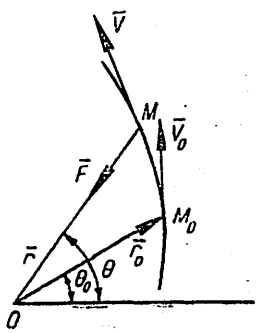
adică punctul material se mișcă în plan astfel ca viteza areolară să fie constantă (fig. 13.1).

În acest caz se poate folosi ecuația lui *Binet*:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}=\pm\frac{Fr^2}{mC^2}, \qquad (f)$$

unde C este constanta ariilor, iar r vectorul de poziție.

Fig. 13.1.



7. **Mișcarea relativă a punctului material.** În legea a doua a lui Newton (a'), forța rezultantă $\bar{F}$ care acționează punctul material, este egală cu produsul între masa și accelerația ei absolută a. Dar în mișcarea relativă există relația:

$$\bar{a}=\bar{a}_r+\bar{a}_t+\bar{a}_c, \qquad (g)$$

deci ecuaţia fundamentală a mecanicii sub formă vectorială devine :

$$m\bar{a}_r=\bar{F}-m\bar{a}_t-m\bar{a}_c. \qquad (h)$$

Astfel, în mişcarea relativă a punctului material, în scrierea ecuaţiei de mişcare, trebuie să se introducă şi forţele datorite acceleraţiei de transport şi complementară.

Scalar, ecuaţia (*h*) trebuie proiectată pe axe carteziene fixe ($\xi 0\eta\zeta$) sau intrinseci ($\tau 0\nu\beta$), legate tot timpul de punctul material în mişcare.

Dacă mişcarea de transport este o mişcare de translaţie uniformă atunci $\bar{a}_t=0$; $\bar{a}_c=0$ şi în acest caz rezultă aceeaşi ecuaţie de mişcare ca şi în cazul unei mişcări faţă de axe fixe.

B. PROBLEME REZOLVATE

13.1. O bilă cu masa m cade fără viteză iniţială, pe verticală (fig. 13.2).

a) Ştiind că în timpul căderii întîmpină rezistenţa aerului proporţională cu viteza $R=Kmv$, să se determine legea mişcării bilei.

b) Care este legea mişcării bilei atunci cînd este aruncată vertical în sus, cu viteza iniţială v_0 ?

Rezolvare. a) La un moment dat, asupra bilei acţionează următoarele forţe exterioare :

— greutatea proprie $G=mg$;

— rezistenţa aerului $R=Kmv$.

Luînd ca sens pozitiv sensul mişcării, ecuaţia diferenţială a mişcării este :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-Kmv, \qquad (1)$$

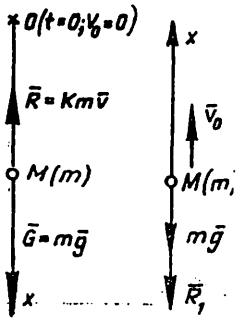
care poate fi soluţionată fie luînd ca variabile viteza v şi timpul t, apoi separînd variabilele, fie scriind ecuaţia (1) sub forma unei ecuaţii diferenţiale liniare :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+K\frac{dx}{dt}=g, \qquad (1')$$

a cărei soluţie completă este :

$$x=C_1+C_2e^{-Kt}+\frac{g}{K}t. \qquad (2)$$

Fig. 13.2.



Din condiţiile iniţiale $t=0$, $v=0$ şi $x=0$, rezultă constantele de integrare.

Derivata relaţiei (2) este :

$$\frac{dx}{dt}=v=-KC_2e^{-Kt}+\frac{g}{K}, \qquad (3)$$

iar legea mișcării punctului:

$$x=\frac{g}{K}t-\frac{g}{K^2}(1-e^{-Kt}), \tag{4}$$

de unde, prin diferențiere, se obține viteza mobilului.

Dezvoltînd în serie expresia e^{-Kt} din ecuația (4), se obține:

$$x=\frac{gt^2}{2}\left(1-\frac{Kt}{3}+\ldots\right).$$

Pentru $K=0$ (mișcarea în vid), legea spațiilor devine:

$$x=\frac{1}{2}gt^2.$$

b) Dacă punctul material *este aruncat* pe verticală în sus, ecuația diferențială a mișcării este:

$$m\frac{d^2x}{dt}=-mg-Kmv, \tag{5}$$

sau

$$\frac{dv}{dt}+Kv=-g$$

de unde, prin integrare, ținînd seamă de condițiile inițiale $t=0$ și $x=0$, rezultă:

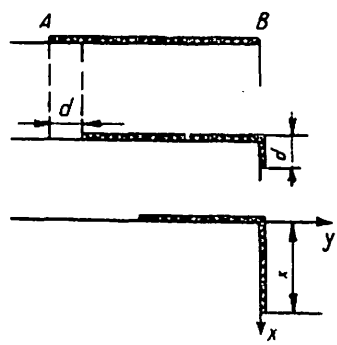
$$v=-\frac{g}{K}+\left(v_0+\frac{g}{K}\right)e^{-Kt}, \tag{6}$$

$$x=\frac{1}{K}\left(v_0+\frac{g}{K}\right)(1-e^{-Kt})-\frac{g}{K}t. \tag{7}$$

Pentru determinarea timpului la care mobilul are o viteză dată $\overline{v}_1$, sau a parcurs un spațiu oarecare x_1, trebuie rezolvate ecuațiile transcendente (6) și (7), unde se înlocuiește v și x, respectiv cu v_1 și x_1. Pentru rezolvarea ecuațiilor se face fie o rezolvare grafică prin intersecții de curbe, fie se dezvoltă în serie funcția exponențială și se ia un număr redus de termeni.

13.2. Un lanț inextensibil, de lungime l, stă pe o masă orizontală cu capătul B la marginea masei. Se dă lanțului o deplasare mică d și apoi este lăsat să alunece fără viteză inițială (fig. 13.3). Presupunînd că alunecarea lanțului pe masă se face fără frecare, să se determine:

Fig. 13.3.



a) mișcarea unui punct al lanțului;

b) timpul necesar pentru ca lanțul să părăsească masa.

Rezolvare. Lanțul fiind inextensibil, mișcarea lui poate fi determinată cunoscînd mișcarea unui punct al lui, de exemplu capătul B.

Considerînd lanțul deplasat din poziția inițială cu spațiul x, forța care acționează asupra lui este greutatea părții de lanț care atîrnă ($p \cdot x$). Ecuația diferențială a mișcării lanțului este:

$$m\ddot{x}=px. \tag{1}$$

Cum $m=\frac{pl}{g}$, ecuația (1) devine:

$$\ddot{x}-\frac{g}{l}x=0. \tag{1'}$$

Notînd $\sqrt{\frac{g}{l}}=\omega$, prin integrare obținem:

$$x=C_1e^{\omega t}+C_2e^{-\omega t} \tag{2}$$

de unde:

$$v=\dot{x}=\omega\,(C_1e^{\omega t}-C_2e^{-\omega t}). \tag{3}$$

Din condițiile inițiale pentru $t=0$, $x=d$ și $v=0$ rezultă constantele de integrare:

$$C_1=C_2=\frac{d}{2} \tag{4}$$

și ca urmare:

$$v^2=\frac{g}{l}(x^2-d^2), \tag{5}$$

relație care se obține direct prin aplicarea teoremei energiei. Timpul cerut se obține din ecuația spațiului (2) în care $x=l$, iar constantele de integrare sînt date de relația (4).

13.3. Un corp cu masa m este aruncat vertical în sus cu viteza v_0. Știind că ea întîmpină o rezistență din partea aerului, proporțională cu pătratul vitezei $R=K\cdot v^2$, să se determine viteza cu care va atinge din nou pămîntul.

Rezolvare. Ecuația diferențială a mișcării în perioada de ridicare a corpului este:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-Kv^2,$$

ecuație care se mai poate scrie sub forma:

$$v\frac{dv}{dx}=-g-\frac{K}{m}v^2.$$

Separînd variabilele și integrînd, rezultă:

$$x=-\frac{m}{2K}\ln(mg+Kv^2)+C.$$

Ţinînd seamă de condiţiile iniţiale $t=0$, $x=0$ şi $v=v_0$ se determină valoarea constantei de integrare şi în acest caz, ecuaţia mişcării devine:

$$x=\frac{m}{2K}\ln\frac{mg+Kv_0^2}{mg+Kv^2}.$$

Înălţimea maximă se atinge cînd $v=0$. Deci:

$$h=\frac{m}{2K}\ln\frac{mg+Kv_0^2}{mg}. \qquad (1)$$

În cazul căderii corpului, ecuaţia diferenţială a mişcării este:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg+Kv^2,$$

sau, integrînd, rezultă:

$$x=\frac{m}{2K}\ln(mg-Kv^2)+C.$$

În noile condiţii iniţiale pentru $x=h$, $v=0$ şi ţinînd seamă de relaţia (1), se determină valoarea constantei de integrare şi, în acest caz, ecuaţia mişcării este:

$$x=\frac{m}{2K}\ln\frac{(mg+Kv_0^2)(mg-Kv^2)}{m^2g^2}.$$

Cînd corpul atinge solul, $x=0$, de unde:

$$v^2=v_0^2\frac{1}{1+\frac{K}{mg}v_0^2}.$$

Dacă corpul nu ar întîmpina rezistenţa aerului, $K=0$, valoarea vitezei în punctul de cădere ar fi egală cu viteza de aruncare v_0.

13.4. Un punct cu masa m se deplasează pe o axă fixă Ox, fiind atras de centrul atractiv O cu o forţă $F=m(a+k^2x)$, în care x este distanţa de la punctul material la centru (fig. 13.4).

În momentul iniţial, punctul ocupă poziţia $x=x_0$ şi are viteza iniţială v_0. Să se determine legea mişcării.

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială a mişcării punctului este:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-m(a+k^2x),$$

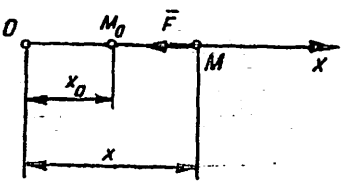
sau

$$\frac{d^2x}{dt}+k^2x=-a. \qquad (1)$$

Soluţia completă a ecuaţiei este:

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt-\frac{a}{k^2}. \qquad (2)$$

Fig. 13.4.



Derivînd în funcţie de timp, şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale $t=0$, $v=v_0$ şi $x=x_0$, rezultă constantele:

$$C_1=x_0+\frac{a}{k^2} \text{ şi } C_2=\frac{v_0}{k};$$

şi ca urmare ecuaţia mişcării va fi:

$$x=\left(x_0+\frac{a}{k^2}\right)\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt-\frac{a}{k^2}. \qquad (2')$$

13.5. Sub ce unghi α şi cu ce viteză iniţială v_0 (fig. 13.5), trebuie lansat în vid un punct material greu pentru a lovi un perete vertical, aflat la distanţa d, sub unghiul $\beta<\alpha$, într-un punct A situat la înălţimea h faţă de orizontala punctului de lansare?

Aplicaţie: $\beta=0$; $h=10$ m; $d=20$ m.

Rezolvare. Se ştie că ecuaţia traiectoriei în vid, a unui punct material aruncat sub un unghi α este:

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Deoarece punctul $A(d, h)$ trebuie să se afle pe traiectorie, rezultă o primă condiţie:

$$h=d\operatorname{tg}\alpha-\frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \qquad (1)$$

Cum traiectoria trebuie să lovească zidul sub unghiul β prin derivarea ecuaţiei traiectoriei unui punct lansat rezultă o a doua relaţie:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=d}=\operatorname{tg}\alpha-\frac{gd}{v_0^2\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}\beta. \qquad (2)$$

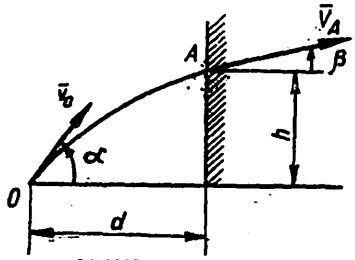
Din (1) şi (2) rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2h}{d}-\operatorname{tg}\beta, \qquad (3)$$

iar din eliminarea valorii $\operatorname{tg}\alpha$ din relaţiile (1) şi (3) obţinem:

$$v_0^2=\frac{gd^2}{2(h-d\operatorname{tg}\beta)}\left[1+\left(\frac{2h}{d}-\operatorname{tg}\beta\right)^2\right].$$

Fig. 13.5.



Pentru aplicaţia numerică se obţine:

$$\operatorname{tg}\beta=0;\quad \operatorname{tg}\alpha=1;\quad \alpha=45°;\quad v_0\approx 400 \text{ m/s}.$$

13.6. Un avion, zburînd orizontal cu o viteză v_0, la o înălțime h, lansează un corp G (fig. 13.6). Știind că în timpul deplasării corpul întîmpină rezistența aerului, proporțională cu viteza $R=kmv$, să se determine distanța la punctul de cădere.

Rezolvare. Proiectînd forțele $\bar{G}$ și $\bar{R}$ pe două axe ortogonale, xoy, ecuațiile diferențiale ale mișcării devin:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-R_x \quad \text{sau} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-k\cdot v_x;$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2}=G-R_y \quad \text{sau} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=g-k\cdot v_y. \qquad (1)$$

Prin integrare, obținem:

$$x=C_1+C_2e^{-kt}; \quad y=C_3+C_4e^{-kt}+\frac{g}{k}t.$$

Derivînd în raport cu t, cele două ecuații parametrice ale spațiului, se obține

$$\dot{x}=v_x=-k\cdot C_2\cdot e^{-kt}; \quad \dot{y}=v_y=-k\cdot C_4\cdot e^{-kt}+\frac{g}{k}\cdot$$

Determinarea constantelor se face prin condițiile inițiale pentru:

$$t=0, \quad v_x=v_0; \quad v_y=0; \quad x=0; \quad y=0,$$

deci:

$$v_0=-kC_2, \text{ de unde } C_2=-\frac{v_0}{k};$$

$$0=-kC_4+\frac{g}{k}, \text{ de unde } C_4=\frac{g}{k^2};$$

$$0=C_1-\frac{v_0}{k}, \text{ de unde } C_1=\frac{v_0}{k};$$

$$0=C_3+\frac{g}{k^2}, \text{ de unde } C_3=-\frac{g}{k^2}\cdot$$

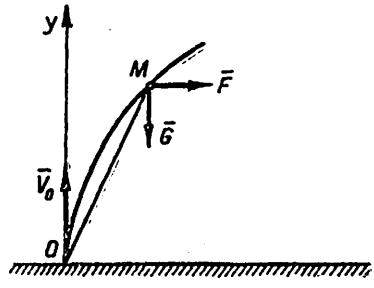
Astfel încît ecuațiile parametrice ale spațiului devin:

$$x=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt}); \quad y=\frac{g}{k^2}(e^{-kt}-1)+\frac{g}{k}t. \qquad (2)$$

Dezvoltînd în serie expresia e^{-kt} în relațiile (2), ele se mai pot scrie:

$$x=v_0t\left(1-\frac{k\cdot t}{2}+\ldots\right); \quad y=\frac{1}{2}gt^2\left(1-\frac{kt}{3}+\ldots\right). \qquad (2')$$

Fig. 13.6.



Dacă nu ar interveni rezistența aerului atunci $k=0$ și ecuațiile (2') devin:

$$x=v_0t \text{ și } y=\frac{1}{2}gt^2.$$

13.7. O rachetă este aruncată vertical în sus cu o viteză v_0. Știind că în timpul deplasării acționează forța orizontală a vîntului de mărime constantă, $F=km$, să se determine:

a) deplasarea unghiulară față de verticală pe care o va avea racheta după t secunde de la lansare;

b) traiectoria urmată de rachetă.

Rezolvare. a) Se consideră racheta redusă la un punct material de masă m, undeva pe traiectorie (fig. 13.7). Forțele care acționează în acest punct sînt:

— greutatea proprie G, dirijată după verticală;

— forța vîntului F, dirijată după orizontală.

Proiectînd forțele pe două axe ortogonale xoy, ecuațiile diferențiale ale mișcării devin:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F, \quad \text{sau} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=k;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-G, \quad \text{sau} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g.$$

Integrînd succesiv, se obține:

$$\frac{dx}{dt}=v_x=k\cdot t+C_1 \quad \text{și} \quad \frac{dy}{dt}=v_y=-gt+C_2;$$

$$x=\frac{1}{2}k\cdot t^2+C_1\cdot t+C_3; \quad y=-\frac{1}{2}g\cdot t^2+C_2t+C_4.$$

Pentru condițiile inițiale, la $t=0$, $v_x=0$, $v_y=v_0$, $x=0$, $y=0$, rezultă:

$$C_1=0;\ C_2=v_0;\ C_3=0;\ C_4=0,$$

iar ecuațiile parametrice ale spațiului devin:

$$x=\frac{1}{2}k\cdot t^2; \quad y=v_0\cdot t-\frac{1}{2}gt^2.$$

Deviația unghiulară a rachetei după timpul t este determinată de unghiul θ, definit de relația:

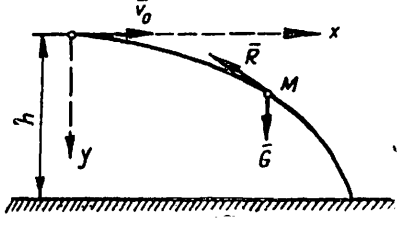
$$\operatorname{arctg}\theta=\frac{x}{y}=\frac{kt}{2\cdot v-g\cdot t}.$$

Ecuația traiectoriei este:

$$\left(y+\frac{g}{k}x\right)^2=\frac{2\cdot v_0^2}{k}x.$$

reprezintă o parabolă care trece prin originea axelor.

Fig. 13.7.



13.8. Un satelit artificial al Pămîntului, de masă m, este lansat pe o traiectorie circulară la o înălțime constantă h față de sol (fig. 13.8). Să se afle:

1) viteza v_0 necesară lansării sub unghiul $\alpha=90°$ și perioada mișcării;

2) înălțimea h necesară pentru ca satelitul să poată deveni un observator fix.

Rezolvare. 1) Înălțimea h deasupra solului fiind constantă, ecuația lui Binet (*f*) devine:

$$\frac{1}{r}=\frac{Fr^2}{mc^2}, \tag{1}$$

unde $r=R_0+h$.

Din legea atracției universale $F=f\frac{mM}{r^2}$, unde M este masa Pămîntului cînd $r=R_0$ și $F=mg$, rezultă $fM=gR_0^2$. Dar lansarea făcîndu-se sub $\alpha=\frac{\pi}{2}$, rezultă $C=(R_0+h)v_0$. Înlocuind în partea întîia a ecuației lui Binet (1) pe $r=R_0+h=ct$ obținem:

$$v_0=R_0\sqrt{\frac{g}{R_0+h}}.$$

Mișcarea efectuîndu-se după legea ariilor pe o traiectorie circulară se obține:

$$T=\frac{A}{\Omega}=\frac{\pi(R_0+h)^2}{\frac{c}{2}}=\frac{2\pi}{R\sqrt{g}}(R+h)^{3/2}.$$

2) Cum perioada unei mișcări de revoluție a satelitului este $T=23^h56^{min}54^s$, din relația precedentă rezultă:

$$h=\left(\frac{TR\sqrt{g}}{2\pi}\right)^{2/3}-R=37\,600\text{ km}.$$

13.9. Să se stabilească legea mișcării și tensiunea din fir ale unui pendul simplu în cazul amplitudinilor oarecare.

Rezolvare. Ecuațiile diferențiale ale mișcării sînt:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0;\quad m\frac{v^2}{l}=-mg\cos\theta+T=0.$$

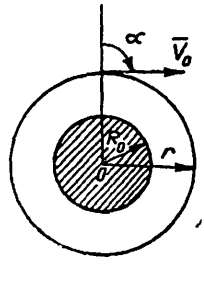
Înmulțind ambii termeni ai primei ecuații cu $\dot{\theta}$ și integrînd termen cu termen, se obține:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2-\frac{g}{l}\cos\theta=C.$$

Prin condițiile inițiale, pentru $t=0$, $\theta=\theta_0$ și $\dot{\theta}=0$ se găsește: $C=-\frac{g}{l}\cos\theta_0$ și astfel ecuația se poate scrie:

$$\dot{\theta}^2=2\frac{g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0). \tag{2}$$

Fig. 13.8.



Făcînd înlocuirea:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \text{și} \quad \cos\theta_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta_0}{2},$$

ecuația (2) devine:

$$\frac{d\theta}{dt} = -2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}},$$

de unde:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = -2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt. \tag{3}$$

Pentru a integra expresia din primul membru, se face substituția:

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = k \quad \text{și} \quad \sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi.$$

Diferențiind, se obține:

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = k\cos\varphi\,d\varphi, \quad \text{de unde} \quad d\theta = \frac{2k\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Astfel încît ecuația (3) se poate scrie în funcție de noua variabilă φ;

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt. \tag{4}$$

Integrala din primul membru este o integrală eliptică completă de prima speță, avînd ca valoare $K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$. Se vede că ea este o funcție dependentă de k, deci de θ_0. Rezultă că perioada corespunzătoare unei amplitudini de oscilații θ_0 este dată de expresia:

$$T_{0_0} = 4K\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

O valoare utilizabilă în practică pentru perioada de oscilație se poate obține dezvoltînd în serie radicalul numitorului fracției din expresia (4):

$$(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\cdot\sin^4\varphi + \ldots.$$

Înlocuind și integrînd, rezultă:

$$T\theta_0 = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2\right), \tag{5}$$

dacă se iau în considerare numai primii doi termeni ai dezvoltării în serie. Însă cum:

$$k = \sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0'}{48} + \ldots,$$

relația (5) devine:

$$T_{\theta_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\theta_0^3}{16}-\frac{\theta_0^4}{192}\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}f(\theta),$$

în care $f(\theta)$ este dat de tabela 13.1.

Se vede că atunci cînd θ este foarte mic, se regăsește valoarea perioadei în cazul oscilațiilor de amplitudini mici; în cazul $\theta=180°$, $f(\theta)=\infty$.

Din ecuația diferențială a mișcării se deduce tensiunea în fir:

$$T=ml\dot{\theta}^2+mg\cos\theta. \qquad (7)$$

Ținînd seamă de relația (2), se poate scrie:

$$T=mg(3\cos\theta-2\cos\theta_0).$$

Tensiunea în fir este nulă pentru:

$$\theta=\arccos\left(\frac{2}{3}\cos\theta_0\right).$$

Tabela 13.1

Variația funcției μ

θ	$f(\theta)$	θ	$f(\theta)$
0°	1,000 00	15°	1,004 3
1°	1,000 02	30°	1,017 4
2°	1,000 07	45°	1,040 0
3°	1,000 17	60°	1,069 2
4°	1,000 30	90°	1,180 3
5°	1,000 48	120°	1,372 9
10°	1,001 91	150°	1,762 1

13.10. Un cărucior cu greutatea G, asimilat cu un punct material, coboară fără frecare pe drumul ABD care formează o buclă circulară de rază R (fig. 13.9). Se cere înălțimea h de la care se poate da drumul căruciorului, fără să se dezlipească de buclă, și reacțiunea într-un punct M, definită de unghiul φ.

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru dinamic în coordonate intrinseci sînt:

$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau=-G\sin\varphi; \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{R}=N-G\cos\varphi, \qquad (2)$$

în care N este reacțiunea cercului asupra punctului material. Cum $v=R\dot{\varphi}$, prima ecuație se mai poate scrie:

$$mR\dot{\varphi}=-G\sin\varphi.$$

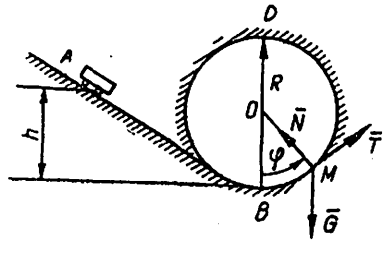
Înmulțind ambii membri cu $\dot{\varphi}$ și integrînd, rezultă:

$$\frac{1}{2}mR\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=G\cos\varphi+C. \qquad (3)$$

În punctul B (definit de $\varphi=0$), cînd începe mișcarea circulară, mobilul are viteza v_0, dată de relația:

$$v_0=\sqrt{2gh},$$

Fig. 13.9.



așa încît, după determinarea constantei de integrare, relația (3) devine:

$$m\frac{v^2}{R}=m\frac{v_0^2}{R}-2G(1-\cos\varphi). \tag{3'}$$

Combinînd cu relația (2), rezultă:

$$N=\frac{G}{g}\cdot\frac{2gh}{R}-G(2-3\cos\varphi)=G\left(\frac{2h}{R}+3\cos\varphi-2\right).$$

Poziția cea mai defavorabilă a deslipirii căruciorului de pe curbă este punctul C. În acest punct, definit de unghiul $\varphi=\pi$, trebuie ca reacțiunea să fie pozitivă, deci:

$$\frac{2h}{R}+3\cos\pi-2\geqslant 0,$$

de unde:

$$h\geqslant 2{,}5\,R.$$

13.11. Un corp se află în punctul A pe o suprafață sferică cu rază R (fig. 13.10).

a) Neglijînd frecarea, să se afle viteza inițială orizontală v_0 cu care trebuie lansat corpul, astfel încît el să părăsească emisfera sub un unghi dat α.

b) Care este viteza corpului în momentul părăsirii emisferei, în punctul B?

c) Neglijînd rezistența aerului, să se afle distanța cu care corpul se depărtează de emisferă, măsurată pe un diametru orizontal.

Aplicație: $\alpha=30°$; $R=6$ m; $g=10$ m/s^2.

Rezolvare. a) Se vor folosi coordonatele sferice. Valorile accelerațiilor a_r, a_φ, a_θ sînt date în anexa 3. Punctul material se deplasează de-a lungul unui meridian, așa încît $\varphi=const$. Cum și $r=R=const$, rezultă:

$$a_r=-R\dot{\theta}^2;\quad a_\theta=R\ddot{\theta};\quad a_\varphi=0.$$

Asupra corpului acționînd greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea $\bar{N}$, ecuațiile de mișcare sînt:

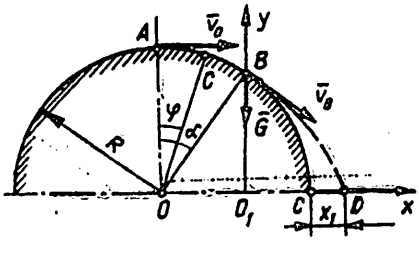
$$-mR\dot{\varphi}^2=N-mg\cos\theta; \tag{1}$$

$$mR\ddot{\varphi}=mg\sin\theta. \tag{2}$$

Înmulțind ambele părți ale ecuației (2) cu $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ și integrînd, rezultă:

$$\frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2=-mg\cos\theta+C. \tag{3}$$

Fig. 13.10.



Condițiile inițiale fiind pentru $t=0$, $\theta=0$ și $R\dot{\theta}=v_0$, rezultă valoarea constantei de integrare:

$$C=\frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{R}+mg,$$

de unde:

$$mR\dot{\theta}^2 = \frac{mv_0^2}{R} + 2mg(1-\cos\theta). \tag{4}$$

Înlocuind în relația (1) valoarea primului membru al relației (4), se poate scrie:

$$-\frac{mv_0^2}{R} - 2mg(1-\cos\theta) = N - mg\cos\theta,$$

de unde:

$$N = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mv_0^2}{R}, \tag{5}$$

expresie care dă valoarea reacțiunii N, într-un punct oarecare C de pe emisferă.

Dacă punctul material părăsește emisfera în punctul B, astfel încît $\theta=\alpha$, rezultă că $N=0$. În această situație, din relația (5) se deduce:

$$v_0 = \sqrt{Rg(3\cos\alpha - 2)}.$$

b) Din ecuația (1), știind că $R\dot{\theta}=v$, se poate determina viteza corpului în punctul B cînd $N=0$:

$$v_B = \sqrt{R \cdot g \cdot \cos\alpha}.$$

c) Pentru determinarea distanței $x_1=CD$, cu care se depărtează corpul de emisferă, se studiază mișcarea corpului în raport cu un sistem de axe de coordonate care trece prin punctul B, avînd originea în O_1, astfel încît:

$$x_1 = x - O_1C = x - \frac{1}{2}R.$$

Neglijînd rezistența aerului și știind că punctul material este liber, ecuațiile mișcării sînt:

$$m\ddot{x}=0\,;\quad m\ddot{y}=-mg.$$

Integrînd succesiv și ținînd seamă de condițiile inițiale pentru $t=0$:

$$x_0=0\,;\quad y_0=R\cos\alpha\,;$$

$$v_{0x}=v_B\cos\alpha\,;\quad v_{0y}=-v_B\sin\alpha,$$

se obțin ecuațiile parametrice:

$$x=v_Bt\cos\alpha\,;\quad y=-\frac{1}{2}gt^2-v_Bt\sin\alpha+R\cos\alpha.$$

În punctul D, $y=0$ și eliminînd pe t din ultimele două ecuații, va rezulta:

$$R\cos\alpha = x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_B^2\cos^2\alpha},$$

ecuație care rezolvată, dă abscisa x:

$$x=R\cos^2\alpha\,(-\sin\alpha+\sqrt{\sin^2\alpha+2}).$$

Pentru aplicația numerică se obține:

$$v_0=6\text{ m/s};\ v_B=7{,}2\text{ m/s};\ x_1=1{,}5\text{ m/s}.$$

Observație. În cazul general cînd corpul pornind dintr-un punct diferit de A se deplasează oricum pe suprafața sferei, neurmînd drumul unui meridian, ecuațiile de mișcare devin:

$$-m\,[R\dot{\theta}^2+R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta]=N-mg\cos\theta;$$

$$m\,[R\ddot{\theta}-R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta]=mg\sin\theta;$$

$$m\left[R\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sin\theta+2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right]=0.$$

Dacă a doua ecuație se înmulțește cu $\dot{\theta}$, iar a treia cu $\sin\theta$ adunîndu-le și integrînd, prima ecuație devine:

$$N=3mg\cos\varphi-2C.$$

Pentru anumite condiții inițiale, se poate determina constanta de integrare C.

13.12. Punctul de oscilație al unui pendul matematic cu masă m și lungime l, are o mișcare de translație verticală în jos, cu accelerație constantă $a<g$. Să se determine mișcarea relativă a pendulului și perioada micilor oscilații.

Rezolvare. Avînd o mișcare de transport de translație, accelerația complimentară este nulă. Ecuațiile de echilibru relativ în coordonate intrinseci, devin:

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\theta+ma_t\sin\theta, \tag{1}$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=-mg\cos\theta+ma_t\cos\theta+T. \tag{2}$$

Cum: $v=l\frac{d\theta}{dt}$, ecuația întîi devine:

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2}+(g-a_t)\sin\theta=0.$$

Pentru oscilații mai mici rezultă:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a_t}}.$$

Pendulul oscilează în acest caz mai lent decît dacă punctul în jurul căruia se produc oscilațiile era imobil.

13.13. Un sac cu nisip, cu greutatea G, este aruncat fără viteză inițială, dintr-un balon aflat la înălțimea h, în emisfera nordică și la o latitudine geo-

grafică φ (fig. 13.11). Să se determine cu cît se va deplasa sacul față de verticala locului în momentul cînd acesta atinge pămîntul, dacă se asimilează sacul cu un punct material și se neglijează rezistența aerului.

Aplicație: $G=1\,000\ N$; $h=3\,000$ m; $\varphi=48°$.

Rezolvare. Se consideră un punct M aflat pe suprafața pămîntului, definit de latitudinea φ, și se iau ca axe legate de pămînt triedrul mobil $\xi M \eta\zeta$ (axa $M\xi$ tangentă la meridian, axa $M\eta$ tangentă la paralela care trece prin M și $M\zeta$ direcția razei OM).

Mobilul este supus la două forțe reale: atracția pămîntului și rezultanta forțelor exterioare $\bar{F}(X, Y, Z)$, aplicate punctului respectiv.

Introducînd accelerațiile de transport și complementară, ecuația de mișcare față de pămînt presupus imobil, este:

$$\frac{G}{g}\bar{a}_r=\bar{F}-\frac{G}{g}\bar{a}_t-\frac{G}{g}\bar{a}_c. \tag{1}$$

Atracția pămîntului și forța centrifugă, avînd ca rezultantă greutatea corpului G, dirijată după verticală, rezultă că este suficient să se calculeze accelerația complementară. Ducînd în M vectorul $\bar{\omega}$ paralel și egal cu vectorul rotație de transport față de axele alese, rezultă $\bar{\omega}(p, q, r)$:

$$p=-\omega\cos\varphi;\quad q=0;\quad r=\omega\sin\varphi, \tag{2}$$

iar accelerația complementară $\bar{a}_c$ este:

$$\bar{a}_c=2\bar{\omega}\times\bar{v}_r=2\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ p&q&r\\ \dot{\xi}&\dot{\eta}&\dot{\zeta}\end{vmatrix}. \tag{3}$$

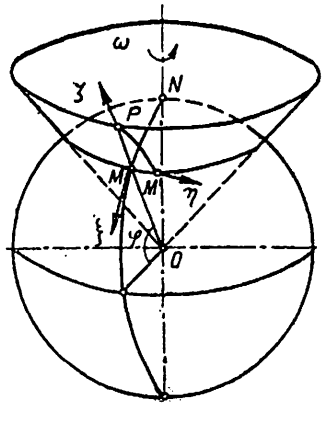
Notînd $\bar{a}_r(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta})$ și ținînd seamă de relațiile (2) și (3), ecuația vectorială (1) se poate scrie scalar:

$$\frac{G}{g}\ddot{\xi}=X-2\frac{G}{g}(q\dot{\zeta}-r\dot{\eta})=X-2\frac{G}{g}\omega\dot{\eta}\sin\varphi; \tag{4}$$

$$\frac{G}{g}\ddot{\eta}=Y-2\frac{G}{g}(r\dot{\xi}-p\dot{\zeta})=Y+2\frac{G}{g}\omega(\dot{\xi}\sin\varphi+\dot{\zeta}\cos\varphi); \tag{5}$$

$$\frac{G}{g}\ddot{\zeta}=Z-2\frac{G}{g}(p\dot{\eta}-q\dot{\xi})=Z-2\frac{G}{g}\omega\dot{\eta}\cos\varphi. \tag{6}$$

Fig. 13.11.



În cazul căderii libere în vid: $X=0$, $Y=0$, $Z=-G$, și ecuațiile de mișcare devin:

$$\ddot{\xi}=-2\omega\dot{\eta}\sin\varphi; \tag{4'}$$

$$\ddot{\eta}=2\omega(\dot{\xi}\sin\varphi+\dot{\zeta}\cos\varphi); \tag{5'}$$

$$\ddot{\zeta}=-g-2\omega\dot{\eta}\cos\varphi. \tag{6'}$$

Din integrarea ecuațiilor (4') și (6'), viteza inițială fiind nulă, rezultă:

$$\dot{\xi}=-2\omega\eta \sin\varphi \text{ și } \dot{\zeta}=-gt-2\omega\eta\cos\varphi. \tag{7}$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (5'), se obține:

$$\ddot{\eta}=-4\omega^2\eta-2\omega gt\cos\varphi. \tag{8}$$

Cum: $\omega=\frac{2\pi}{86\,184}=7{,}29\cdot10^{-5}\ s^{-1}$, rezultă: $\omega^2=5{,}31\cdot10^{-9}$, deci o valoare mică care poate fi neglijată și astfel ecuația (8) devine, cu aproximație satisfăcătoare:

$$\ddot{\eta}=-2\omega gt\cos\varphi, \tag{8'}$$

de unde rezultă:

$$\dot{\eta}=-\omega gt^2\cos\varphi \text{ și } \eta=-\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\varphi. \tag{9}$$

Ținînd seamă de relația (9), relațiile (7) devin:

$$\dot{\xi}=\frac{2}{3}\omega^2 gt^3\sin\varphi\cos\varphi \text{ și } \dot{\zeta}=-gt+\frac{2}{3}\omega^2 gt^3\cos^2\varphi, \tag{10}$$

Prin integrare și ținînd seamă de condițiile inițiale corespunzătoare punctului material P, la timpul $t=0$, $\xi=0$ și $\zeta=h$, rezultă:

$$\xi=\frac{1}{6}\omega^2 gt^4\sin\varphi\cos\varphi;$$

$$\zeta=h-\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{6}\omega^2 gt^4\cos\varphi. \tag{11}$$

Cum ω^2 este foarte mic, termenii care-l conțin se pot neglija și relațiile (11) devin:

$$\xi=0;\ \zeta=h-\frac{1}{2}gt^2;\ \eta=-\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\varphi, \tag{12}$$

care definesc mișcarea relativă în căderea punctului material. Ultima ecuație dă valoarea deviației punctului material față de verticala poziției inițiale, deviație care se produce spre est. Făcînd în ecuația a doua $\zeta=0$, se obține durata căderii $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ și deci valoarea deviației pe aceeași paralelă este:

$$\eta=-\frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\cos\varphi.$$

În cazul exemplului numeric considerat, se obține:

$$\eta=2{,}40\text{ m}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

13.14. Un planor de greutate G este remorcat de un avion, zburînd cu v m/s. La un moment dat, eliminîndu-se firul de ancorare, planorul continuă drumul în linie dreaptă, opunîndu-i-se rezistența aerului și vîntul, proporționale cu pătratul vitezei ($R=Kv^2$). Să se determine spațiul parcurs după t secunde.

Indicație și răspuns. Din ecuația diferențială a mișcării planorului, redus la un punct material cu masa m:

$$m\ddot{x}=-kv^2$$

pentru condițiile inițiale date $t=0$; $x=0$, rezultă după integrare:

$$x=\frac{k}{m}ln\left(1+\frac{k}{m}v_0t\right).$$

13.15. Pe o rampă de descărcare înclinată față de orizontală cu un unghi α se dă drumul unei lăzi fără viteză inițială.

În timpul deplasării i se opune rezistența de frecare de coeficient μ. Să se determine viteza pe care o va avea lada după ce a parcurs o distanță d.

Răspuns: $v=\sqrt{2gx(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}$.

13.16. Un punct cu masa m se deplasează pe o axă fixă atras de o forță proporțională cu distanța la centrul atractiv O ($f=k_1mx$) întîmpinînd o rezistență proporțională cu puterea a treia a distanței la O, ($R=k_2mx^3$) (fig. 13.12). Să se determine viteza punctului material la mijlocul distanței OM_0 și în punctul O, în cazul cînd în poziția inițială M_0, la distanța a de O, punctul material nu are viteză inițială.

Indicație și răspuns. Ecuația diferențială a mișcării punctului material este:

$$m\ddot{x}=k_2mx^3-mk_1x$$

Punctul material se oprește dacă avem:

$$k_1=k_2a^2.$$

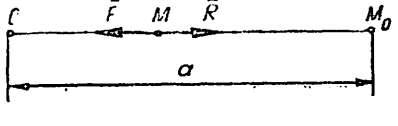
13.17. Să se stabilească legea mișcării unui pendul simplu în cazul micilor oscilații, ținînd seamă de rezistența mediului, proporțională cu viteza pendulului.

Indicație și răspuns. Ecuația diferențială a mișcării pe direcția tangentei de traiectorie este:

$$ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta-R=-mg\sin\theta-2mcl\dot{\theta},$$

unde s-a notat cu c coeficientul de rezistență.

Fig. 13.12.



Pentru mici oscilații, cu notațiile $\sqrt{\frac{g}{l}}=\omega_n$ $\frac{g}{l}-c^2=\omega_1^2$, ecuația diferențială a mișcării devine:

$$\ddot{\theta}+2c\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=0;$$

cu soluția

$$\theta=e^{-ct}\ [C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)].$$

În condițiile inițiale $t=0$; $\theta=\theta_0$; $\dot{\theta}=0$, rezultă

$$C_1=\theta_0;\quad C_2=\frac{c}{\omega_1}\theta_0.$$

Pendulul are o mișcare oscilatorie amortizată.

13.18. Un punct material greu este lansat din O cu viteza $\bar{v}_0$ sub unghiul α (fig. 13.13) și în plus punctul este atras cu o forță proporțională cu vectorul de poziție $\bar{F}=mk^2\bar{r}$. Pentru condițiile inițiale: $t=0$; $\bar{r}=0$; $\bar{v}=\dot{\bar{r}}=\bar{v}_0$ se cere:

1) Să se scrie vectorial și scalar ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului.

2) Să se afle traiectoria punctului. Discuție.

Indicație și răspuns. 1. Ecuația diferențială a mișcării punctului este:

$$m\ddot{\bar{r}}=-mk^2\bar{r}-m\bar{g}. \tag{1}$$

Scalar în coordonate carteziene avem:

$$\ddot{x}+k^2x=0;\quad \ddot{y}+ky=-g, \tag{1'}$$

cu soluțiile generale:

$$x=A\cos kt+B\sin kt;\quad y=-\frac{g}{k^2}+C\cos kt+D\cos kt. \tag{2}$$

Din condițiile inițiale rezultă:

$$A=0;\quad B=\frac{v_0}{k}\cos\alpha;\quad C=\frac{g}{k^2};\quad D=\frac{v_0}{k}\sin\alpha.$$

2. Traiectoria este elipsă:

$$\left(\frac{y-x\operatorname{tg}\alpha}{\frac{g}{k^2}}+1\right)^2+\left(\frac{x}{\frac{v_0\cos\alpha}{k}}\right)^2=1,$$

având ca centru coordonatele $\left(0,-\frac{g}{k^2}\right)$.

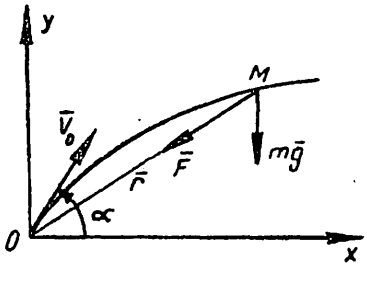


Fig. 13.13.

13.19. Să se determine mișcarea punctului material și traiectoria în următoarele situații și condiții inițiale:

a) $X=0$; $Y=mk$; $t=0$; $y=0$; $\dot{x}=a$; $\dot{y}=b$.

b) $X=mx$; $Y=my$; $t=0$; $x=y=0$; $\dot{x}=a$; $\dot{y}=b$.

c) $X=0$; $Y=my$; $t=0$; $x=0$; $y=a$; $\dot{x}=1$; $\dot{y}=0$.

d) $X=mx$; $Y=my$; $t=0$; $x=0$; $x=a$; $y=0$; $\dot{x}=0$; $\dot{y}=b$.

e) $Y=-2my-2m\dot{y}$; $t=0$; $y=0$; $\dot{y}=0$.

f) $X=-25mx-6m\dot{x}$; $t=0$; $x=a$; $\dot{x}=0$.

g) $X=-2cm\dot{x}-k^2mx$; $t=0$; $x=0$; $\dot{x}=x_0$.

h) $X=-4mx+2m\cos t$; $t=0$; $x=0$; $\dot{x}=0$.

i) $Y=-my-m\sin t$; $t=0$; $y=0$; $\dot{y}=0$.

Răspuns

a) $x=at$; $y=\frac{1}{2}kt^2+bt$ (parabolă).

b) $x=a\cos ht$; $y=b\cos ht$ (hiperbolă).

c) $x=t$; $y=\frac{a}{2}(e^t+e^{-t})$ (lănțișor).

d) $x=\frac{1}{2}at^2$; $y=\frac{1}{2}bt^2+ct$ (parabolă).

e) $y=ae^{-t}\sin t$ (oscilatorie amortizată).

f) $x=\frac{5}{4}ae^{-3t}\cos(4t+\varphi)$; $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}$.

g) $k>c$; $x=\frac{b}{\sqrt{k^2-c^2}}e^{-ct}\sin\sqrt{k^2-c^2}\,t$.

h) $x=\frac{2}{3}(\cos t-\cos 2t)$.

i) $y=\frac{1}{2}(t\cos t-\sin t)$.

Capitolul 14

MOMENTE DE INERȚIE

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. Se numește *moment de inerție polar, axial* sau *planar* al unui sistem material cantitatea scalară pozitivă:

$$J=\sum m_i d_i^2, \tag{a}$$

în care m_i este masa fiecărui element material al sistemului, iar d_i distanța la punctul, axa, sau planul în raport cu care se ia momentul (fig. 14.1).

În acest mod se pot defini momente de inerție *planare*:

$$J_{xoy}=\sum m_i z_i^2;\ J_{yoz}=\sum m_i x_i^2;\ J_{zox}=\sum m_i y_i^2, \tag{b}$$

cînd se referă la un plan;
momente de inerție *axiale*:

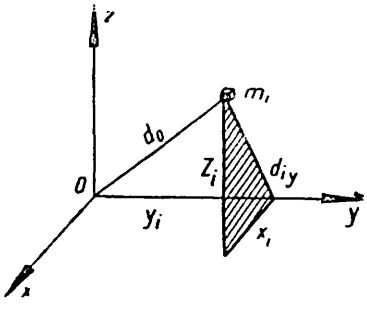
$$J_z=A=\sum m_i (y_i^2+z_i^2);\ J_y=B=\sum m_i (z_i^2+x_i^2);\ J_z=C=\sum m_i (x_i^2+y_i^2), \tag{c}$$

față de o axă,
și momente de inerție *polare*:

$$J_0=\sum m_i (x_i^2+y_i^2+z_i^2), \tag{d}$$

cînd acestea se referă la un punct O.

Fig. 14.1.



Sumele de forma:

$$J_{yz}=D=\sum m_i y_i z_i;\ J_{zx}=E=\sum m_i z_i x_i;$$
$$J_{xy}=F=\sum m_i x_i y_i, \tag{e}$$

extinse la toate punctele sistemului, sume care pot fi *pozitive, negative* sau *nule*, se numesc *momente de inerție centrifuge* sau *produse de inerție.*

2. **Pentru mediile continui** sumele de mai sus devin integrale definite, corespunzător domeniului ocupat de corpul respectiv, avînd forma:

$$J_{x0y}=\int_D z^2 dm\,;\quad J_x=\int_D (y^2+z^2)\,dm\,;\quad J_0=\int_D (x^2+y^2+z^2)\,dm\,;\quad J_{xy}=\int_D xy\,dm. \qquad (f)$$

Elementul de masă dm are valorile:

$$dm=\rho_v \cdot dV\,;\quad dm=\rho_A \cdot dA\,;\quad dm=\rho_l \cdot dl\,; \qquad (6)$$

unde ρ_v, ρ_A, ρ_l sînt respectiv masele unității de volum, arie sau lungime.

Pentru corpurile omogene integralele date de relația (*f*) se pot scrie sub forma:

$$J_v=\rho_v \int_D d_i^2 \cdot dv=\rho_v I\,;\quad J_A=\rho_A \cdot I_A\,;\quad J_l=\rho_l \cdot I_l. \qquad (h)$$

Integralele I_v, I_A, I_l se numesc *momente de inerție geometrice.* Dimensiunile momentelor de inerție sînt înscrise în tabela 14.1.

Tabela 14.1

Dimensiuni ale momentelor de inerție

Momentul de inerție		Ecuația de dimensiuni	Unitatea de măsură
mecanic		ML^2	$Kg \cdot m^2$
geometric	volume I_v	L^5	m^5
	arii I_A	L^4	m^4
	linii I_d	L^3	m^3

Între diferitele categorii de momente de inerție există o serie de relații utile precum:

$$J_0=J_{x0y}+J_{y0z}+J_{z0x}=\frac{1}{2}(J_x+J_y+J_z)\,;\quad J_{0x}=J_{y0x}+J_{z0x}. \qquad (i)$$

Momentul de inerție centrifug este egal cu semidiferența momentelor de inerție față de planele bisectoare respective, adică:

$$J_{xy}=\frac{1}{2}(J_{\pi_1}-J_{\pi_2}).$$

Raza de inerție (girație) i exprimată prin relațiile:

$$i=\sqrt{\frac{J}{M}}\,;\quad i_v=\sqrt{\frac{I}{V}}\,;\quad i_A=\sqrt{\frac{I}{A}}\,;\quad i_l=\sqrt{\frac{I}{l}}\,; \qquad (j)$$

reprezintă distanța la care ar trebui plasată masa M a întregului sistem, astfel ca momentul de inerție al acestui punct material să fie egal cu momentul de inerție al sistemului.

3. **Variaţia momentelor de inerţie** al corpurilor cu translaţia axelor (fig. 14.2) este dată de teorema lui Steiner:

$$J_{\Delta_1}=J_{\Delta_G}+Md^2;\quad J_{x,y}=J_{\xi\eta}+Mab:\quad J_{\pi_2}=J_{\pi_1}+Md^2 \qquad (k)$$

unde d este distanţa dintre axe, sau planurile π_1 π_2.

Momentele de inerţie în raport cu axe trecînd prin centrul de greutate sînt minime. Între momentele de inerţie faţă de două axe paralele oarecare există relaţia:

$$J_{\Delta_2}=J_{\Delta_1}+M(d_2^2-d_1^2). \qquad (l)$$

4. **Variaţia momentelor de inerţie** în raport cu axe concurente.

Notînd cu τ,

$$\tau=\begin{Vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{Vmatrix}, \qquad (m)$$

tensorul momentelor de inerţie faţă de sistemul de axe triortogonal *xoyz*, cu $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ cosinuşii directori ai axei oarecare (Δ), momentul de inerţie faţă de această axă se exprimă prin relaţia:

$$J_\Delta=J_x\cos^2\alpha+J_y\cos^2\beta+J_z\cos^2\gamma-2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta-$$
$$-2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \qquad (n)$$

Elipsoidul de inerţie în raport cu un punct O este locul geometric al extremităţii Q al vectorului $\overline{OQ}$ de modul $\left(\frac{k}{\sqrt{J_\Delta}}\right)$, unde k este o constantă arbitrară (fig. 14.3). Dacă punctul O coincide cu centrul de masă, elipsoidul se numeşte *elipsoid central de inerţie,* iar axele lui, care au valori extreme sînt axele centrale de inerţie. Pentru aceste axe momentele de inerţie centrifugale sînt nule, iar momentele de inerţie sînt date de ecuaţia în J:

$$\begin{vmatrix} J_x-J & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yz} & J_y-J & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z-J \end{vmatrix}=0. \qquad (p)$$

Fig. 14.2.

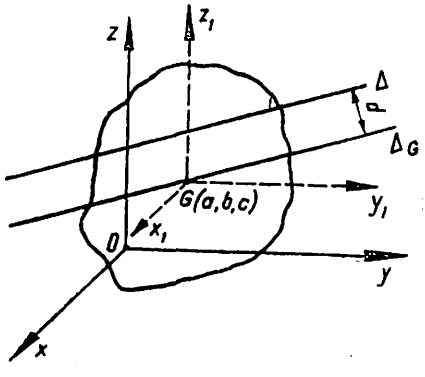
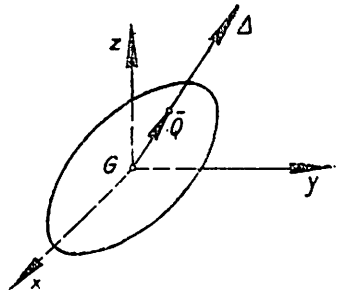


Fig. 14.3.



În plan se întîlnesc momente de inerție geometrice:

$$I_x=\int_A y^2\mathrm{d}A\,;\quad I_y=\int_A x^2\mathrm{d}A\,;\quad I_0=\int_A (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A=I_x+I_y;\quad I_{xy}=\int_A xy\,\mathrm{d}A. \qquad (q)$$

Teorema lui Steiner se aplică și în acest caz. Tensorul de inerție fiind:

$$\tau=\begin{Bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{Bmatrix}, \qquad (r)$$

valorile extreme I_1, I_2 ale momentelor de inerție axiale au valorile:

$$I_{1,2}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(I_x-I_y)^2+4I_{xy}^2}, \qquad (s)$$

care sînt rădăcinile ecuației în I:

$$\begin{vmatrix} I_x-I & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y-I \end{vmatrix}=0. \qquad (t)$$

Unghiurile α_1 și α_2 pentru care direcțiile devin maxime sînt soluții ale ecuației:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}. \qquad (u)$$

Pentru trasarea elipsei centrale de inerție se determină direcțiile axelor centrale de inerție, I_1 și I_2, și apoi razele de inerție principale:

$$i_1=\sqrt{\frac{I_1}{A}};\quad i_2=\sqrt{\frac{I_2}{A}}.$$

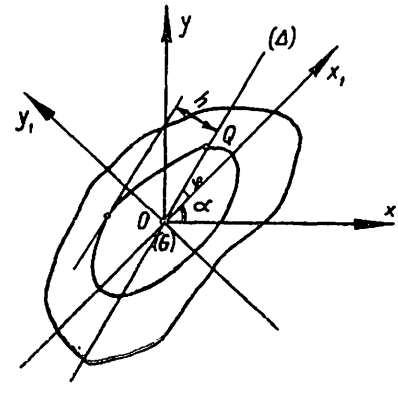
Pe direcțiile principale, care sînt perpendiculare, se duc semiaxele elipsei, definite de razele principale de inerție, avînd grijă să se ia i_2 pe axa principală Ox_1 și i_1 pe axa principală Oy_1 (fig. 14.4).

Cînd punctul O coincide cu centrul de greutate G al secțiunii, elipsa devine elipsă centrală de inerție, avînd ecuația:

$$\frac{x^2}{i_2^2}+\frac{y^2}{i_1^2}=1.$$

Pentru ușurința rezolvării problemelor în anexa 4 sînt date momentele de inerție uzuale ale diferitelor corpuri.

Fig. 14.4.



B. PROBLEME REZOLVATE

14.1. Să se determine momentul de inerție polar al unui volant, cunoscînd razele R și r, iar lățimea roții fiind l (fig. 14.5).

Rezolvare. Momentul de inerție polar este dat de relația

$$J_0=\int \rho^2 \cdot dm, \tag{1}$$

în care $dm=\frac{\gamma}{g}dV=\frac{\gamma}{g}l\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\alpha$, care, introdusă în relația (1) și fixîndu-se limitele integralei, se obține:

$$J_0=\frac{\gamma}{g}l\cdot\int_r^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha=\frac{\gamma}{g}l\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4-r^4}{4}.$$

Însă

$$\frac{\gamma}{g}l\cdot\pi\cdot(R^2-r^2)=M,$$

astfel încît:

$$J_0=M\,\frac{R^2+r^2}{2}\cdot \tag{2}$$

În cazul roților cu bandajul foarte subțire, rezultă:

$$J_0=MR^2. \tag{3}$$

14.2. Să se arate că momentul de inerție al unui corp de rotație omogen, a cărei curbă generatoare este definită de ecuația $y=f(z)$ (fig. 14.6) față de axa de rotație Oz, este dată de relația:

$$J_z=\frac{1}{2}\pi\rho\int_{z_1}^{z_2} y^4 dz,$$

iar față de o axă normală la axa de rotație, de relația:

$$J_x=J_y=\frac{1}{2}J_z+\pi\rho\int_{z_1}^{z_2} z^2y^2dz.$$

Fig. 14.5.

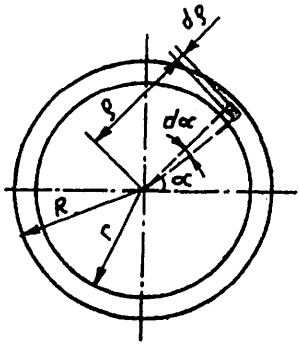
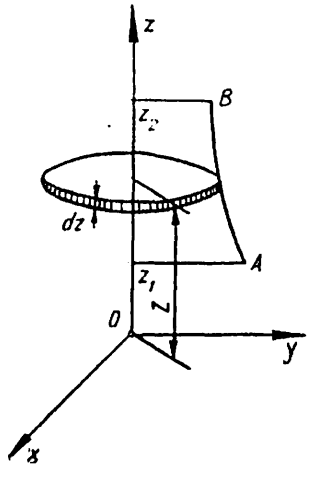


Fig. 14.6.



Rezolvare. Notînd cu dV volumul elementar, momentul de inerție al acestui solid omogen, generat de aria $AB\ z_1z_2$, se poate scrie succesiv:

$$J_x=\rho\iiint_V (x^2+y^2)\,dV=$$

$$=\rho\int_a^b dz\cdot\iint_D (x^2+y^2)\,dA,$$

unde D este domeniul obținut prin intersecția corpului de rotație cu planul z, presupus pentru un moment constant.

Deoarece $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dA = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \cdot \int\limits_0^{f(z)} r^2 \cdot r\,dr = \frac{\pi}{2}[f(z)]^4$, rezultă relația cerută.

Pentru calculul momentului de inerție față de axa perpendiculară pe axa de rotație, se consideră discul elementar de înălțime dz, rază y, (fig. 14.7) și masă $dm=\pi y^2\rho dz$, de momente de inerție elementare:

$$dJ_z=\frac{y^2dm}{2};\quad dJ_y=\frac{y^2dm}{4}.$$

Ca urmare, aplicînd teorema lui Steiner,

$$J_y=\int_V (dJ_y+z^2dm)=\pi\rho\cdot\int_V\left(\frac{y^2}{4}+z^2\right)y^2dz$$

și ținînd seama de valoarea lui J_z se obține relația cerută.

14.3. Să se calculeze razele de inerție centrale principale ale unei lentile omogene, de grosime $2h$ și diametru $2r$ (fig. 14.8) mărginită de două calote sferice egale, de rază R.

Rezolvare. Una dintre calotele sferice, de înălțime h și raza bazei $r=\sqrt{h(2R-h)}$, are masa elementară:

$$dm=\pi y^2dz=\pi\rho\,(R^2-z^2)\,dz.$$

Momentul de inerție principal al calotei sferice în raport cu axa de rotație este:

$$J_{\Delta_1}=\int_{R-}^{R}\frac{1}{2}y^2dm=\int_{R-h}^{R}\frac{1}{2}\pi\rho\,(R^2-z^2)^2\,dz=\frac{\pi\rho}{60}h\,(h^4+5a^2r^2+10r^4).$$

Față de un diametru al cercului de bază, momentul de inerție J_{Δ_2} este:

$$J_{\Delta_2}=\frac{J_{\Delta_1}}{2}+\int_{R-h}^{R}[z-(R-h)]^2\,dm=\frac{\pi\rho}{120}h\,(7h^4+15h^2r^2+10r^4).$$

Deoarece masa unei calote are valoarea:

$$M=\int_{R-h}^{h}dm=\int_{R-h}^{h}\pi\rho\,(R^2-z^2)\,dz=\pi\rho\frac{h}{6}(h^2+3r^2),$$

rezultă pentru razele de inerție principale i_1 și i_2 valorile:

$$i_1=\sqrt{\frac{h^4+5h^2r^2+10r^4}{10\,(h^2+3r^2)}}$$

și

$$i_2=\sqrt{\frac{7h^4+15h^2r^2+10r^4}{20\,(h^2+3r^2)}}.$$

Fig. 14.7.

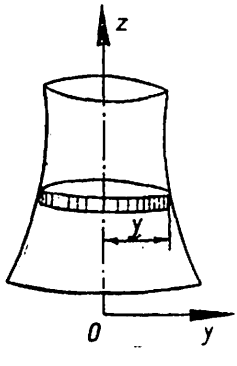
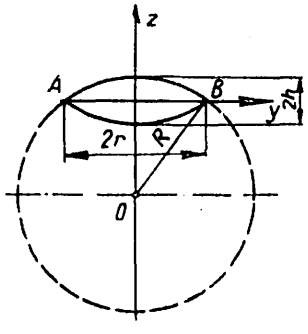


Fig. 14.8.



14.4. Să se calculeze momentele de inerție, în raport cu axele care trec prin centrul de greutate al unui corp omogen de formă cilindrică cu două conuri la capete (fig. 14.9), de masă totală M.

Rezolvare. Momentul de inerție al corpului în raport cu axa Gz este:

$$J_z = M_1 \cdot \frac{r^2}{2} + 2M_2 \cdot \frac{3r^2}{10} = \frac{9}{20} Mr^2.$$

avînd în vedere dimensiunile cilindrului și conurilor

$$M_1 = \frac{3}{4} M \quad \text{și} \quad M_2 = \frac{1}{8} M.$$

Momentul de inerție în raport cu axa qq, care trece prin G, este:

$$J_q = M_1 \frac{3r^2+4a^2}{12} + 2M_2 \frac{3}{20}\left(r^2 + \frac{a^2}{4}\right) + 2M_2\left(a+\frac{a}{4}\right)^2.$$

Ținînd seama de relațiile care există între M_1, M_2 și M, se obține:

$$J_q = \left(\frac{9}{40} r^2 + \frac{13}{20} a^2\right) M.$$

14.5. Să se determine distanța d dintre două profile ⌊20, astfel încît elipsa centrală de inerție să devină un cerc (fig. 14.10).

Rezolvare. Oțelurile profilate ⌊ astfel dispuse admit axele zOy ca axe de simetrie, deci acestea sînt axele principale. Mărimile semiaxelor elipsei centrale de inerție sînt:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad \text{și} \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

Conform enunțului problemei trebuie ca $i_1 = i_2$, ceea ce duce la egalitatea momentelor de inerție:

$$I_z = I_y. \tag{1}$$

După STAS 564-63 pentru ⌊20 avem:

$$I_z = 1910 \text{ cm}^4; \quad I_y = 148 \text{ cm}^4; \quad e = 2{,}01 \text{ cm}; \quad A = 32{,}2 \text{ cm}^2.$$

Fig. 14.9.

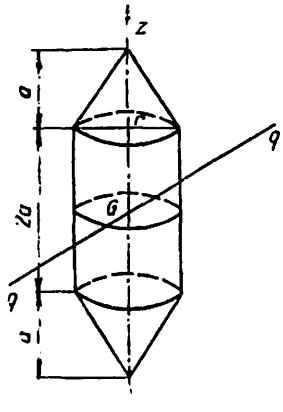
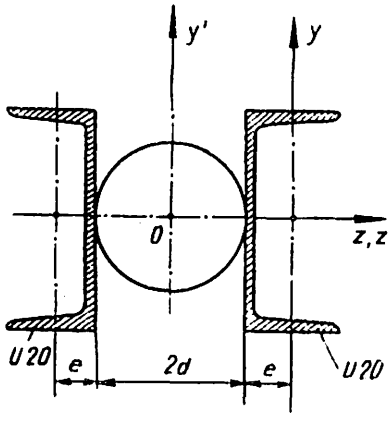


Fig. 14.10.



Pentru întreaga figură rezultă:

$$I_{z'} = 2I_z = 3\,820 \text{ cm}^4;$$

$$I_{y'} = 2I_y + 2(d+e)^2 A =$$

$$= 2 \cdot 148 + 2(d+2{,}01)^2 \cdot 32{,}2.$$

Conform relației (1), se poate scrie:

$$296 + (d+2{,}01)^2 \cdot 64{,}4 = 3\,820,$$

de unde:

$$d=5{,}39 \text{ cm.}$$

Distanța între profile este:

$$2d=2\cdot 5{,}39=10{,}78 \text{ cm.}$$

În acest caz,

$$i_1=i_2=\sqrt{\frac{3\,820}{32{,}2}}=10{,}8 \text{ cm,}$$

elipsa centrală de inerție se reduce la cercul:

$$z^2+y^2=119.$$

14.6. Să se determine ecuația elipsei centrale de inerție în cazul unei plăci avînd forma unui sfert de cerc (fig. 14.11).

Rezolvare. Momentele de inerție principale se pot calcula cu relațiile:

$$I_1=I_z\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha-I_{zy}\sin 2\alpha;$$

$$I_2=I_z\sin^2\alpha+I_y\cos^2\alpha+I_{zy}\sin 2\alpha,$$

în care I_z, I_y, I_{zy} sînt momentele de inerție axiale și centrifugal ale sfertului de cerc în raport cu două axe care trec prin centrul de greutate și sînt paralele la muchii, iar unghiul de rotație α este $\frac{\pi}{4}$.

În cazul sfertului de cerc:

$$I_x=I_y=\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)r^4; \quad I_{xy}=\frac{r^4}{8}-\frac{4r^4}{9\pi}$$

și ca urmare:

$$I_1=I_x-I_{xy}=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{r^4}{8};$$

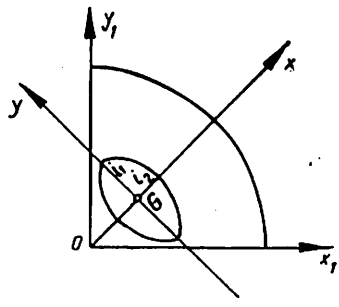
$$I_2=I_x+I_{xy}=\left(\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)r^4,$$

astfel încît mărimile axelor elipsei centrale de inerție vor fi:

$$i_2=\sqrt{\frac{I_2}{A}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)r^4}{\frac{r^2}{4}}}\approx 0{,}22\,r;$$

$$i_1=\sqrt{\frac{I_1}{A}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{r^4}{8}}{\frac{\pi r^2}{4}}}\approx 0{,}3\,r.$$

Fig. 14.11.



Ecuația elipsei centrale se poate scrie:

$$\frac{x^2}{(0{,}22\,r)^2}+\frac{y^2}{(0{,}3\,r)^2}=1.$$

14.7. Să se determine direcția axelor principale și valorile momentelor principale ale secțiunii formate din două profile ⌊ 26 [1]). reprezentate prin figura 14.12. Originea axelor de referință este în O_1.

Rezolvare. a) Determinarea centrului de greutate al secțiunii.

Pentru profilul ⌊ 26 avem:

$$\xi_1=\xi_2=2{,}36 \text{ cm}$$

și

$$A_1=A_2=48{,}3 \text{ cm}^2.$$

Coordonatele centrului de greutate al figurii sînt:

$$\eta=\frac{A_2(\eta_1-\xi_2)}{A_1+A_2}=\frac{48{,}3\,(13-2{,}36)}{2\cdot 48{,}3}=5{,}32 \text{ cm}$$

$$\xi=\frac{A_2(\eta_2+\xi_1)}{A_1+A_2}=\frac{48{,}3\,(2{,}36+13)}{2\cdot 48{,}3}=7{,}68 \text{ cm}.$$

b) Momentul de inerție al întregii secțiuni în raport cu axele care trec prin centrul de greutate al acestora este:

$$I_x=I_{x_1}+\eta^2\cdot A_1+I_{x_2}+(\eta_1-\eta-\xi_2)^2 A_2.$$

Dar: $I_{x_1}=I_{y_2}=4\,820$ cm^4 și $I_{y_1}=I_{x_2}=317$ cm^4. Ca urmare se obține:

$$I_x=4\,820+5{,}32^2\cdot 48{,}3+317+5{,}32^2\cdot 48{,}3=7\,871 \text{ cm}^4;$$

$$I_y=317+7{,}68^2\cdot 48{,}3+4\,820+7{,}68^2\cdot 48{,}3=10\,837 \text{ cm}^4;$$

$$I_{xy}=48{,}3\,(-5{,}32)\,(-7{,}68)+48{,}3\,(+5{,}32)\,(7{,}68)=3\,960 \text{ cm}^4.$$

c) Înclinarea axelor principale este dată de relația:

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}=\frac{2\cdot 3\,960}{10\,837-7\,871}=2{,}67; \quad \alpha=34°44'.$$

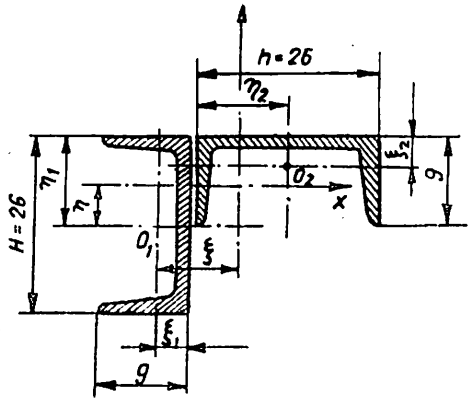
d) Valorile momentelor de inerție principale deduse din relația:

$$I_{1,2}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(I_y-I_x)^2+4I_{xy}^2},$$

sînt

$$I_1=13\,579 \text{ cm}^4; \quad I_2=5\,115 \text{ cm}^4.$$

Fig. 14.12.



14.8. Să se calculeze momentele de inerție axiale, momentul de inerție polar, precum și razele de inerție axiale i_x, i_z și

[1]) STAS 564-64.

polar i_p, al unei plăci de forma unui hexagon regulat, avînd latura a (fig. 14.13).

Rezolvare. a) Considerăm hexagonul împărțit în două trapeze isoscele egale. Momentul de inerție ale trapezelor, în raport cu baza mare, este:

$$I_x = 2I'_x = 2\frac{(B+3b)h^3}{12}. \qquad (1)$$

În cazul de față: $B=2a$; $b=a$; $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, astfel încît relația (1) se poate scrie:

$$I_x = \frac{(2a+3a)\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot a^3}{6\cdot 8} = \frac{5\cdot\sqrt{3}a^4}{16}.$$

b) Momentul de inerție, în raport cu axa Oy, se determină considerînd hexagonul împărțit într-un dreptunghi central și două triunghiuri isoscele la capete. Luînd momentele de inerție ale acestor figuri în raport cu centrele lor de greutate, rezultă:

$$I_y = I'_y + 2I''_y = \frac{a^4\sqrt{3}}{12} + 2\cdot\left[\frac{a^4\sqrt{3}}{8\cdot 36} + \left(\frac{a}{6}+\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right].$$

Efectuînd calculele se obține:

$$I_y = \frac{5\sqrt{3}a^4}{16}.$$

Deci, în cazul unui hexagon regulat cele două momente de inerție axiale sînt egale între ele.

c) Momentul de inerție polar este:

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{5\sqrt{3}a^4}{8}.$$

d) $$i_x = i_y = \sqrt{\frac{5}{12}}a;\quad i_p = \sqrt{\frac{5}{6}}a.$$

14.9. Să se determine momentul de inerție centrifugal al unui oțel cornier în raport cu axele $x'Oy'$ și cu axele care trec prin centrul de greutate paralele cu muchiile cornierului (fig. 14.14).

Fig. 14.13.

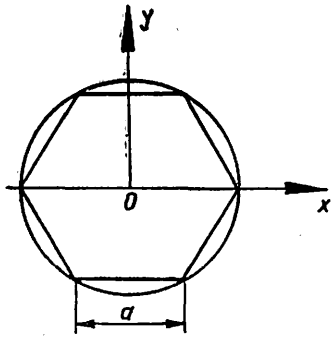
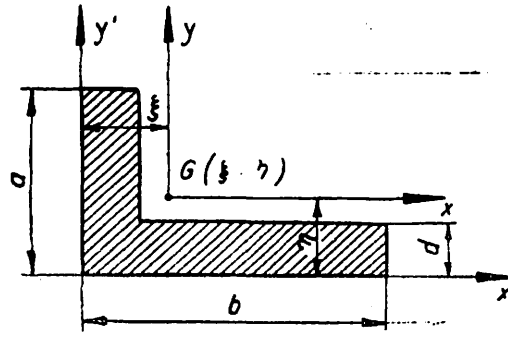


Fig. 14.14.



Rezolvare. a) Considerînd cornierul format din două dreptunghiuri, momentul de inerţie centrifugal este:

$$I_{x'y'}=\int_0^b\int_0^d xy\cdot dx\cdot dy+\int_0^d\int_d^a xy\cdot dx\cdot dy=\int_0^b x\cdot dx\int_0^a y\cdot dy+$$

$$+\int_0^d x\cdot dx\int_d^a y\cdot dx=\frac{b^2\cdot d^2}{4}+\frac{d^2\cdot(a^2-d^2)}{4}.$$

La acelaşi rezultat se ajunge întrebuinţînd relaţia Steiner:

$$I_{x'y'}=I_{xyG_1}+a_1b_1A_1+I_{xyG_2}+a_2b_2A_2,$$

dacă se ţine seamă că, în raport cu două axe paralele cu muchiile dreptunghiului şi care trec prin centrul de greutate, momentele de inerţie centrifugale sînt nule. Rezultă:

$$I_{x'y'}=\left(\frac{b}{2}\right)\cdot\left(\frac{d}{2}\right)bd+\left(\frac{d}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+d}{2}\right)\cdot\frac{d}{2}\cdot(a-d)=\frac{b^2d^2}{4}+\frac{d^2(a^2-d^2)}{4}.$$

b) Momentul de inerţie centrifugal în raport cu axele care trec prin centrul de greutate al profilului este:

$$I_{xy}=\left(-\eta+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{b}{2}-\xi\right)bd+\left(-\xi+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{a+d}{2}-\eta\right)\cdot(a-d)\cdot d.$$

14.10. Să se determine momentul de inerţie centrifugal al unei plăci dreptunghiulare în raport cu două axe care coincid cu marginile sale (fig. 14.15).

Să se verifice că momentul de inerţie centrifugal în raport cu două axe care trec prin centrul de greutate, paralele cu laturile sale, este egal cu zero.

Rezolvare. a) Avem succesiv:

$$I_{xy}=\int_A x\cdot y\cdot dA=\int_0^h\int_0^b x\cdot y\cdot dx\cdot dy=\int_0^h y\cdot dy\int_0^b x dx=\frac{1}{2}b^2\cdot\int_0^h y dy=\frac{b^2\cdot h^2}{4};$$

b) După teorema lui Steiner rezultă:

$$I_{xy}=I_{x'y'}-\frac{b}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot A=\frac{b^2h^2}{4}-\frac{b}{2}\cdot\frac{h}{2}bh=0.$$

Fig. 14.15.

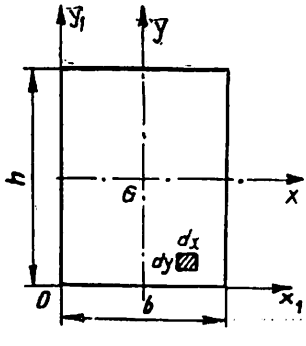
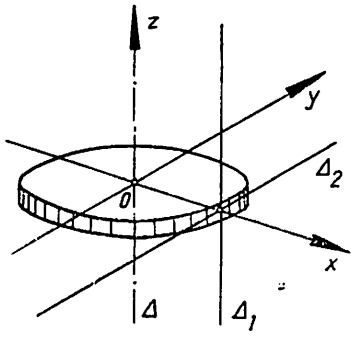


Fig. 14.16.



C. PROBLEME NEREZOLVATE

14.11. Să se determine momentul de inerţie al unui disc circular (fig. 14.16) faţă de axa Δ_1 tangentă la disc şi per-

pendiculară pe planul discului și o alta Δ_2 tangentă la disc, aflată însă în planul discului.

Indicație și răspuns. Pornind de la momentul de inerție polar $J_\Delta = J_z = \frac{MR^2}{2}$, aplicînd teorema lui Steiner și ținînd seamă de relațiile existente între momentele de inerție, se obține:

$$J_y = J_x = \frac{1}{2} J_\Delta; \quad J_{\Delta_1} = \frac{3}{2} MR^2; \quad J_{\Delta_2} = \frac{5}{4} MR^2.$$

14.12. Să se determine momentul de inerție al unei bare omogene AB, de greutate specifică γ și secțiune constantă A, în raport cu axa Δ, care face cu bara unghiul α. Distanțele de la capetele A și B ale barei la axă sînt a, b (fig. 14.17).

Indicație și răspuns. Avem succesiv:

$$J_\Delta = \int_a^b x^2 dm = \int_a^b x^2 \cdot \left(\frac{\gamma}{g} A \frac{dx}{\sin \alpha} \right) = \frac{\gamma}{3g} \cdot \frac{A}{\sin \alpha} (a^3 - b^3).$$

14.13. Să se calculeze raza de inerție i a unui corp omogen format dintr-un con de înălțime h și raza bazei r și o semisferă exterioară conului în raport cu axa de rotație (fig. 14.18).

Indicație și răspuns. Folosind anexa 4 se obține:

$$i^2 = \frac{r^2}{10} \cdot \frac{3h + 8R}{h + 2R}.$$

14.14. Să se determine momentul de inerție centrifugal al ariei unei plăci, de forma unui sfert de cerc, în raport cu muchiile sale (fig. 14.19).

Răspuns:

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA = \int_0^r x \, dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} y \, dy = \frac{1}{2} \cdot \int_0^r x \cdot (r^2 - x^2) \cdot dx = \frac{r^2}{8}.$$

14.15. Să se reprezinte elipsa centrală de inerție a unui profil I 30.

Indicație și răspuns. Axele de simetrie sînt direcții principale de inerție. După STAS 563-63 avem:

$$I_1 = 9\,800 \text{ cm}^4; \quad I_2 = 451 \text{ cm}^4; \quad A = 69{,}1 \text{ cm}^2.$$

Semiaxele elipsei centrale de inerție sînt razele de inerție:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = 2{,}56 \text{ cm}$$

și

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = 11{,}9 \text{ cm},$$

Fig. 14.17.

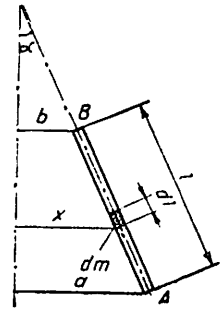


Fig. 14.18.

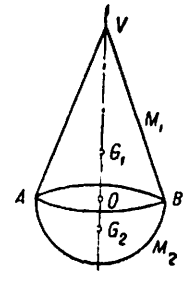
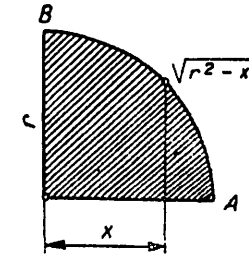


Fig. 14.19.



iar elipsa de inerţie, de ecuaţie $\frac{x^2}{2{,}56^2}+\frac{y^2}{11{,}9^2}=1$, este reprezentată în figura 14.20.

14.16. Să se calculeze raza de inerţie, în raport cu un diametru al bazei, al unei coloane cilindrice, avînd înălţimea h şi raza r.

Răspuns:

$$J=M\frac{3r^2+h^2}{12}+M\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{M}{12}(3r^2+4h^2).$$

14.17. Să se calculeze momentul de inerţie polar al unor secţiuni circulare şi eliptice.

Indicaţie şi răspuns. În cazul elipsei:

$$I_x=\frac{\pi ab^3}{4} \quad \text{şi} \quad I_y=\frac{\pi a^3 b}{4},$$

$$I_0=I_x+I_y=\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2).$$

Pentru cerc $a=b=r$.

14.18. Să se determine momentele de inerţie ale unui oţel profil T, cu braţe simetrice, în raport cu două axe care trec prin centrul de greutate (fig. 14.21).

Indicaţie şi răspuns. Momentul de inerţie al secţiunii în raport cu axa xx ce trece prin centrul de greutate G se poate calcula luînd întîi momentul de inerţie în raport cu axa comună a fiecărei figuri componente şi anume:

$$I_{x''}=\frac{bd^3}{3}+\frac{d(h-d)^3}{3},$$

apoi, făcînd o translaţie pentru a deplasa axele în centrul de greutate al întregii figuri:

$$I_x=\frac{bd^3}{3}+\frac{d(h-d)^3}{3}-(\eta-d)^2\cdot A,$$

unde η are valoarea:

$$\eta=\frac{b\cdot d\cdot\frac{d}{2}+(h-d)\cdot d\left(h-\frac{h-d}{2}\right)}{b\cdot d+(h-d)\cdot d}.$$

Faţă de axa de simetrie Oy momentul de inerţie se scrie imediat.

Fig. 14.20.

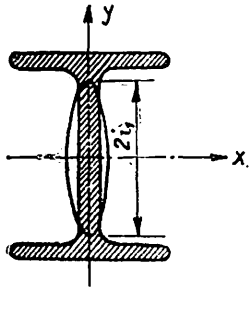
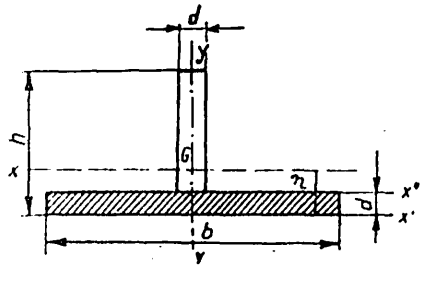


Fig. 14.21.



14.19. Să se calculeze momentul de inerţie centrifugal al unui semicerc, în raport cu diametrul de bază şi altul perpendicular pe el, şi să se explice rezultatul (fig. 14.22).

Indicaţie şi răspuns.

$$I_{xy}=\int_{-r}^{+r} x\,dx\int_{0}^{y} y\,dy=\int_{-r}^{+r} x\cdot dx\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} y\cdot dy=0$$

Axa *Oy* fiind axă de simetrie, momentul de inerţie centrifugal este nul.

14.20. Să se determine momentul de inerţie mecanic al unei plăci în raport cu axa *AB* (fig. 14.23).

Răspuns:

$$J_{\Delta}=M\frac{b^2}{3}-\frac{m}{4}(b^2+r^2)$$

unde

$$M=\frac{\gamma}{g}lhb;\quad m=\frac{\gamma}{g}l\pi r^2.$$

Fig. 14.22.

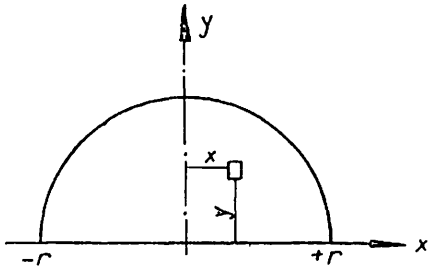
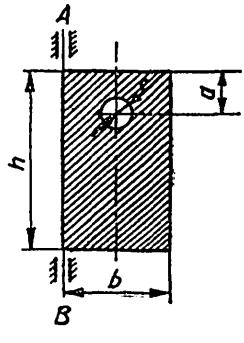


Fig. 14.23.



Capitolul 15

DINAMICA SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE. TEOREME GENERALE ALE DINAMICII

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. Dîndu-se sistemul de puncte materiale A_i $(i=1 \ldots n)$ de mase m_i, de poziții $\bar{r}_{i0}$ la un moment dat (moment inițial) și viteze $\bar{v}_{i0}$ în acel moment, cunoscînd forțele exterioare $\bar{F}_i$ și interioare $\bar{F}_{ij}$ (care sînt funcții de timp, viteză și poziție), mișcarea fiecărui punct A_i este determinată de ecuațiile diferențiale:

$$m_i\ddot{\bar{r}}_i=\bar{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_{ij} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{a}$$

Soluțiile sistemului de ecuații diferențiale (*a*) au forma:

$$\bar{r}=\bar{r}_i(t, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{2n}), \tag{b}$$

unde cele $2n$ constante vectoriale de integrare, independente între ele, se determină din condițiile inițiale:

$$\bar{r}_{i0}=\bar{r}_{i0}(0, \bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_{2n}); \quad \dot{\bar{r}}_{i0}=\dot{\bar{r}}_{i0}(0, C_1, \ldots, C_{2n}). \tag{c}$$

2. **Teorema torsorului.** Derivata în raport cu timpul a torsorului impulsurilor unui sistem de puncte materiale este egală cu torsorul $\tau(\bar{F}_i)$ al forțelor exterioare aplicate sistemului:

$$\dot{\tau}(\bar{H}_i)=\tau(\bar{F}_i), \tag{d}$$

unde:

$$\bar{H}=\sum_{i=1}^{n}\bar{H}_i=\sum_{i}^{n}m_i\bar{v}_i, \tag{e}$$

este impulsul total al tuturor forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului, iar

$$\bar{K}_0=\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i\bar{H}_i=\sum_{i}^{n}\bar{r}_i\times m_i\bar{v}_i, \tag{f}$$

este momentul cinetic total al sistemului de puncte materiale în raport cu originea sistemului de axe.

3. **Teoreme generale.** Există trei teoreme generale: *teorema impulsului, teorema momentului cinetic* și *teorema energiei cinetice*, foarte utile în aplicații, deoarece permit cu ușurință determinarea unor integrale prime ale ecuațiilor diferențiale ale sistemului de puncte materiale.

4. **Teorema impulsului** :

$$\dot{\bar{H}}=\bar{R}, \tag{g}$$

este o consecință a teoremei torsorului. Derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de puncte materiale este egală cu rezultanta forțelor exterioare aplicate sistemului de puncte. Această teoremă mai poate avea o altă formă dacă se ține seamă de vectorul de poziție r_c al centrului de masă al sistemului:

$$M\ddot{\bar{r}}_c=\bar{R}, \tag{g'}$$

Centrul maselor unui sistem de puncte materiale se mișcă întotdeauna ca și cum ar fi un punct material a cărui masă este egală cu masa totală a sistemului, asupra căruia ar acționa rezultanta tuturor forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului.

5. **Teorema momentului cinetic.** A doua componentă a teoremei torsorului ne conduce la teorema momentului cinetic:

$$\dot{\bar{K}}_0=\bar{M}_0, \tag{h}$$

unde $\bar{M}_0$ este vectorul moment rezultant al forțelor exterioare față de originea axelor.

6. **Observații privitoare la aplicarea teoremei impulsului și momentului cinetic:**

a) Ambele teoreme:
— au un caracter vectorial;
— în aplicații, prezintă avantajul de a elimina forțele interioare.

b) Teorema mișcării centrului maselor este identică cu teorema impulsului, deci nu sînt teoreme independente; se aplică după caz, fie o formă fie alta.

c) Teorema momentului cinetic se aplică numai față de un punct fix sau față de centrul de inerție (centrul maselor). Aplicarea față de alte puncte trebuie făcută cu atenție, deoarece se introduc termeni suplimentari.

d) Dat fiind caracterul vectorial al teoremei impulsului și a momentului cinetic, acestea pot fi proiectate pe o direcție fixă, pe un plan fix, sau pe axele de coordonate:

$$\dot{H}_x=X;\quad \dot{H}_y=Y;\quad \dot{H}_z=Z; \tag{g''}$$

$$\frac{d}{dt}[y(m\dot{z})-z(m\dot{y})]=yZ-zY=\sum M_{ox}\bar{F}_i;$$

$$\frac{d}{dt}[z(m\dot{x})-x(m\dot{z})]=zX-xZ=\sum M_{oy}\bar{F}_i; \tag{h'}$$

$$\frac{d}{dt}[x(m\dot{y})-y(m\dot{x})]=xY-yX=\sum M_{oz}\bar{F}_i.$$

7. **Teorema energiei cinetice.** Între variaţia energiei cinetice $dE=d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ şi lucrul mecanic elementar $dL=\bar{F}\cdot d\bar{r}$ există relaţia:

$$dE=dL. \qquad (i)$$

Variaţia energiei cinetice în intervalul de timp dt este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat în acelaşi interval de timp de către rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului material studiat.

Sub formă finită, între două poziţii (1), (2), teorema energiei se exprimă astfel:

$$E_2-E_1=L_{1-2}. \qquad (i')$$

Variaţia energiei cinetice între poziţiile (2) şi (1) este egală cu lucrul mecanic efectuat în acelaşi timp între poziţiile (1) şi (2).

Teorema energiei se aplică punctului material, sistemelor de puncte materiale, precum şi rigidului, atît sub formă diferenţială cît şi sub forma finită.

Pentru un sistem de puncte materiale energia cinetică este:

$$E=\sum\frac{1}{2}m_cv_c^2,$$

iar lucrul mecanic elementar se referă atît la forţele exterioare cît şi la cele interioare:

$$d\mathfrak{L}=d\mathfrak{L}_{ext}+d\mathfrak{L}_{int}. \qquad (j)$$

În cazul rigidului $d\mathfrak{L}_{int}=0$ şi ca urmare

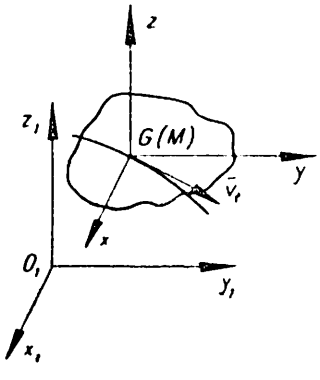
$$d\mathfrak{L}=d\mathfrak{L}_{ext}. \qquad (j')$$

Pentru rigid lucrul mecanic al forţelor exterioare are expresia:

$$d\mathfrak{L}_{ext}=\bar{\mathfrak{R}}\cdot d\bar{r}_0+\bar{M}_0\cdot d\bar{\theta}. \qquad (k)$$

unde $d\bar{r}_0=\bar{v}dt$ este deplasarea elementeră, $d\bar{\theta}=\bar{\omega}dt$ unghiul elementar de rotaţie considerat ca vector, iar $\bar{\mathfrak{R}}$ şi $\bar{M}_0$ componentele torsorului forţelor exterioare ce acţionează asupra rigidului.

Fig. 15.1.



8. **Energia cinetică în mişcarea relativă faţă de centrul de greutate. Teorema lui König.** Se consideră un sistem de puncte materiale, sau un corp de masă totală M, al cărui centru de greutate G se mişcă cu viteza de transport v_t, în raport cu un sistem de axe $Oxyz$ (fig. 15.1). Dacă corpul are şi o mişcare în jurul centrului său de greutate, notînd cu E_r energia cinetică în mişcarea relativă şi cu E_a energia cinetică în mişcarea absolută, aceasta din urmă este egală cu:

$$E_a=E_r+\frac{1}{2}Mv_t^2. \qquad (l)$$

Deci, energia cinetică în mişcarea absolută a *unui corp* oarecare care are *o mişcare relativă este egală cu energia cinetică corespunzătoare mişcării centrului de greutate al corpului*, la care *se adaugă energia cinetică în mişcarea corpului în jurul centrului de greutate.*

În cazul particular al unei mişcări plane a corpului solid, mişcarea se poate considera ca fiind o rotaţie în jurul unei axe perpendiculare pe planul mişcării şi care trece prin centrul instantaneu de rotaţie:

$$E_c = \frac{1}{2} J_I \omega^2, \tag{m}$$

în care J_I este momentul de inerţie al corpului în raport cu axa instantanee de rotaţie, iar ω viteza unghiulară de rotaţie în jurul aceleiaşi axe.

În cazul mişcării elicoidale, energia cinetică este:

$$W_c = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2, \tag{n}$$

în care v este viteza de translaţie în lungul axei, J momentul de inerţie în raport cu axa de rotaţie, iar ω viteza unghiulară de rotaţie.

Dacă în timpul mişcării axa de rotaţie îşi schimbă orientarea, viteza unghiulară ω fiind dată în acest caz prin componentele sale ω_1, ω_2, ω_3 în raport cu cele trei axe principale de inerţie ale corpului, atunci expresia energiei cinetice devine:

$$W = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2), \tag{p}$$

în care J_1, J_2, şi J_3 sînt momentele de inerţie în raport cu axele principale ale corpului.

9. **Observaţii privitoare la aplicarea teoremei energiei.** Teorema energiei are un caracter scalar şi păstrează aceeaşi formă şi în mişcarea relativă a unui sistem de puncte materiale (rigid) faţă de centrul său de masă ca şi în mişcarea faţă de un triedru fix. Spre deosebire de teorema impulsului şi a momentului cinetic, în mişcarea unui sistem de puncte materiale oarecare trebuie ţinut seamă şi de forţele interioare.

10. **Legi de conservare.** *a) Conservarea impulsului.* Dacă sistemul de puncte materiale este izolat $\bar{\mathcal{R}}=0$, din teorema impulsului rezultă $\dot{\bar{H}}=0$ sau:

$$\bar{H} = \sum_0^n m\bar{v}_i = \bar{C}, \tag{q}$$

deci în tot timpul mişcării impulsul rămîne acelaşi.

b) Conservarea momentului cinetic. Pentru un sistem izolat, sau în situaţia în care $\bar{M}_0=0$, avem

$$\dot{\bar{K}}_0 = 0, \text{ adică } \bar{K}_0 = \bar{C}, \tag{r}$$

Ca urmare momentul cinetic se conservă.

Dat fiind caracterul vectorial al relației de conservare a impulsului și a momentului cinetic, acestea pot fi aplicate și în raport cu unele axe fixe.

c) Conservarea energiei mecanice. Dacă lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare care lucrează asupra unui sistem conservativ (sistem pentru care forțele interioare derivă dintr-o funcție de forță U, pentru care $dL_{int}=dU$) este nul într-un interval de timp dat, atunci energia mecanică a sistemului este constantă în acel interval de timp:

$$E_c+E_p=E_c-U=C. \qquad (s)$$

S-a notat cu E_c energia cinetică și cu E_p energia potențială.

B. PROBLEME REZOLVATE

15.1. Un corp alunecă pe o pantă înclinată, cu un unghi α față de orizontală, de la o înălțime h (fig. 15.2). Coeficientul de frecare dintre corp și plan fiind μ, să se determine viteza v_B a corpului în B și distanța ce o mai parcurge corpul pe planul orizontal pînă se oprește. Aplicație: $\alpha=30°$; $h=2$ m; $\mu=0{,}02$.

Rezolvare. Aplicînd teorema energiei între punctele A și B, ținînd seamă că $v_A=0$, iar lucrul mecanic este suma lucrului mecanic activ dat de greutatea corpului și lucrul mecanic rezistent dat de forța de frecare avem:

$$L_{A-B}=G\cdot h-\mu G\cos\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha}=Gh\left(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha\right),$$

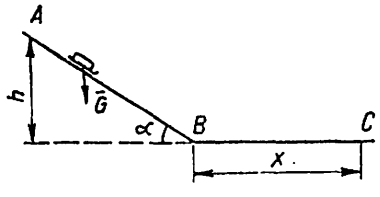
și ca urmare:

$$\frac{1}{2}mv_B^2=Gh\,(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha).$$

Aplicînd din nou teorema energiei între B și C, știind că $v_C=0$, se obține:

$$x=h\frac{1-\mu\operatorname{ctg}\alpha}{\mu}=96{,}54\ \text{m}.$$

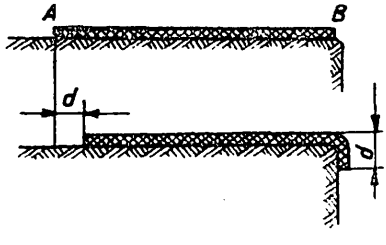
Fig. 15.2.



Observație. La același rezultat se ajunge dacă se aplică direct teorema energiei între punctele A și C, puncte în care vitezele sînt nule.

15.2. Un lanț de lungime $l=2$ m stă pe o masă orizontală, cu capătul B la marginea mesei. Se dă lanțului o deplasare mică $d=0{,}06$ m și se lasă să alunece fără viteză inițială (fig. 15.3). Presupunînd că alunecarea lanțului pe masă se face fără frecare, să se determine viteza unui punct al lanțului în momentul părăsirii mesei și timpul necesar părăsirii mesei.

Fig. 15.3.



Rezolvare. Aplicînd teorema energiei din momentul în care lanţul începe să alunece fără viteză iniţială, avem:

$$\frac{1}{2}\,\frac{pl}{g}\,v^2=p\int_a^l x\,dx.$$

Integrînd şi simplificînd, se obţine:

$$v=\sqrt{\frac{g}{l}\,(l^2-d^2)}\approx 4{,}43\ \text{m/s}.$$

Pentru determinarea timpului, prin derivarea ecuaţiei vitezei la un moment dat:

$$v^2=\frac{g}{l}\,(x^2-d^2),$$

obţinem ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$\ddot{x}=\frac{g}{l}\,x,$$

care are soluţia generală:

$$x=C_1e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}+C_2e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}.$$

Ţinînd seamă de condiţiile iniţiale, pentru $t=0$, $x=d$, $v=0$, ecuaţia spaţiului devine:

$$x=\frac{d}{2}\,(e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}).$$

Punînd $e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}=z$, se obţine, pentru $x=l$, ecuaţia de gradul 2 în z:

$$z^2-2\,\frac{l}{d}\,z+1=0,$$

care admite soluţia reală:

$$z=\frac{l}{d}+\sqrt{\frac{l^2}{d^2}-1}.$$

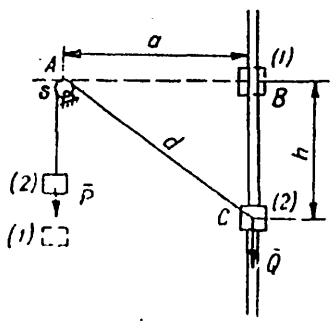
De unde:

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\left[\frac{l}{d}+\sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2-1}\right].$$

Pentru aplicaţia numerică se obţine $v=4{,}43$ m/s şi $t=1{,}89$ s.

15.3. Două greutăţi P şi Q ($P>Q$) sînt legate cu un cablu de lungime constantă, care trece fără frecare peste un scripete S (fig. 15.4). Sistemul fiind în repaus în poziţia (1) şi dînd drumul greutăţii Q, care alunecă tot fără frecare pe o bară verticală, se cere să se afle:

Fig. 15.4.



a) distanța maximă pe care o parcurge greutatea Q;
b) viteza acesteia după depărtarea x de la pornire.

Rezolvare. Aplicînd teorema energiei între pozițiile (1) și (2), cînd vitezele corpului Q sînt nule, rezultă:

$$L_{1-2}=Qh-P(d-a)=0, \tag{1}$$

unde $(d-a)$ este deplasarea sarcinii P.

Înlocuind în (1) valoarea lui d, dedusă din triunghiul ABC, se obține:

$$h=\frac{2PQ}{P^2-Q^2}\cdot a. \tag{2}$$

b) Aplicînd teorema energiei între poziția inițială (1) și o poziție intermediară, definită de poziția x, și ținînd seamă că, în poziția inițială, vitezele greutăților P și Q sînt nule, rezultă:

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_1^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2=Qx-P(d-a), \tag{3}$$

unde v_1 și v_2 sînt respectiv vitezele lui P și Q, între care există legătura:

$$v_1 d=vx, \tag{4}$$

obținută prin diferențierea relației:

$$d^2=a^2+x^2.$$

Din relațiile precedente se obține:

$$v^2=2g(a^2+x^2)\frac{Qx-P(\sqrt{a^2+x^2}-a)}{Px^2+Q(a^2+x^2)}.$$

15.4. Asupra unei roți, al cărei moment de inerție este 21,8 N.m.s² și care se rotește cu 180 rot/min, sabotul frînei exercită o forță $P=240$ N. Coeficientul de frecare între roată și sabot fiind $\mu=0{,}4$, iar raza roții fiind de 0,48 m, să se determine numărul turațiilor pe care le mai efectuează roata pînă la oprire, precum și timpul de oprire.

Rezolvare. Aplicînd teorema energiei, în cazul mișcării de rotație se poate scrie:

$$-M\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2. \tag{1}$$

La sfîrșitul mișcării, roata oprindu-se, $\omega=0$ și relația (1) devine:

$$M\theta=\frac{1}{2}J\omega_0^2, \tag{1'}$$

de unde, înlocuind viteza unghiulară în funcție de turație:

$$\theta=\frac{J\pi^2 n^2}{30^2.2.M}=\frac{J\pi^2 n^2}{30^2.2.P.r}=83{,}6 \text{ rad}, \tag{2}$$

iar numărul rotaţiilor este:

$$N=\frac{\theta}{2\pi}=13{,}3 \text{ rot.}$$

În perioada de frînare, roata avînd o mişcare uniform întîrziată, rezultă:

$$\theta=\frac{1}{2}\omega_0 t.$$

Înlocuind în relaţia (1'), se obţine:

$$t=\frac{J\omega_0}{M}=\frac{J\pi n}{30.\mu Pr}=9 \text{ s.}$$

15.5 Un corp cu greutatea P_1 este ridicat pe un plan, înclinat faţă de orizontală cu un unghi α, cu ajutorul unui motor, cuplul motor fiind M (fig. 15.5). Ştiind că greutatea axului motorului este P_2 şi raza R, iar coeficientul de frecare între plan şi corp este μ, să se determine viteza pe care o va căpăta corpul după parcurgerea unui spaţiu s, socotit de la pornire.

Rezolvare. Aplicînd teorema energiei, se poate scrie:

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2-\left(\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}J\omega_0^2\right)=M\cdot\theta-P_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)S, \qquad (1)$$

în care m este masa corpului, $m=P_1/g$;

J — momentul de inerţie al motorului, $J=\frac{P_2R^2}{2g}$;

v_0 — viteza iniţială a corpului, egală în cazul nostru cu zero;

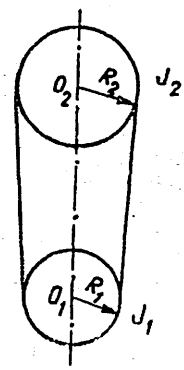
ω_0 — viteza unghiulară iniţială a axului, egală cu zero.

Cum $R\omega=v$, din (1) rezultă:

$$v=2\sqrt{g\frac{M-P_1R(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{(2P_1+P_2)R}\,s}.$$

15.6. Un motor electric pune în mişcare axul O_2 al unei maşini. Transmisia se face cu ajutorul unei curele de transmisie. Momentul de inerţie al pieselor de pe axul motorului este $J_1=12$ N.m.s^2, iar momentul de inerţie al pieselor de pe axul maşinii este $J_2=720$ N.m.s^2. Razele şaibelor sînt respectiv $R_1=5$ cm şi $R_2=12$ cm (fig. 15.6). Să se determine mărimea cuplului ce trebuie aplicat în axul motorului pentru a imprima axului maşinii o turaţie de 180 rot/min, după 4 s de la pornire.

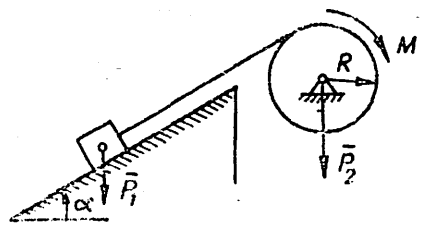
Fig. 15.6.



Rezolvare. Neglijînd frecările în palier, teorema energiei se poate scrie:

$$\frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2\right)=M\theta.$$

Fig. 15.5.



Ţinînd seama de relaţiile:

$$\omega_2=\omega_1\frac{R_1}{R_2}=\omega_1 K \quad \text{şi} \quad \varepsilon_2=\varepsilon_1\cdot K,$$

în care ω_1, ω_2, ε_1, ε_2 sînt respectiv vitezele şi acceleraţiile unghiulare ale axelor, rezultă:

$$\frac{1}{2}(J_1+J_2k^2)\,\omega_1^2=M\theta.$$

Derivînd această expresie în raport cu timpul, se obţine:

$$\frac{1}{2}(J_1+J_2k^2)2\,\omega_1\frac{d\omega_1}{dt}=M\frac{d\theta}{dt}=M\omega_1,$$

de unde:

$$M=(J_1+J_2k^2)\,\varepsilon_1=(J_1+J_2k)\frac{\varepsilon_2}{k}\cdot \tag{1}$$

Cum

$$\varepsilon_2=\frac{\omega_2-\omega_{20}}{t}=\frac{2\pi(n_2-n_{20})}{60t}=\frac{2\pi n_2}{60t},$$

deoarece motorul porneşte din poziţia de repaus, se deduce:

$$\varepsilon_2=4{,}7\ \text{s}^{-2}, \quad \text{şi} \quad M=1\,546\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

15.7. Pentru a ridica o greutate P se întrebuinţează un troliu acţionat de un cuplu M, prin intermediul a două roţi dinţate z_1 şi z_2 ($z_2/z_1=k$) (fig. 15.7). Ştiind că raza troliului este R şi momentele de inerţie ale axului A şi troliului sînt respectiv J_1 şi J_2. Se cere: *a*) Să se determine acceleraţia pe care o va căpăta greutatea P.

b) Să se determine acceleraţia pe care o va căpăta corpul P în cădere, în cazul că se defectează frîna troliului de mai sus, coeficientul de frecare în axul troliului fiind μ.

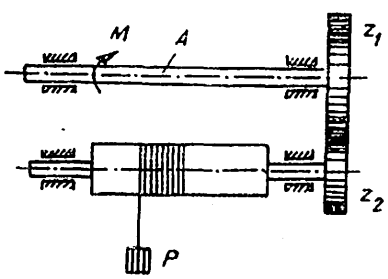
Rezolvare. a) Aplicînd teorema energiei la ansamblul sistemului, se poate scrie:

$$\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2+\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2=M\theta-Px. \tag{1}$$

Dar:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{z_2}{z_1}=k, \quad \text{de unde} \quad \omega_1=k\omega_2;$$

Fig. 15.7.



De asemenea:

$$\omega_2=\frac{v}{R}; \quad \varepsilon_2=\frac{a}{R} \quad \text{şi} \quad \theta=\frac{z_2}{z_1}\frac{x}{R}=\frac{k}{R}x. \tag{2}$$

Înlocuind în ecuaţia (1), se obţine:

$$\frac{1}{2}(J_1k^2+J_2)\frac{v^2}{R^2}+\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2=\frac{Mkx}{R}-Px.$$

Derivînd și scoțînd valoarea accelerației, rezultă:

$$a=\frac{(Mk-PR)\,R}{(J_1k^2+J_2)\,g+PR^2}\,g.$$

b) Fie x deplasarea corpului în jos. Teorema energiei se poate scrie în acest caz:

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2=Px-M_f\theta,$$

în care r este raza axului troliului, iar M_f momentul de frecare în ax.

Derivînd, și ținînd seama de (2) rezultă:

$$a=\frac{P-\frac{M_f}{r}}{P+\frac{J_2}{R^2}g}\,g.$$

15.8 Un cablu cu lungimea $l=4$ m și greutatea 8 N este înfășurat pe un tambur cilindric plin, de rază $r=0{,}3$ m și greutate $P=60$ N (fig. 15.8); neglijînd frecările să se determine:

a) viteza pe care o va atinge cablul după desfășurarea completă;

b) timpul în care se face desfășurarea.

Rezolvare. a) Cablul fiind desfășurat de pe tambur cu o cantitate x, lucrul mecanic efectuat este:

$$L_{1-2}=\int_0^x px\,dx=p\frac{x^2}{2}.$$

în care p este greutatea pe unitatea de lungime de cablu.

Din teorema energiei

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2-\left(\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}J\omega_0^2\right)=p\frac{x^2}{2}, \tag{1}$$

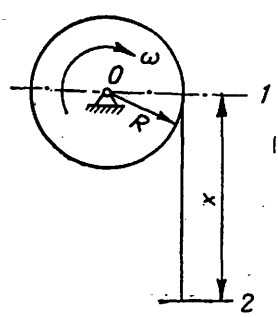
unde s-a notat: $m=\frac{pl}{g}$; $J=\frac{P}{g}\frac{r^2}{2}$; $v_0=\omega_0 r$; $v=\omega r$, se obține:

$$v^2=v_0^2+\frac{p\cdot g}{\frac{P}{2}+p\cdot l}x^2. \tag{2}$$

La desfășurarea completă, cînd $x=l$, se obține:

$$v=3{,}29\ \text{m/s}.$$

Fig. 15.8.



b) Pentru determinarea timpului necesar desfășurării cablului, se pornește de la expresia (2), care se mai poate scrie:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{v_0^2+\frac{p\cdot g}{\frac{P}{2}+p\cdot l}x^2}=\sqrt{v_0^2+Ax^2},\ \text{unde}\ A=\frac{p\cdot g}{\frac{P}{2}+pl}.$$

Separînd variabilele, se obține ecuația:

$$\frac{dx}{\sqrt{v_0^2+Ax^2}}=dt,$$

care, prin integrare, dă:

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{v_0^2}{A}}\right)=A\cdot t+C.$$

Pentru $t=0$, $x=0$ rezultă: $C=\ln\frac{v_0}{\sqrt{A}}$, astfel încît:

$$t=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\frac{x\sqrt{A}+\sqrt{Ax^2+v_0^2}}{v_0}.$$

Cu datele problemei, se obține:

$$p=2\frac{\text{N}}{\text{m}};\quad A=0{,}516\,\text{s}^{-2}\ \text{și}\ t=1{,}88\,\text{s}.$$

15.9. Bila de greutate mg este apăsată pe un arc pe o distanță de x_0 cm, din poziția de repaus A_0 pînă în poziția A. Se cere să se determine constanta elastică k a arcului (fig. 15.9) astfel ca bila lăsată liberă să ajungă în B, poziția cea de mai sus a semicercului de rază r, moment în care bila mai păstrează încă contactul cu acesta. *Aplicație*: $mg=2{,}5$ N; $h=40$ cm; $r=20$ cm; $x_0=8$ cm.

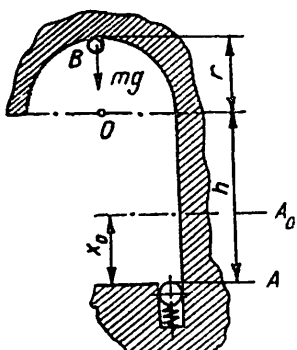
Rezolvare. Aplicînd principiul conservării energiei mecanice în punctele A și B avem:

$$E_{C,A}+E_{P,A}=E_{C,B}+E_{P,B}=E_T. \tag{1}$$

În poziția A energia cinetică este nulă, iar energia potențială maximă este $E_{P,A}=\frac{1}{2}kx_0^2$. În poziția B energia potențială este $mg(h+r)$, iar energia cinetică $E_{C,B}=\frac{1}{2}mv_B^2$. Admițînd că în B reacțiunea semicercului asupra bilei este nulă, avem $mg=m\frac{v_B^2}{r}$ și ca urmare $v_B^2=r\cdot g$. Înlocuind valorile precedente în (1) obținem:

$$k=\frac{mg}{x_0^2}(2h+3r).$$

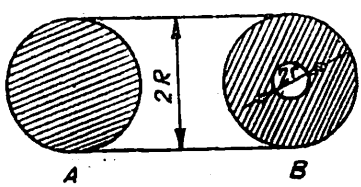
Fig. 15.9.



Pentru valorile numerice date se obține $k\approx 5{,}5$ N/cm.

15.10. Două sfere A și B au același diametru exterior și aceeași greutate (fig. 15.10) dar din materiale diferite, una fiind plină și cealaltă goală ($\gamma_A<\gamma_B$); li se dă drumul, fără viteză inițială, pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală. Să se arate că bila A (cu greutate specifică γ_A mai mică) se rostogolește mai repede decît bila B.

Fig. 15.10.



Rezolvare. Notînd cu J_A și J_B momentele de inerție ale sferelor A și B în raport cu axa instantanee de rotație, aplicînd teorema energiei, avem:

— pentru sfera A: $\frac{1}{2} J_A \omega_A^2 = \frac{1}{2} J_A \frac{v_A^2}{R^2} = M \cdot g \cdot x \cdot \sin\alpha$;

— pentru sfera B: $\frac{1}{2} J_B \omega_B^2 = \frac{1}{2} J_B \frac{v_B^2}{R^2} = M \cdot g \cdot x \cdot \sin\alpha$.

Lucrul mecanic produs de sfere fiind același, dar momentele de inerție fiind diferite:

$$J_A = \frac{7}{5} MR^2 \quad \text{și} \quad J_B = \frac{7}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$

și

$$J_A < J_B, \text{ rezultă: } v_A > v_B.$$

Sfera plină (cu greutate specifică mai mică) se rostogolește mai repede decît sfera goală (cu greutate specifică mai mare).

15.11. Consumul real de putere al unui laminor în timpul trecerii barei prin valțuri este $P_1 = 400$ kw, iar în mersul în gol, consumul se reduce la $P_2 = 150$ kW. Timpul necesar laminării unei bare este $t_1 = 6$ s, iar timpul de mers în gol este $t_2 = 16$ s. Turația medie $n = 90$ rot/min. Să se determine:

a) puterea P a electromotorului în sarcină;

b) momentul de inerție al volantului care să asigure un grad de neregularitate $\delta = 0{,}08$;

c) turația maximă și minimă a volantului.

Rezolvare. a) În timpul mersului în sarcină, turația scade de la n_M la n_m, cînd vitezele unghiulare devin ω_M, respectiv ω_m. Notînd cu L_m lucrul dat de electromotor în sarcină și cu L_1 lucrul mecanic datorită laminării barei și rezistențelor pasive, prin aplicarea teoremei energiei se poate scrie:

$$\frac{1}{2} J (\omega_m^2 - \omega_M^2) = L_m - L_1. \tag{1}$$

Cum $L_m = Pt_1$, $L_1 = P_1 t_1$, rezultă:

$$\frac{1}{2} J (\omega_m^2 - \omega_M^2) = (Pt_1 - P_1 t_1). \tag{1'}$$

În timpul mersului în gol, turația crește de la n_m la n_M, de unde vitezele unghiulare devin ω_m, respectiv ω_M. Notînd cu L_2 lucrul mecanic datorit rezistențelor pasive, prin aplicarea teoremei energiei, se poate scrie:

$$\frac{1}{2} J (\omega_M^2 - \omega_m^2) = L_m - L_2. \tag{2}$$

Cum $L_2 = P_2 t_2$, rezultă:

$$\frac{1}{2} J (\omega_M^2 - \omega_m^2) = (Pt_2 - P_2 t_2). \tag{2'}$$

Din egalarea relațiilor (1') și (2'), se deduce puterea electromotorului în sarcină:

$$P=\frac{P_1t_1+P_2t_2}{t_1+t_2}=218\text{ kW}. \tag{3}$$

Datorită volantului, este suficient un motor de 218 kW la un consum în sarcină de 400 kW. Această creștere a puterii în timpul mersului în sarcină, are loc datorită acumulării energiei cinetice de către volant, pe timpul mersului în gol, energie care în mersul în sarcină este restituită.

b) Pentru determinarea momentului de inerție al volantului se pornește de la relația (1'), care se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{1}{2}J\,(\omega_M+\omega_m)\,(\omega_M-\omega_m)=(P_1-P)\,t_1. \tag{4}$$

Notînd cu:

$$\omega=\frac{\omega_M+\omega_m}{2}\text{ (media vitezelor unghiulară)}: \tag{5}$$

și cu:

$$\delta=\frac{\omega_M-\omega_m}{\omega}\text{ (gradul de neregularitate)}, \tag{6}$$

relația (4) devine:

$$J\omega^2\delta=(P_1-P)\,t_1. \tag{7}$$

de unde:

$$J=\frac{(P_1-P)t_1}{\omega^2\delta}=151\,012\text{ kg.m}^2.$$

c) Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (5) și (6), se pot determina ω_M și ω_m:

$$\omega_M=\omega+\frac{\delta\omega}{2}\text{ și }\omega_m=\omega-\frac{\delta\omega}{2},$$

de unde:

$$n_M=n+\frac{\delta_n}{2}=93{,}6\text{ rot/min}:\quad n_m=n-\frac{\delta_n}{2}=86{,}4\text{ rot/min}.$$

15.12. Un autocamion, avînd fără roți o greutate G, este acționat de un motor, care produce o putere P, independentă de viteză. Autocamionul, avînd viteza inițială v, urcă o pantă de înclinare $\alpha°$. Roțile, considerate pline și cu un diametru $2r$, au o greutate totală egală cu o fracțiune η din greutatea șasiului. Considerînd orice frecare nulă, să se determine variația vitezei în funcție de timp și să se calculeze viteza autocamionului după timpul t_0 de la începutul urcușului. *Aplicație*: $G=30$ kN; $P=60$ kW; $v=36$ km/oră; $\alpha=10°$; $2r=0{,}6$ m; $t_0=10$ s; $\eta=0{,}05$.

Rezolvare. Notăm cu: M masa șasiului; m masa roților; J momentul de inerție al roților considerate pline.

Teorema energiei se poate scrie:

$$\frac{1}{2}\left(M+\frac{3}{2}m\right)v^2-\frac{1}{2}\left(M+\frac{3}{2}m\right)v_0^2=Pt-(M+m)\,x\cdot g\sin\alpha. \qquad (1)$$

Derivînd relaţia (1) se obţine:

$$\left(M+\frac{3}{2}m\right)v\dot{v}=P-(M+m)\,\dot{x}g\sin\alpha. \qquad (2)$$

Făcînd substituirea:

$$M_e=M+\frac{3}{2}m \quad \text{şi} \quad A=(M+m)\,g\sin\alpha,$$

relaţia (2) se mai poate scrie:

$$M_e\frac{dv}{dt}=\frac{P}{v}-A. \qquad (2')$$

Separînd variabilele, se obţine ecuaţia diferenţială:

$$\frac{v\,dv}{\frac{P}{A}-v}=\frac{A}{M_e}\,dt,$$

care, prin integrare, dă:

$$-v+\frac{P}{A}\ln\left(\frac{P}{A}-v\right)=\frac{A}{M_e}t+C.$$

Punînd condiţiile iniţiale la timpul $t=0$, $v=v_0$, se determină valoarea constantei de integrare şi expresia vitezei devine:

$$v_0-v+\frac{P}{A}\ln\frac{P-Av}{P-Av_0}=\frac{A}{M_e}t. \qquad (4)$$

În cazul aplicaţiei numerice date, rezultă:

$$M_e=M+\frac{3}{2}m=3\,300\text{ kg};\quad A=(M+m)\,g\sin\alpha=5\,468\text{ N}.$$

În acest caz, expresia vitezei se poate scrie:

$$-v+11\ln(11-v)=-10+1{,}65\,t.$$

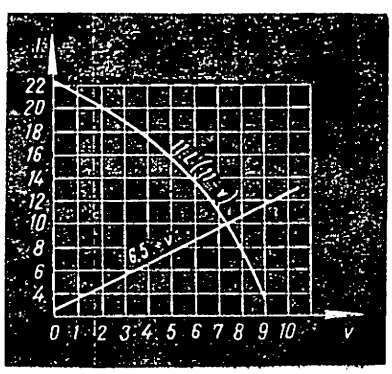
Pentru $t=10$ s, rezultă:

$$11\ln(11-v)=6{,}5+v.$$

Determinarea vitezei, corespunzătoare timpului $t=10$ s, se poate face trasînd curbele de variaţie ale funcţiilor din membrul 1 şi membrul 2. La intersecţia lor se obţine valoarea căutată a vitezei (fig. 15.11), şi anume:

$$v=7{,}45\text{ m/s}.$$

Fig. 15.11.



15.13. Un corp de greutate G, prins cu un arc în punctul A, alunecă cu frecare pe bara Δ. Cunoscînd viteza corpului în trecerea prin punctele C și B ale barei, constanta elastică a arcului k și lungimea l_0 a arcului în repaus, să se determine energia consumată prin frecare în timpul trecerii corpului între punctele C și B (fig. 15.12).

Rezolvare. Din legea conservării energiei rezultă că energia cinetică de frecare $E\mu$ este egală cu suma variației energiei cinetice și energiei potențiale a arcului și a greutății G în trecerea prin cele două poziții C și B

$$E\mu=\frac{1}{2}k\left[(\sqrt{a^2+c^2}-l_0)^2-(\sqrt{a^2+b^2}-l_0)^2\right]+Gb+\frac{1}{2}\frac{G}{g}(v_C^2-v_B^2).$$

15.14. O bandă transportoare, înclinată cu un unghi α față de orizontală, transportă un corp de greutate P (fig. 15.13, *a*). Știind că roțile care deplasează banda sînt egale și au greutatea Q și raza r, iar în plus roata (1) este acționată de un cuplu motor de moment M, să se determine mișcarea corpului împreună cu banda transportoare. Nu există alunecare a benzii pe roți și nici a corpului pe bandă.

Rezolvare. Izolînd corpurile, (fig. 15.13. *b*), se pot scrie ecuațiile de mișcare ale fiecărui corp în parte:

— roata (*1*):

$$J\ddot{\theta}=M+(T_1-T_3)\,r;$$

— corpul P împreună cu banda:

$$\frac{P}{g}\ddot{x}=T_2-T_1-P\sin\alpha,$$

— roata (*2*):

$$J\ddot{\theta}=(T_3-T_2)\,r.$$

Eliminînd tensiunile T_1, T_2, T_3 din cele trei ecuații, rezultă:

$$\ddot{x}=\frac{M-Pr\sin\alpha}{(P+Q)r}\cdot g.$$

Fig. 15.12.

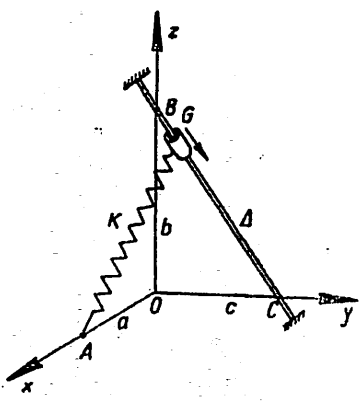
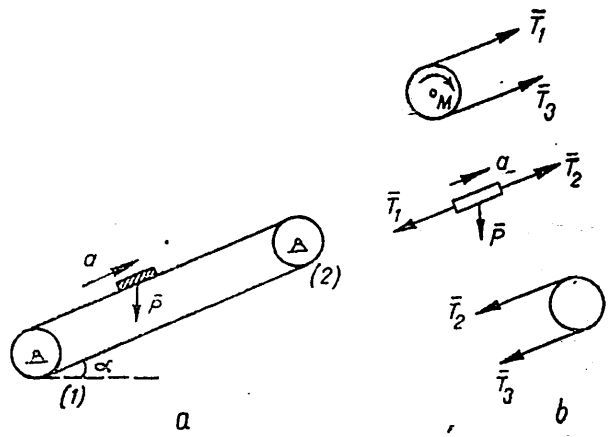


Fig. 15.13.



Cum P, Q, α, r au valori constante, dacă şi cuplul motor M aplicat roţii (1) este constant, mişcarea corpului este uniform variată. Dacă $M>Pr\sin\alpha$, mişcarea este uniform accelerată; dacă $M<Pr\sin\alpha$, mişcarea este uniform întîrziată. Dacă $M=Pr\sin\alpha$ corpul cu banda îşi menţine starea de repaus, dacă era iniţial în repaus, sau are o mişcare uniformă în cazul cînd se găsea în mişcare.

15.15. Se dă sistemul mecanic din figura 15.14, format din greutatea P, troliul ce se roteşte în jurul axei fixe O_1 şi discul O de greutate O ce se rostogoleşte cu frecare, fără să alunece, pe un plan orizontal h_1. Să se afle acceleraţia sistemului a, corpurile pornind din repaus, fără viteză iniţială.

Rezolvare. Aplicînd sistemului de corpuri teorema energiei sub formă finită, $E_2-E_1=L_{1-2}$, între poziţiile 1 şi 2 avem:

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_p^2+\frac{1}{2}J_1\omega^2+\frac{1}{2}J_1\Omega^2=Ph-C_f\cdot\theta-Ns\cdot\theta,$$

unde J_1, ω şi J_1, Ω sînt respectiv momentul de inerţie şi viteza unghiulară a troliului şi discului în raport cu axul fix O_1 şi axul instantaneu de rotaţie trecînd prin I.

Ţinînd seama de relaţiile cinematice existente între viteza v_p a corpului P, viteza v_f a firului, deplasarea h a corpului P, deplasarea h_1 a firului:

$$h=R_1\theta;\ v_p=R_1\omega;\ h_1=r_1\theta;\ v_f=r_1\omega;\ h_1=\frac{r_1}{R_1}h,\ v_f=\frac{r_1}{R_1}v_P;$$

$$\Omega=\frac{v_f}{2r}=\frac{1}{2r}\cdot\frac{r_1}{r}v_P;\ v_f=2r\cdot\Omega;\ \theta_1=\frac{h_1}{2r}=\frac{r_1}{R_1}\cdot\frac{h}{2r},\ \text{se obţine:}$$

$$a=\frac{P-\frac{C_f}{R_1}-Qs\frac{1}{2rR_1}}{P+\frac{J_1}{R_1^2}g+\frac{3}{8}\cdot\frac{r_1^2}{R_1^2}Q}g.$$

15.16. Un om cu greutatea G, care poartă în mîini greutatea G_1, sare sub unghiul α faţă de orizontală, cu viteza v_0, şi atingînd înălţimea maximă, aruncă greutatea înapoi cu viteza relativă, orizontală, u. Cu cît se măreşte distanţa săriturii datorită acestui fapt? Se neglijează rezistenţa aerului.

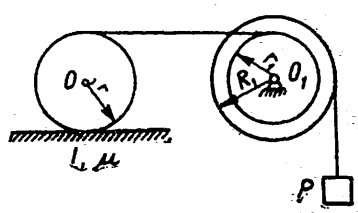
Rezolvare. Distanţa pe orizontală X parcursă de un punct material, lansat cu viteza v de la înălţimea h, dedusă din ecuaţiile mişcării:

$$x=vt;\ y=\frac{1}{2}gt^2,$$

este dată de relaţia:

$$x^2=\frac{2h}{g}v^2,$$

Fig. 15.14.



unde în cazul problemei:

$$h=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha, \tag{2}$$

reprezintă săgeata maximă obținută prin lansarea omului cu viteza v_0, sub unghiul α.

Din relațiile (1) și (2), se deduce:

$$X=\frac{vv_0}{g}\sin\alpha. \tag{3}$$

Cînd corpurile G și G_1 merg împreună cu viteza orizontală v_1, distanța X_1 a săriturii este:

$$X_1=\frac{v_1v_0}{g}\sin\alpha.$$

În cazul aruncării greutății G_1, viteza v_2 a omului după aruncare crește și distanța săriturii devine $X_2>X_1$. Viteza v_2 poate fi calculată din legea conservării impulsului:

$$(G+G_1)\,v_1=Gv_2+G_1\,(v_1-u).$$

Se obține:

$$v_2=v_1+\frac{G_1}{G}u.$$

Deoarece în vid în orice punct al traiectoriei există relația:

$$v_1=v_0\cos\alpha,$$

rezultă:

$$v_2=v_0\cos\alpha+\frac{G_1}{G}u.$$

Ca urmare:

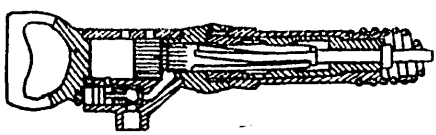
$$X_2=\frac{v_0}{g}\left(v_0\cos\alpha+\frac{G_1}{G}u\right)\sin\alpha,$$

iar distanța săriturii se mărește cu:

$$d=X_2-X_1=\frac{G_1}{gG}v_0u\sin\alpha.$$

15.17. La un ciocan pneumatic carcasa exterioară are o greutate $G_1=80$ N și pistonul de lovire o greutate $G_2=16$ N. Presiunea maximă a aerului comprimat $p=4{,}905\cdot10^5$ N/m² se exercită pe suprafața pistonului de $A=28$ cm². Cursa făcută de piston din poziția inițială pînă la deschidera orificiilor de evacuare este de 4 cm (fig. 15.15). Știind că, inițial, ciocanul se găsea în repaus, să se determine:

Fig. 15.15.



a) viteza v_1' a carcasei și v_2' a pistonului după exercitarea acțiunii aerului comprimat;

b) energia cinetică maximă E_1 a carcasei și E_2 a pistonului.

Rezolvare. a) Considerînd carcasa și pistonul de lovire ca un sistem izolat de corpuri, se poate scrie că impulsul înainte de acțiunea aerului comprimat este egal cu impulsul după exercitarea acțiunii aerului comprimat.

Cum în starea inițială pistonul și carcasa se găseau în repaus, rezultă:

$$m_1v_1'+m_2v_2'=0,$$

de unde:

$$\frac{v_1'}{v_2'}=-\frac{m_2}{m_1}=-\frac{G_2}{G_1}=-0{,}2. \qquad (1)$$

Semnul minus arată că pistonul și carcasa au sensuri de deplasare diferite.

Pentru determinarea vitezelor v_1 și v_2 mai este necesar să se determine o a doua ecuație de legături între v_1' și v_2'.

Mișcarea pistonului și a carcasei este datorită acțiunii gazelor, deci forța cu care ele apasă pe piston este:

$$P=A\cdot p=1\,400\text{ N}.$$

Accelerațiile relative ale maselor m_1 și m_2 sînt:

— pentru carcasă: $a_1=\frac{P}{m_1}=172\text{ m/s}^2$;

— pentru piston: $a_2=\frac{P}{m_2}=860\text{ m/s}^2$.

Accelerațiile fiind dirijate în sens contrar, accelerația absolută va fi:

$$a=a_1+a_2=172+860=1\,032\text{ m/s}^2.$$

Mișcarea fiind uniform accelerată, rezultă ca durată a deplasării carcasei timpul t, dat de relația:

$$t=\sqrt{\frac{2s}{a}}=0{,}00881\text{ s}.$$

Cunoscînd accelerația și timpul, se poate determina viteza carcasei:

$$v_1'=a_1\cdot t=1{,}52\text{ m/s},$$

și apoi viteza pistonului:

$$v_2'=-\frac{v_1'}{0{,}2}=-7{,}6\text{ m/s}.$$

b) Energiile cinetice vor fi maxime în momentul deschiderii orificiilor de evacuare a aerului comprimat, moment în care vitezele carcasei exterioare și a pistonului sînt respectiv: v_1' și v_2'. Rezultă:

$$E_1=\frac{1}{2}m_1v_1'^2=9{,}217\text{ J};\quad E_2=\frac{1}{2}m_2v_2'^2=46{,}08\text{ J}.$$

Energia cinetică a pistonului serveşte la efectuarea unui lucru mecanic (baterea niturilor, perforare etc.) şi trebuie să fie cît mai mare. Energia cinetică a carcasei acţionează asupra lucrătorului şi trebuie să fie cît mai mică.

15.18. Extremităţile unei bare AB (fig. 15.16), de masă m şi lungime $2l$, alunecă fără frecare pe un cerc orizontal fix de rază R. Un inel mobil I de masă m_1 parcurge coarda AB cu viteza constantă v. Să se determine mişcarea barei AB, admiţînd că la momentul iniţial inelul porneşte din punctul M, mijlocul barei AB, cînd viteza unghiulară a barei este $\omega_0=\dot{\theta}_0$.

Rezolvare. Sistemul mecanic format din bară şi inel este acţionat de forţele de greutate şi de reacţiunile din extremităţile barei. Toate forţele fiind verticale, momentul acestora faţă de axa perpendiculară pe cerc, considerată ca axă oz este zero. Ca urmare, din teorema momentului cinetic avem:

$$\dot{K}_{oz}=M_{oz}=0 \tag{1}$$

Rezultă că momentul cinetic total al barei (K_1) şi al inelului (K_2) faţă de axa oz rămîne constant.

Notăm:

$$OM=a=\sqrt{R^2-l^2};\quad \overline{OI}^2=\overline{OM}^2+\overline{MI}^2=a^2+v^2t^2. \tag{2}$$

Momentul cinetic al barei AB de masă m, faţă de axa oz este:

$$K_1=J_0\dot{\theta}=\left(m\frac{l^2}{3}+ma^2\right)\dot{\theta}. \tag{3}$$

Determinarea momentului cinetic al inelului de masă m_1, se poate face fie pornind de la expresia momentului cinetic definită de relaţia:

$$K_2=m_1(x\dot{y}-y\dot{x}), \tag{4}$$

unde x şi y, coordonatele inelului, au valorile:

$$x=a\cos\theta-vt\sin\theta \text{ şi } y=a\sin\theta+vt\cos\theta, \tag{5}$$

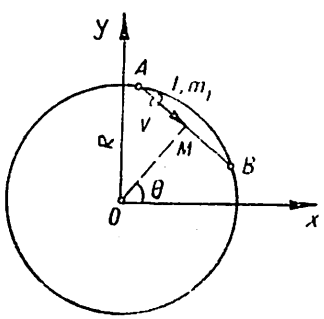
fie direct prin aplicarea teoremei lui *König*, ţinînd seamă că inelul are o mişcare relativă.

Ca urmare:

$$K_2=a(m_1v)+(m_1a^2)\dot{\theta}. \tag{6}$$

Momentul cinetic total K_{oz} este deci:

Fig. 15.16.



$$K_{oz}=K_1+K_2=\left(m\frac{l^2}{3}+ma^2\right)\dot{\theta}+(m_1va+m_1\overline{IO}^2\dot{\theta}). \tag{7}$$

Ţinînd seamă de notaţiile precedente, cum viteza v este constantă, prin transformări succesive, se obţine relaţia:

$$K^2+v^2t^2=ct, \tag{8}$$

unde s-a notat

$$K^2=(m+m_1)\,R^2-\frac{1}{3}(2m+3m_1)\,l^2. \tag{9}$$

Din (4) rezultă:

$$\theta(t)=\theta_0+\frac{K\dot{\theta}_0}{\sqrt{m_1 v}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{m_1}\,t}{K}.$$

15.19. Într-un autobuz cu greutatea $G=40\,000$ N, care are o viteză constantă $v_0=14{,}4$ km/h, sare un om cu greutatea de $Q=800$ N, cu o viteză $v_p=5$ m/s, în direcţia de mers a autobuzului. Ce variaţie de viteză va avea autobuzul în momentul cînd omul sare în autobuz?

Rezolvare. Înainte ca omul să sară în autobuz, impulsul sistemului este format din impulsul maşinii şi al omului:

$$\frac{G}{g}v_0+\frac{Q}{g}v_p, \tag{1}$$

iar în momentul urcării în autobuz, impulsul total al sistemului este:

$$\frac{G+Q}{g}(v_0+\Delta v). \tag{2}$$

Neacţionînd alte forţe exterioare asupra sistemului, se poate aplica legea conservării impulsului:

$$\frac{G}{g}v_0+\frac{Q}{g}v_p=\frac{G+Q}{g}(v_0+\Delta v), \tag{3}$$

şi după reduceri rezultă:

$$v=\frac{Q}{G+Q}(v_p-v_0)=\frac{Q}{G+Q}v_r, \tag{4}$$

în care v_r este viteza relativă a omului faţă de autobuz. Se observă că variaţia de viteză a autobuzului este independentă de viteza iniţială a sistemului şi depinde numai de viteza relativă.

În cazul problemei rezultă că viteza autobuzului a crescut cu 2 cm/s.

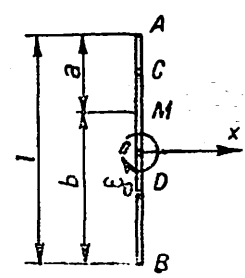
Observaţie. Din relaţia (4) rezultă:

— autobuzul îşi măreşte sau îşi micşorează viteza după cum viteza omului este mai mare sau mai mică decît viteza autobuzului;

— cînd viteza omului şi a autobuzului este egală, viteza autobuzului nu se schimbă în momentul săriturii;

— în mod analog se poate trata şi cazul cînd o persoană sare din autobuz.

Fig. 15.17.



15.20. Unei bare omogene AB de lungime l, mobilă într-un plan vertical în jurul articulaţiei O aflată în mijlocul acesteia (fig. 15.17), i se imprimă viteza unghiulară constantă ω_0. Ajungînd în poziţie verticală, bara se rupe într-un punct M astfel

încît $AM=a$ şi se desprinde în acelaşi moment şi din articulaţia O. Se cere să se studieze mişcările ulterioare ale celor două bucăţi AM şi MB ale barei precum şi a centrului lor de masă, neglijînd frecările şi rezistenţa aerului.

Rezolvare. 1) *Mişcarea barei AB înainte de rupere.* Momentul forţelor ce acţionează bara (greutatea sa G şi reacţiunea din articulaţia O) în raport cu punctul de rotaţie fiind nul în tot timpul mişcării, bara se va roti cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul lui O.

2) *Mişcarea porţiunii AM.* Mişcarea centrului de masă $C\left(0, \frac{l-a}{2}\right)$. Alegînd axele ca în schiţă (fig. 15.18) şi notînd cu ρ masa unităţii de lungime, ecuaţiile de mişcare ale porţiunii AM din bară de masă m_1 sînt:

$$\rho a \frac{d^2x}{dt^2}=0; \quad \rho a \frac{d^2y}{dt^2}=\rho a g. \tag{1}$$

Prin integrare şi ţinînd seamă de condiţiile iniţiale $t=0$; $\omega=\omega_0$, $x_0=0$, rezultă pentru prima ecuaţie:

$$\frac{dx}{dt}=c_1, \text{ din care deducem } \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)\omega_0$$

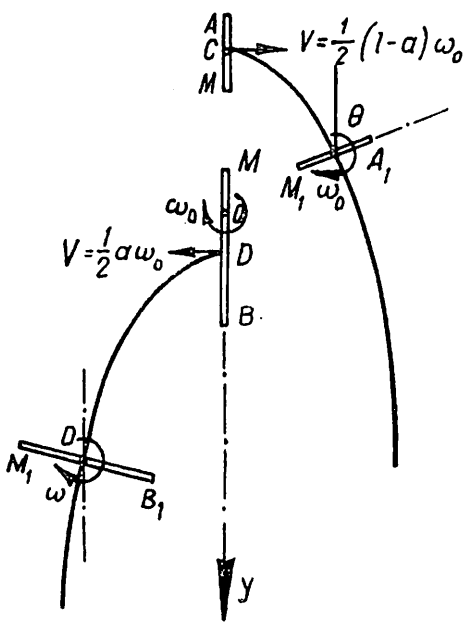
şi

$$x_c=\frac{1}{2}(l-a)\,\omega_0 t. \tag{2}$$

Din cea de a doua ecuaţie de mişcare (1) deducem:

$$y_c=\frac{1}{2}gt^2-\frac{l-a}{2}. \tag{2'}$$

Fig. 15.18.



Ca urmare, din eliminarea timpului, obţinem drept ecuaţie a traiectoriei parabola:

$$y=\frac{2g}{\omega_0^2(l-a)^2}x^2-\frac{l-a}{2},$$

cu vîrful în C.

Mişcarea în jurul centrului de masă C a barei, dată de ecuaţia:

$$J\frac{d\omega}{dt}=0,$$

reprezintă o mişcare de rotaţie uniformă $\theta=\omega_0 t$, de viteză unghiulară constantă ω_0.

3) *Mişcarea porţiunii BM de masă m_2.* Procedînd în mod analog ca şi pentru bara AM, se obţin ecuaţiile parametrice ale mişcării centrului de masă $D\left(0, -\frac{a}{2}\right)$:

$$x_D=-\frac{\omega_0 a}{2}\cdot t: \quad y_D=\frac{1}{2}gt^2+\frac{a}{2},$$

şi drept traiectorie parabola:

$$y=\frac{2g}{a^2\omega_0^2}x^2+\frac{a}{2},$$

avînd vîrful în D.

4) *Mişcarea centrului de masă al barelor AM şi MB.* Calculînd poziţia centrului de greutate al barelor, se obţine cum era de aşteptat:

$$x_G=\frac{m_1x_C+m_2x_D}{m_1+m_2}=0;\quad y_G=\frac{m_1y_C+m_2y_D}{m_1+m_2}=\frac{1}{2}gt^2.$$

Ca urmare centrul de masă al ansamblului barelor cade pe verticala lui O, ca şi cînd bara întreagă s-ar desprinde din O fără să se rupă. *Deci prin nici o forţă internă, prin nici o mişcare din interiorul unui sistem nu se poate modifica mişcarea centrului de masă al sistemului considerat.*

C. PROBLEME NEREZOLVATE

15.21. La intrarea în casetă, o suveică în greutate de 2,4 N are o viteză v_1 de 10 m/s. Datorită limbii casetei, energia suveicii la sfîrşitul acţiunii de frînare, scade la o treime din energia cinetică iniţială. Acţiunea de frînare făcîndu-se pe un spaţiu de 0,2 m, să se determine:

a) viteza v_2 a suveicii la sfîrşitul acţiunii de frînare;

b) timpul t în care se produce acţiunea limbii casetei;

c) lucrul mecanic efectuat de limba casetei după 200 bătăi.

Răspuns:

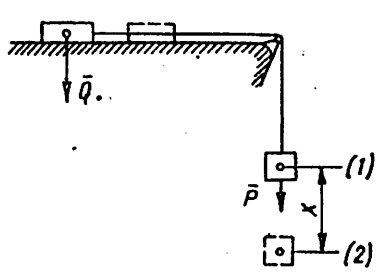
$$a)\quad v_2=\frac{v_1}{\sqrt{3}}=6{,}94\ \text{m/s}.$$

$$b)\quad t=\frac{2s}{v_1+v_2}=\frac{2\cdot 0{,}2}{12+6{,}94}=0{,}021\ \text{s}.$$

$$c)\quad L=-\frac{200}{3}mv_1^2=-2\,340\ \text{N.m}.$$

15.22. Două corpuri P şi Q sînt legate între ele printr-un fir trecut peste un scripete fără frecare şi de masă neglijabilă. Corpul Q se deplasează pe un plan orizontal (fig. 15.19). Ştiind că între corp şi plan coeficientul de frecare este μ, să se determine acceleraţia sistemului.

Fig. 15.19.



Indicaţie şi răspuns: Aplicînd teorema energiei între poziţiile (1) şi (2), rezultă

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2=Px-\mu Qx.$$

Prin derivare, în raport cu timpul, se obține:

$$a=\frac{P-\mu Q}{P+Q}g.$$

15.23. Un tramvai, mergînd cu o viteză de 36 km/h, frînează brusc. Coeficientul de frecare de alunecare între roți și șine fiind $\mu=0{,}1$, să se determine distanța d pe care o va mai parcurge tramvaiul patinînd, pînă se va opri.

Răspuns.

$$d=\frac{v_1^2}{2g\mu}=51 \text{ m}.$$

15.24. O greutate așezată pe un arc face ca acesta să se comprime cu x_0 (fig. 15.20). Care va fi comprimarea maximă a arcului în cazul cînd aceeași greutate este lăsată să cadă, fără viteză inițială, asupra resortului, de la înălțimea h? Forța rezistentă din arc este proporțională cu comprimarea.

Indicație și răspuns. Egalînd lucrul mecanic efectuat de greutatea G, cînd cade de la înălțimea h pînă la comprimarea maximă a arcului cu lucrul mecanic efectuat de forța elastică F_e din arc $F_e=G\frac{d}{\delta}$, avem:

$$G(h+d)=\left(G\frac{d}{\delta}\right)\cdot\frac{d}{2},$$

deoarece forța elastică variază liniar cu deplasarea. Rezultă:

$$d=\delta\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta}}\right).$$

Se poate aplica și teorema energiei. S-a notat cu δ deformația statică a arcului, lungimea cu care s-a comprimat arcul sub acțiunea greutății proprii G.

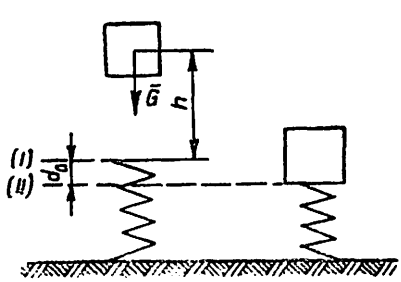
15.25. Volantul unui motor Diesel are diametrul exterior $D=1\,600$ mm, diametrul interior $d=1\,200$ mm, iar grosimea coroanei $a=130$ mm (fig. 15.21).

Greutatea specifică a oțelului fiind 72 N/dm³, să se calculeze energia cinetică la o turație de 360 rot/min.

Indicație și răspuns. Volantul avînd o mișcare de rotație, energia sa cinetică este:

$$E_c=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}m\frac{R^2+r^2}{2}\cdot\omega^2. \qquad (1)$$

Fig. 15.20.



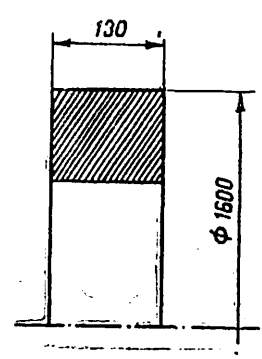


Fig. 15.21.

Greutatea coroanei volantului este:

$$G=\gamma V=\gamma a\pi\,(R^2-r^2).$$

Pentru aplicație se obține:

$$G=8{,}230\text{ kN};\quad J=420\text{ Nms}^2;\quad \omega=37{,}68\text{ s}^{-1};\quad E_c=29\cdot10^4\text{ Nm}.$$

15.26. Un pendul dublu, format din bilele A și B, de masă m_1 și m_2, oscilează în planul xOy, în jurul punctului O (v. fig. 8.13). Știind că $OA=l_1$ și $OB=l_2$, să se calculeze energia cinetică a sistemului. Se neglijează masa barelor OA și AB.

Răspuns:

$$E_T=\frac{1}{2}m_1l_1^2l_1^2+\frac{1}{2}m_2\,[l_1^2\omega_1^2+l_2^2\omega_2^2+2l_1l_2\omega_1\omega_2\cos(\beta-\alpha)].$$

15.27. Să se determine energia cinetică a unui proiectil, având diametrul d și greutatea P, care iese din gura de foc cu o viteză de v_0. Pasul ghinturilor în țeavă este h.

Indicație și răspuns.

$$E=E_t+E_r,$$

unde:

$$E_t=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2g}Gv^2;$$

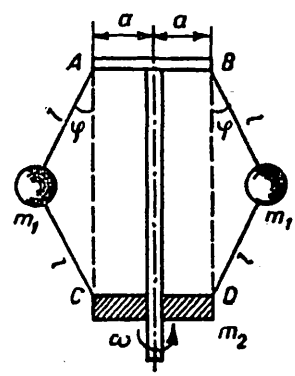
$$E_r=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}J\left(\frac{2\pi v}{h}\right)^2.$$

Proiectilul fiind asimilat cu un cilindru plin, și ținînd seama și de mișcarea de rotație pe care o are, rezultă:

$$E_T=\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2\left(1+2\frac{\pi^2r^2}{h^2}\right).$$

15.28. Un regulator cu bile de masă m_1 are un manșon de masă m_2 care lunecă de-a lungul unei tije verticale (fig. 15.22). Întreg sistemul se rotește în jurul axului vertical cu viteza unghiulară variabilă ω. Știind că momentul de inerție al suportului în forma de T este J și neglijînd greutățile barelor de susținere, să se calculeze energia cinetică totală a sistemului.

Fig. 15.22.



Indicație și răspuns. Energia cinetică totală a sistemului va fi o însumare a energiilor cinetice ale părților componente aflate în mișcare: suportul în forma de T, cele două bile și manșonul.

— Energia cinetică a suportului:

$$E_1=\frac{1}{2}J\omega^2.$$

— Energia cinetică a celor două bile, care au atît o mişcare de rotaţie în jurul axului vertical, cît şi o rotaţie în jurul articulaţiilor A, respectiv B, cu viteza unghiulară: $\omega_1=d\varphi/dt$:

$$E_2=2\frac{1}{2}m_1[(a+l\sin\varphi)^2\omega^2+l^2\omega_1^2].$$

— Energia cinetică a manşonului, care are atît o mişcare de rotaţie în jurul axului vertical, cît şi o mişcare de translaţie în lungul axei, cu viteza $v_2=2l\dot{\varphi}\sin\varphi$:

$$E_3=\frac{1}{2}m_2\frac{a^2}{2}\omega^2+\frac{1}{2}m_2(4l^2\sin^2\varphi)\omega_1^2.$$

Deci energia cinetică totală a sistemului va fi:

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2+m_1[(a+l\sin\varphi)^2\omega^2+l^2\omega_1^2]+\frac{1}{2}m_2\left[\frac{a^2}{2}\omega^2+4l^2\omega_1^2\sin^2\varphi\right].$$

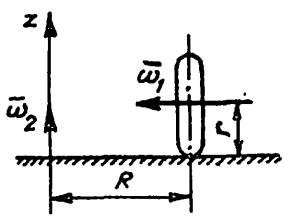
15.29. Un disc cu masa M şi raza r se rostogoleşte, fără alunecare, pe un plan orizontal, în jurul unei axe verticale (fig. 15.23). Traiectoria descrisă este un cerc cu raza R. Ştiind că viteza centrului de greutate al discului este v, să se calculeze energia cinetică.

Indicaţie şi răspuns. Axa de rotaţie a discului schimbîndu-şi orientarea în timpul mişcării, pentru determinarea energiei cinetice se va aplica relaţia (p) în care:

$$\omega_1=\frac{v}{r};\quad \omega_2=\frac{v}{R};\quad \omega_3=0.$$

Momentele de inerţie sînt:

Fig. 15.23.



$$J_1=\frac{1}{2}Mr^2;\quad J_2=\frac{1}{4}Mr^2;\quad J_3=\frac{1}{4}Mr^2,$$

astfel încît:

$$E_T=\frac{1}{2}Mv^2\left(\frac{3}{2}+\frac{r^2}{4R^2}\right).$$

15.30. Cu ajutorul unui scripete se ridică o greutate Q, aplicînd o forţă P ($P>Q$), (fig. 15.24). Ştiind că momentul de inerţie al scripetelui în raport cu axa de rotaţie este J, să se determine acceleraţia pe care o va căpăta sarcina.

Fig. 15.24.

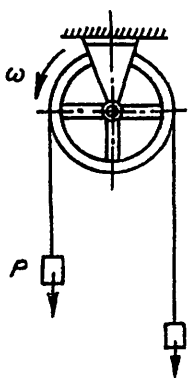
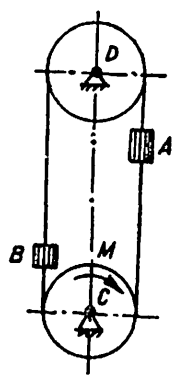


Fig. 15.25.



Răspuns: $a=\dfrac{P-Q}{P+Q+\dfrac{Jg}{R^2}}g.$

15.31. Asupra axului C al unui ascensor se aplică un cuplu motor M. În A se găseşte cabina de greutate P_1 şi în B se găseşte contra-greutatea P_2. Roţile după care se înfăşoară cablul au razele R şi greutatea Q (fig. 15.25). Ştiind că în axele roţi-

lor există cîte un cuplu de frecare C_f, să se determine accelerația pe care o va căpăta cabina ascensorului.

Răspuns. $a=\dfrac{M-2C_f+(P_1-P_2)R}{(P_1+P_2+Q)R}g.$

15.32. O bobină cilindrică cu raza R și greutatea G este susținută de un fir (fig. 15.26). Dîndu-se drumul bobinei să cadă, să se arate că ea capătă o mișcare uniform accelerată și să se determine accelerația.

Indicație și răspuns. Aplicînd teorema energiei:

$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_G\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2=Gx,$$

Deoarece $J_G=\dfrac{G}{g}\dfrac{R^2}{2}$, rezultă $a=\dfrac{2}{3}g.$

15.33. Un fir, trecut peste un scripete fără frecare, are la un capăt o greutate P, care cade vertical, iar la celălalt capăt este legat axul unui cilindru plin, cu greutatea G și raza R, care se rostogolește pe un plan înclinat de un unghi α (fig. 15.27). Ținînd seamă de frecarea de rostogolire, să se găsească: 1) accelerația sistemului; 2) înclinarea planului pentru ca greutatea P să aibă o mișcare uniformă.

Răspuns: 1) $a=\dfrac{P-G\sin\alpha-\dfrac{s}{R}G\cos\alpha}{P+\dfrac{3}{2}G}g.$

2) $\alpha\approx\arccos\left(\dfrac{Ps}{GR}\pm\sqrt{1-\dfrac{P^2}{G^2}}\right).$

15.34. Un fir, trecut peste un scripete fără frecare, are la un capăt o greutate P, care cade vertical, iar la celălalt capăt este înfășurat pe o bobină cilindrică, plină, cu greutatea G și raza R (fig. 15.28). Neglijînd frecarea de rostogolire, să se găsească accelerația greutății P, cînd bobina se rostogolește fără să alunece.

Răspuns. $a=\dfrac{P}{P+\dfrac{3G}{8}}g.$

15.35. Un vagon de cale ferată, cîntărind G Newton (exclusiv roțile), are o viteză de v km/h, cînd lovește un tampon de capăt de linie considerat perfect elastic, de constantă elastică k (fig. 15.29). Greutatea roților vagonului, considerate reduse la bandaj, este de 600 kgf. Să se determine energia totală a vagonului în momentul loviriі tamponului și deformația elastică maximă x_0 a arcului.

Fig. 15.26.

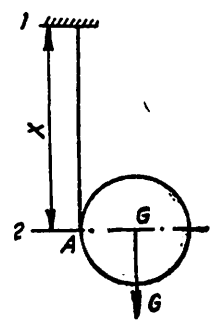


Fig. 15.27.

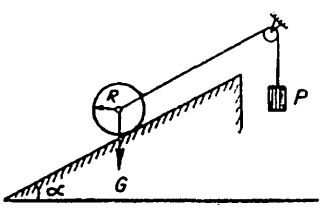


Fig. 15.28.

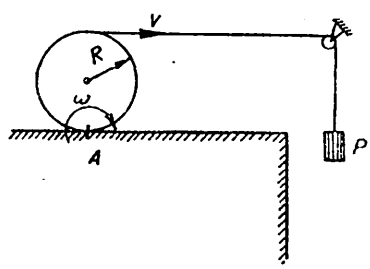
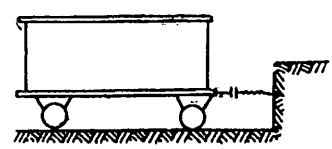


Fig. 15.29.



Aplicație. $G=15\cdot10^4$ N; $v=1{,}8$ km/h; $K=8{,}75\cdot10^5\frac{\text{N}}{\text{m}}$; $P=6$ kN.

Indicații și răspuns. Energia cinetică totală E_T a vagonului și roților este:

$$E_T=\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2+\left(\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2+\frac{1}{2}\frac{P}{g}\cdot r^2\omega^2\right)=\frac{1}{2g}(G+2P)\,v^2.$$

Din teorema energiei:

$$E_T=K\cdot\frac{x_0^2}{2},$$

rezultă:

$$x_0=v\sqrt{\frac{G+2P}{gk}}.$$

Pentru aplicație se obține $E_T=2{,}021$ kJ și $x_0=2{,}17$ cm.

15.36. Corpul de greutate G alunecă fără frecare pe bara AB (fig. 15.30) avînd forma unui arc de cerc de rază r. Să se determine constanta elastică K a arcului, acesta avînd în repaus lungimea l_0, corpul pornind din A fără viteză, iar în B trebuind să posede viteza v_B.

Indicație și răspuns. Din legea conservării energiei mecanice, rezultă că suma variațiilor energiei potențiale (arc și greutate) și a energiei cinetice a greutății între pozițiile B și A este nulă. Ca urmare:

$$\frac{1}{2}k\left[(\sqrt{a^2+b^2}-l_0)^2-(a+b-l_0)^2\right]-Gb+\frac{1}{2}\frac{G}{g}(v_B^2-v_A^2)=0,$$

de unde se obține valoarea constantei elastice k.

15.37. O bară omogenă $AB=2a$ de greutate mg (fig. 15.31), se sprijină cu capătul A pe un plan orizontal neted. La momentul inițial bara este în repaus și face unghiul α_0 cu orizontala. Sub acțiunea greutății bara începe să cadă. Aplicînd teorema impulsului, se cere traiectoria capătului B a barei.

Indicație și răspuns. Alegînd axele ca în figură, notînd cu v viteza centrului de masă a barei, proiectînd teorema impulsului aplicată centrului de masă:

$$\frac{\mathrm{d}(m\bar{v})}{\mathrm{d}t}=m\bar{g}$$

pe axele de coordonate și ținînd seamă de condițiile inițiale $t=0$; $\dot{x}_c=0$; traiectoria capătului B a barei este elipsa de centru O și semiaxe a și $2a$.

15.38. Punctele materiale A și B de mase m_1 și m_2 (fig. 15.32) se atrag după legea atracției universale $\left(F=k\frac{m_1m_2}{d^2}\right)$ unde $AB=d$. Se cere traiectoria cen-

Fig. 15.30.

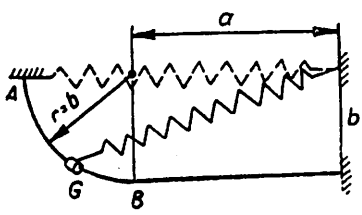


Fig. 15.31.

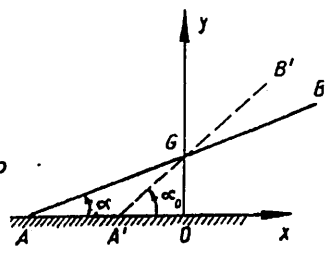
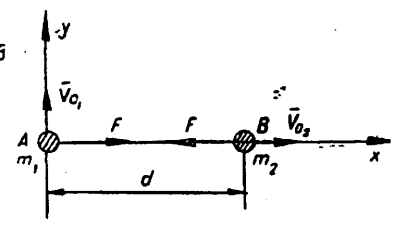


Fig. 15.32.



trului de masă cunoscînd că, la momentul inițial $t=0$, viteza v_{01} a punctului A este perpendiculară pe AB, iar viteza v_{02} a punctului B este dirijată după AB.

Indicație și răspuns. Asupra sistemului de puncte, neacționînd forțe exterioare, din legea conservării impulsului

$$\bar{H}=(m_1+m_2)\,\bar{v}_c=m_1v_{01}\bar{j}+m_2v_{02}\bar{i}$$

rezultă:

$$\dot{x}_c=\frac{m_2}{m_1+m_2}v_{02};\quad \dot{y}_c=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{01}.$$

Prin integrare, ținînd seama de condițiile inițiale, ecuația traiectoriei este dreapta:

$$y_c=\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{v_{01}}{v_{02}}x_c-\frac{v_{01}}{v_{02}}\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2}d;$$

unde x_c și y_c sînt coordonatele centrului de masă.

15.39. O pană mică, de masă $\frac{q}{g}$ și latură b, alunecă fără frecare pe o pană mare de masă $\frac{P}{g}$, cu care este asemenea. Pana mică alunecă fără frecare pe diagonala AB pînă în B (fig.17. 33). Neglijînd frecările, să se afle cu cît se va deplasa pana mare.

Indicație și răspuns. Din legea conservării impulsului pe orizontală:

$$\frac{q}{g}\dot{x}_q+\frac{P+q}{g}\dot{x}_c=0,$$

rezultă deplasarea centrului de masă a ansamblului celor două corpuri:

$$x_c=-\frac{q}{P+q}(a-b).$$

15.40. Doi arbori, avînd aceeași axă și momentele de inerție J_1 și J_2, se cuplează printr-o cuplă de ambreiaj. Știind că în acel moment primul arbore se rotea cu o viteză unghiulară ω_1, iar arborele al doilea era în repaus, să se determine:

a) viteza unghiulară cu care se rotesc ambii arbori după cuplare;

b) energia consumată în timpul cuplării.

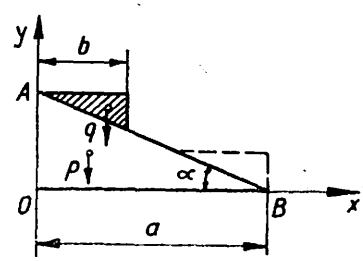
Răspuns.

a) $$\omega'=\frac{J_1}{J_1+J_2}\omega_1;$$

b) $$\Delta E=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2-\frac{1}{2}(J_1+J_2)\,\omega'^2=\frac{J_1J_2}{2(J_1+J_2)}\omega_1^2.$$

15.41. Pe o platformă circulară cu masa M și raza R, care se poate roti fără frecare în jurul unui ax vertical care trece prin centrul O, se deplasează un corp de masă m, pe o șină circulară cu raza r și centrul O. Știind că inițial platforma și corpul se găsesc în repaus, să se determine viteza unghiulară a platformei atunci cînd corpul punîndu-se în mișcare a atins viteza v.

Fig. 15.33.



Indicație și răspuns. Notînd cu J_0 momentul de inerție al platformei, din legea conservării momentelor cinetice rezultă:

$$(J_0+m\cdot r^2)\,\omega_0+m\cdot r\cdot v_0=(J_0+m\cdot r^2)\,\omega'+m\cdot r\cdot v.$$

Cum la momentul inițial $\omega_0=0$ și $v_0=0$, iar $J_0=\frac{M\cdot R^2}{2}$, se obține:

$$\omega'=-\frac{2m\cdot r\cdot v}{M\cdot R^2+2m\cdot r^2}.$$

15.42. Un cerc cu raza R se rostogolește fără alunecare pe un plan orizontal, centrul său de greutate avînd viteza v. La un moment dat cercul este imobilizat într-un punct A de pe periferia sa. Să se determine mișcarea pe care o va avea cercul.

Indicație și răspuns. Din legea conservării momentului cinetic:

$$R\cdot Mv+J_0\omega=J_A\omega', \tag{1}$$

cum $J_0=M\cdot R^2$, $J_A=J_0+M\cdot R^2=2M\cdot R^2$ și $\omega=v/R$, se deduce:

$$\omega'=\frac{v}{R}=\omega.$$

Cercul va avea o mișcare de rotație în jurul punctului A cu viteza unghiulară ω'.

Capitolul 16

DINAMICA SOLIDULUI RIGID

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

Solidul rigid liber are șase grade de libertate; ca urmare, poziția sa depinde de șase parametri scalari independenți. Pentru studierea mișcării este suficient să se folosească teorema impulsului și a momentului cinetic:

$$\dot{\bar{H}}=\bar{R};\quad \dot{\bar{K}}=\bar{M}_0. \tag{a}$$

În cazul mișcărilor particulare ale rigidului: mișcarea de translație, de rotație în jurul unei axe fixe, plan paralelă și mișcarea de rotație în jurul unui punct fix, aplicarea teoremelor generale prezintă unele simplificări în studiu.

2. **Mișcarea de translație.** Deoarece momentul rezultant este nul, problema se reduce la studiul mișcării unui singur punct a rigidului (centrul de masă), în care se admite că ar fi concentrată întreaga masă M a rigidului. Ecuațiile mișcării se reduc la:

$$M\ddot{\xi}=X;\ M\ddot{\eta}=Y;\ M\ddot{\zeta}=Z. \tag{b}$$

În acest caz impulsul este $\bar{H}=M\bar{v}_G$, unde M este masa totală a ridigului, iar momentul cinetic total $\bar{K}_0$ se calculează ca și cum toată masa ar fi concentrată în centrul de masă, și are expresia $\bar{K}_0=\bar{r}_c\times\bar{H}$.

3. **Mișcarea plan-paralelă a rigidului.** Această mișcare este determinată de trei grade de libertate și pot fi aleși ca parametri ce determină mișcarea: coordonatele $\xi=\xi(t)$, $\eta=\eta(t)$ ale centrului de masă G în raport cu sistemul fix de coordonate, și unghiul $\theta=\theta(t)$ dintre axele Ox_1 și Ox.

Teorema impulsului (a mișcării centrului de masă) și a momentului cinetic se reduc, în cazul mișcării plane, la următoarele trei ecuații scalare:

$$M\ddot{\xi}=X;\ M\ddot{\eta}=Y;\ J_z\ddot{\theta}=M_z, \tag{c}$$

unde J_z este momentul de inerție al rigidului în raport cu axa G_z ce trece prin centrul de masă, iar M_z suma momentelor tuturor forțelor exterioare față de axa Oz.

În calculul momentului cinetic se ține seama de teorema lui König (cap. XV A. 8 relația *l*)

4. **Mişcarea unui rigid în jurul unei axe fixe.** În cazul general al unui sistem de referinţă solidar cu corpul (fig. 16.1), caz în care $\bar{\omega}=\omega_x\bar{i}+\omega_y\bar{j}+\omega_x\bar{k}$, momentul cinetic se exprimă prin relaţia:

$$\bar{K}_0=K_x\bar{i}+K_y\bar{j}+K_z\bar{k}, \tag{d}$$

unde proiecţiile sale pe axe sînt:

$$\begin{aligned} K_x&=J_x\omega_x-J_{xy}\omega_y-J_{xz}\omega_z;\\ K_y&=-J_{yx}\omega_x+J_y\omega_y-J_{yz}\omega_z;\\ K_z&=-J_{zx}\omega_x-J_{zy}\omega_y+J_z\omega_z. \end{aligned} \tag{e}$$

Pentru cazurile particulare, în care axa Oz coincide cu axa de rotaţie, avem $\omega_x=\omega_y=0$ şi $\omega_z=\omega$, ca urmare:

$$\bar{K}_0=-J_{xz}\omega\bar{i}-J_{yz}\omega\bar{j}+J_z\omega\bar{k}. \tag{f}$$

Dacă în plus rigidul are forma unui corp de revoluţie, axa de simetrie fiind aleasă drept axă Oz, atunci $J_{yz}=J_{zx}=0$ şi momentul cinetic se reduce la $\bar{K}_0=J_z\omega\bar{k}$.

În acest ultim caz, raportăm mişcarea la un triedru triortogonal fix $Ox_1y_1z_1$ ales astfel încît axa Oz_1 să fie situată în lungul axei de rotaţie OO', definită de punctele fixe O, O' ale rigidului, iar planul x_1Oy_1 să treacă prin punctul fix O a rigidului. Notînd cu θ unghiul pe care-l face axa mobilă Ox a triedrului $xoyz$, legat de solidul mobil, cu axa fixă Ox_1, din teorema momentului cinetic rezultă ecuaţia de mişcare:

Fig. 16.1.

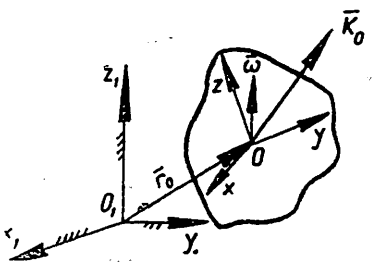
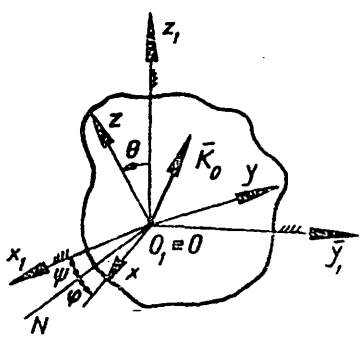


Fig. 16.2.



$$\frac{d}{dt}(J_\Delta\dot{\theta})=M_z, \tag{g}$$

unde M_z este momentul forţelor exterioare faţă de axa de rotaţie.

5. **Mişcarea unui rigid cu un punct fix** depinde de trei parametri independenţi, iar în funcţie de alegerea acestor parametri, rezolvarea problemei este mai mult sau mai puţin complicată. De obicei se aleg ca parametri independenţi unghiurile lui Euler (cap. XI), ψ, φ, θ, care definesc poziţia rigidului mobil în jurul unui punct fix O, prin cunoaşterea în fiecare moment a triedrului mobil T $(Oxyz)$, invariabil legat cu corpul, în raport cu un triedru fix T_1 $(Ox_1y_1z_1)$ (fig. 16.2).

Cunoscînd componentele vitezei unghiulare de rotaţie, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, se pot determina componentele vitezei unghiulare ω_x, ω_y, ω_z cu ajutorul relaţiilor (m) (cap. IX).

Astfel, se poate determina fie poziția rigidului prin unghiurile lui Euler, cunoscînd vitezele unghiulare, fie vectorul vitezei unghiulare $\overline{\omega}$, cunoscînd unghiurile lui Euler în funcție de timp.

Alegînd un sistem de referință legat de corpul *Oxyz*, axele principale de inerție în raport de punctul fix *O*, față de acest sistem de referință mobil momentul cinetic are expresia:

$$\overline{K}_0 = J_x\omega_x\bar{i} + J_y\omega_y\bar{j} + J_z\omega_z\bar{k}. \qquad (k)$$

Prin aplicarea teoremei momentului cinetic față de sistemul de referință mobil se obțin ecuațiile lui Euler:

$$\begin{aligned} \mathring{K}_{0x} &= J_x \cdot \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x; \\ \mathring{K}_{0y} &= J_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = M_y; \\ \mathring{K}_{0z} &= J_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_z, \end{aligned} \qquad (l)$$

în care M_x, M_y, M_z, sînt momentele forțelor exterioare față de axele *Ox*, *Oy*, *Oz*, ale triedrului mobil, iar J_x, J_y, J_z momentele de inerție ale rigidului în raport cu axele mobile, trecînd prin *O*.

Integrarea sistemului de ecuații diferențiale (11.2) rezolvă teoretic problema mișcării unui solid în jurul unui punct fix.

Practic însă nu se poate integra sistemul de ecuații diferențiale decît în unele cazuri particulare și anume:

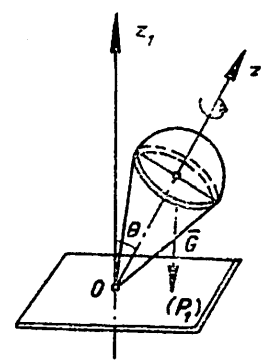
a) cazul Euler-Poinsot, cînd vectorul $\overline{M}\,(M_x, M_y, M_z)=0$, fapt care se produce cînd forțele exterioare se reduc la una singură, trecînd prin punctul fix;

b) cazul Lagrange-Poinsot, al solidului greu și care are centrul de greutate pe axa *Oz*, iar elipsoidul de inerție relativ la punctul fix este și de rotație în raport cu axa *Oz*;

c) cazul Kovalevska, în care solidul este greu, elipsoidul său de inerție relativ la punctul *O* este de rotație, iar centrul de greutate se află în planul normal la axa elipsoidului, trecînd prin punctul fix *O*.

Un caz particular al mișcării unui corp solid în jurul unui punct fix, cu aplicații foarte numeroase și importante pentru tehnică, este *giroscopul*.

Fig. 16.3.



Giroscopul este un solid rigid de revoluție $J_x = J_y$, care are un punct fix *O* pe axa sa de simetrie *Oz*, în jurul căreia i se dă o mișcare de rotație proprie ω, cu viteză foarte mare (fig. 16.3).

Sub acțiunea forțelor exterioare, axa giroscopului mai execută o mișcare de rotație ω_1 în jurul unei axe fixe Oz_1, numită mișcare de precesie, astfel că giroscopul are o mișcare rezul-

tantă ($\bar{\Omega}=\bar{\omega}+\bar{\omega}_1$). Dacă centrul de greutate G al giroscopului este sub punctul O, sensul de rotație se schimbă.

Mișcarea rezultantă a giroscopului apare ca o mișcare de rostogolire a unui *con rostogolitor* C_r cu deschiderea 2α, peste un *con de bază* C_b cu deschiderea 2β (fig. 16.4), între elementele cărora există relațiile:

$$\cos\alpha=\frac{\omega+\omega_1\cos\theta}{\Omega};\qquad \cos\beta=\frac{\omega_1+\omega\cos\theta}{\Omega};\tag{j}$$

$$\Omega^2=\omega^2+\omega_1^2+2\omega\omega_1\cos\theta;\quad \alpha+\beta=\theta.\tag{k}$$

Cînd θ și ω_1 sînt constante, vectorul $\bar{\omega}$ descrie un con fix, conul de precesie C_p, iar vectorul rezultant $\bar{\Omega}$ descrie conul de bază C_b. Suportul vectorului vitezei rezultante este axa instantanee de rotație a mișcării.

Viteza extremității vectorului moment cinetic K_z, numit *polul giroscopului*, este echipolentă în orice moment cu momentul rezultant al forțelor exterioare, proprietate care servește la determinarea sensului în care se produce mișcarea de precesie.

Giroscopul are o precesie regulată ($\omega_1=const$), dacă i se imprimă un cuplu de moment rezultant M_0, cu valoare constantă, cu axa perpendiculară pe planul $Oz z_1$, de mărime:

$$M_0=[J_z\omega+(J_z-J_x)\,\omega_1\cos\theta]\,\omega_1\sin\theta;\tag{l}$$

Dacă momentul forțelor exterioare $\bar{M}_0$ este nul, axa giroscopului rămîne fixă, căci viteza de precesie este nulă.

— În cazul $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$, rezultă

$$M_0=\pm J_z\omega\omega_1.\tag{m}$$

— Cînd $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ și $\omega>\omega_1$, rezultă

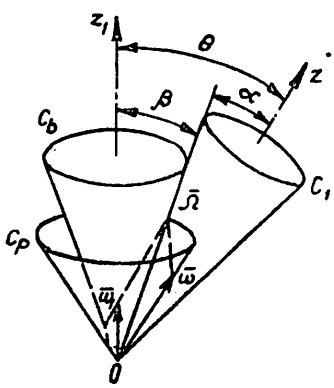
$$M_0=J_z\omega\omega_1\sin\theta,\tag{n}$$

— Dacă $J_z\omega+(J_z-J_x)\,\omega_1\cos\theta=0$, se obține de asemenea o precesie regulată.

Cuplului $\bar{M}_0$ i se opune din partea giroscopului un cuplu de inerție $\bar{M}_g$ numit *cuplu giroscopic*, de mărime:

$$M_g=M_0,$$

Fig. 16.4.



îndreptat perpendicular pe planul care trece prin axa de precesie și axa de simetrie a giroscopului și care are tendința să aducă vectorul $\bar{\omega}$ peste $\bar{\omega}_1$, pe drumul cel mai scurt, astfel ca sensurile pozitive ale vectorilor $\bar{\omega}$ și $\bar{\omega}_1$ să coincidă.

Fixînd axa giroscopului într-o armătură, cuplul $\bar{M}_0$ este produs de reacțiunile $\bar{R}_g$ ale armăturii asupra giroscopului, numite *reacțiuni giroscopice.*

Opuse reacțiunilor giroscopice sînt *presiunile giroscopice* care reprezintă acțiunea cuplului giroscopic $\bar{M}_g$ asupra axei de fixare a giroscopului.

În practică este necesar adesea să se studieze problema inversă și anume, presupunînd cunoscută mișcarea giroscopului, să se afle forțele exterioare care trebuie aplicate pentru a se obține mișcarea dorită. În acest caz, cunoscînd mișcarea, se poate ușor calcula partea întîi a ecuațiilor Euler și deci componentele momentului rezultant al forțelor exterioare care acționează asupra giroscopului.

B. PROBLEME REZOLVATE

16.1. O roată plină, cu raza $R=0{,}35$ m și greutatea $G=2{,}5$ kN are turația de regim $n_0=360$ rot/min. Să se determine valoarea cuplului de frecare în lagăre, presupus constant, dacă din momentul încetării acțiunii de rotire pînă la oprire trec 48 s.

Rezolvare. Scriind ecuația de momente în raport cu axa de rotație ($J_\Delta = const$) și ținînd seamă că cuplul de frecare C_f este rezistent, rezultă:

$$J_\Delta \ddot{\theta} = -C_f, \tag{1}$$

în care $J_\Delta = M\frac{R^2}{2}$.

Integrînd ecuația (1) și punînd condițiile inițiale ($t=0$ și $\omega=\omega_0$), rezultă:

$$\omega = -\frac{C_f}{J}t + \omega_0.$$

În momentul opririi $\omega=0$ și deci:

$$C_f = \frac{J_\Delta \omega_0}{t} = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{2\pi n_0}{60} \cdot \frac{1}{t} = 12 \text{ Nm}.$$

16.2. O rotiță cu raza R și greutatea G se poate roti fără frecare în jurul axului O. De unul din brațe este prins în M un arc spiral perfect elastic, avînd celălalt capăt fixat în N (fig. 16.5). Se rotește rotița cu unghiul α în sensul acelor unui ceasornic și apoi i se dă drumul. Să se determine mișcarea rotației. Luînd $R=3$ cm, $e=\frac{R}{2}$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $K=6\cdot10^{-3}$ N, să se găsească ce greutate trebuie să aibă rotația pentru ca să bată secunda (se va lua $J=MR^2$).

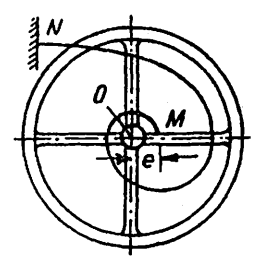
Rezolvare. Notînd cu θ unghiul care definește la un moment dat poziția rotiței în mișcare, se poate scrie:

$$J\ddot{\theta} = -Fe, \tag{1}$$

în care F este forța aplicată în M datorită acțiunii arcului și egală cu:

$$F = K\frac{\theta}{\alpha}.$$

Fig. 16.5.



În acest caz, ecuația (1) devine:

$$J\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0,$$

unde s-a notat $\omega_n=\sqrt{\frac{Ke}{aJ}}$.

Integrînd, se obţine:

$$\theta=C_1\cos\omega_n t+C_2\sin\omega_n t.$$

Din condiţiile iniţiale $t=0$, $\theta=\alpha$, $\frac{d\theta}{dt}=0$, rezultă valorile constantelor de integrare: $C_1=\alpha$ şi $C_2=0$, aşa încît ecuaţia mişcării este:

$$\theta=\alpha\cos\omega_n t. \tag{2}$$

Rotiţa va avea o mişcare oscilatorie armonică de amplitudine α şi perioadă:

$$T=2\pi R\sqrt{\frac{G\alpha}{gce}}. \tag{3}$$

Pentru ca rotiţa să bată secunda trebuie ca $T=2$, iar din relaţia (3) se deduce valoarea lui G:

$$G=\frac{2gce}{\alpha\pi^2R^2}=8{,}33\cdot10^{-2}\text{ N}.$$

16.3. Un volant este rotit cu ajutorul unui cuplu pulsator $M_0\cos\omega t$. Pentru a menţine viteza unghiulară constantă, pe două braţe ale volantului s-au montat, şi pot aluneca fără frecare, două bile de greutăţi egale G. La momentul iniţial cele două bile găsindu-se la distanţa r_0 de axul de rotaţie, să se determine variaţia distanţei r cu viteza unghiulară (fig. 16.6).

Rezolvare. Viteza unghiulară a volantului este constantă, însă prin faptul că bilele se deplasează de la centru spre periferie momentul de inerţie total:

$$J=J_0+\frac{2G}{g}r^2,$$

variază.

Din această cauză, ecuaţia de momente în raport cu axul de rotaţie, este:

$$\frac{dk}{dt}=M_0\cos\omega t \quad\text{sau}\quad \frac{2G}{g}\frac{d}{dt}(r^2)=\frac{M_0\cos\omega t}{\omega}.$$

Integrînd, rezultă:

$$r^2=\frac{M_0g}{2G\omega^2}\sin\omega t+C.$$

Pentru condiţiile iniţiale: $t=0$ şi $r=r_0$, constanta de integrare este $C=r_0^2$ şi ca urmare:

$$r=\sqrt{r_0^2+\frac{M_0g}{2G\omega^2}\sin\omega t}.$$

Fig. 16.6.

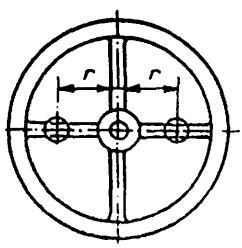
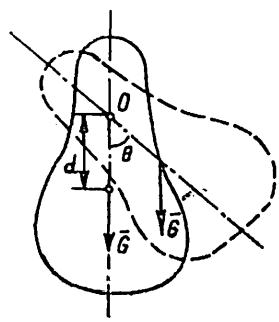


Fig. 16.7.



16.4. Să se afle perioada de oscilaţie a unui pendul fizic şi să se determine lungimea pendulului simplu sincron (fig. 16.7).

Rezolvare. Neglijînd frecarea în ax şi rezistenţa aerului, singura forţă activă

este greutatea proprie G. Scriind ecuația de momente în jurul axei de oscilație, rezultă:

$$J_0\ddot{\theta}=\sum M=-G\cdot d\cdot\sin\theta. \tag{1}$$

Pentru unghiuri mici, $\sin\theta\approx\theta$ și deci,

$$\ddot{\theta}+\frac{Gd}{J_0}\theta=0. \tag{2}$$

Notînd: $\frac{Gd}{J_0}=\omega^2$, perioada de oscilație devine:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J_0}{Gd}}. \tag{3}$$

În cazul cînd corpul se reduce la un fir fără greutate proprie, de lungime l, de care este atîrnată greutatea G, rezultă $J_0=\frac{G}{g}l^2$ și se regăsește formula care dă perioada unui pendul matematic:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{4}$$

Pentru ca cele două perioade date de formulele (3) și (4) să fie egale și deci pendulul fizic și matematic să fie sincrone, trebuie ca:

$$\frac{l_e}{g}=\frac{J_0}{Gd}\quad\text{deci}\quad l_e=\frac{J_0}{Md},$$

în care l_e este lungimea pendulului echivalent (sincron).

Dacă prin centrul de greutate se duce o axă paralelă cu axa de oscilație și introducînd raza de inerție i, momentul de inerție în raport cu această axă se poate scrie succesiv:

$$J_0=J_G+Md^2=M\,(i^2+d^2)$$

și

$$OO'=l_e=\frac{J_0}{Md}=d+\frac{i^2}{d}.$$

Paralela dusă prin O' la axa de rotație este axa de oscilație și are proprietatea că orice punct al solidului situat pe axa de oscilație se mișcă ca și cum ar fi izolat și legat direct de axa de rotație printr-un fir inextensibil, fără masă.

Axele de rotație și de oscilație sînt reciproce, una putînd juca rolul celeilalte.

16.5. Să se determine în lungul unei bare omogene de lungime L un punct O, astfel încît bara oscilînd în jurul unui ax care trece prin O să aibă perioada de oscilație minimă.

Rezolvare. Perioada de oscilație variază în funcție de lungimea pendulului echivalent l_e, dată de relația

$$l_e=\frac{i^2+d^2}{d}.$$

Variația lui l_e în raport cu d este arătată în figura 16.8. Se observă că l_e are o valoare minimă, $2i$, care corespunde unei perioade

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2i}{g}}.$$

16.6. Rupîndu-se cablul de susținere al podului care face obiectul problemei 4.4 atunci cînd se găsește în repaus, într-o poziție definită de unghiul θ_0, el va avea o mișcare de rotație în jurul axului din O (fig. 16.9). Să se calculeze viteza unghiulară și reacțiunile din ax, la un moment dat.

Rezolvare. Pentru poziția definită de unghiul θ, ecuațiile de mișcare ale podului, scrise în sistemul de axe de coordonate ales, sînt:

$$M\ddot{\xi}=H; \tag{1}$$

$$M\ddot{\eta}=V-Mg; \tag{2}$$

$$J_0\ddot{\theta}=-Mg\frac{l}{2}\cos\theta, \tag{3}$$

în care H și V sînt componentele reacțiunii din ax.

Deoarece $J_0=\frac{Ml^2}{3}$, din ultima ecuație se deduce:

$$\ddot{\theta}=-\frac{3g}{2l}\cos\theta. \tag{4}$$

Pentru a se determina viteza unghiulară, se integrează ecuația (4), obținîndu-se:

$$\omega^2=-\frac{3g}{l}\sin\theta+C.$$

Pentru $t=0$, $\theta=\theta_0$ și $\omega=0$, așa încît:

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\theta_0-\sin\theta)}. \tag{5}$$

Din ecuațiile (1) și (2) se determină reacțiunile în stare dinamică. Cum între valorile ξ, η și θ există relațiile

$$\xi=\frac{l}{2}\cos\theta \quad \text{și} \quad \eta=\frac{l}{2}\sin\theta,$$

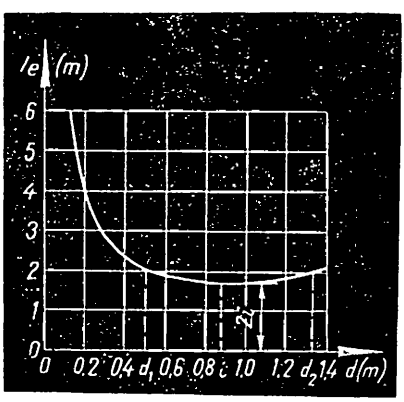


Fig. 16.8.

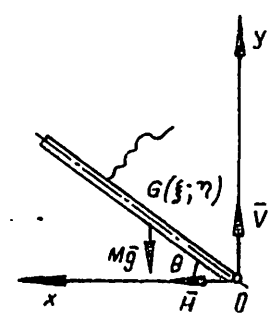


Fig. 16.9.

prin derivare se obține:

$$\ddot{\xi}=-\frac{l}{2}(\dot{\theta}^2\cdot\cos\theta+\ddot{\theta}\cdot\sin\theta); \tag{6}$$

$$\ddot{\eta}=-\frac{l}{2}(\dot{\theta}^2\cdot\sin\theta-\ddot{\theta}^2\cdot\cos\theta). \tag{7}$$

Înlocuind valorile (6) și (7) în (1) și (2), și ținînd seamă de relațiile (4) și (5), rezultă:

$$H=\frac{3}{4}Mg\,(3\sin\theta-2\sin\theta_0)\cos\theta;$$

$$V=\frac{Mg}{4}+\frac{3}{4}Mg\,(3\sin\theta-2\sin\theta_0)\sin\theta.$$

Observație: Componenta orizontală a reacțiunii se anulează pentru:

$$\sin\theta=\frac{2}{3}\sin\theta_0.$$

Dacă $\sin\theta<\frac{2}{3}\sin\theta_0$, această componentă schimbă de sens.

În cazul particular cînd podul ajunge în planul orizontal ($\theta_0=0$), componentele reacțiunii devin:

$$H=-\frac{3}{2}Mg\sin\theta_0 \quad \text{și} \quad V=\frac{1}{4}Mg,$$

de unde reacțiunea:

$$R=\frac{1}{4}Mg\sqrt{1+36\sin^2\theta_0}.$$

16.7. O scară cu lungimea $2l$ și greutatea G alunecă fără frecare de-a lungul pămîntului și unui perete vertical (fig. 16.10). Știind că poziția sa inițială este definită de unghiul θ_0 pe care-l face cu peretele vertical, să se determine mișcarea scării și reacțiunile planurilor. Dacă $\theta_0=30°$, care este valoarea unghiului θ_1 pentru care scarea se va depărta de perete?

Rezolvare. Ecuațiile mișcării sînt:

$$M\ddot{\xi}=N_B; \tag{1}$$

$$M\ddot{\eta}=N_A-G; \tag{2}$$

$$J_G\ddot{\theta}=N_Al\sin\theta-N_Bl\cos\theta, \tag{3}$$

unde $\xi=l\sin\theta$ și $\eta=l\cos\theta$, sînt coordonatele centrului de greutate ale scării.

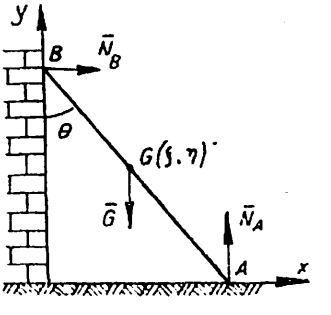
Prin derivări succesive se obține:

$$\dot{\xi}=l\dot{\theta}\cos\theta; \quad \dot{\eta}=-l\dot{\theta}\sin\theta;$$

$$\ddot{\xi}=-l\dot{\theta}^2\sin\theta+l\ddot{\theta}\cos\theta;$$

$$\ddot{\eta}=-l\dot{\theta}^2\cos\theta-l\ddot{\theta}\sin\theta.$$

Fig. 16.10.



Exprimînd în ecuațiile (1) și (2) pe $\ddot{\xi}$ și $\ddot{\eta}$ în funcție de $\dot{\theta}$ și $\ddot{\theta}$ și știind că $J_G = \frac{Ml^2}{3}$, ecuațiile de mișcare ale scării devin:

$$Ml(-\dot{\theta}^2 \sin\theta + \ddot{\theta}^2 \cos\theta) = N_B; \tag{6}$$

$$-Ml(\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta}^2 \sin\theta) = N_A - G; \tag{7}$$

$$\ddot{\theta}\frac{Ml}{3} = N_A \sin\theta - N_B \cos\theta. \tag{8}$$

S-a ajuns la un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute: N_A, N_B și θ.

Eliminînd pe N_A și N_B din ecuațiile (6), (7) și (8), se obține ecuația diferențială:

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l}\sin\theta. \tag{9}$$

Integrînd această ecuație și ținînd seamă de condițiile inițiale $\theta = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, se obține:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l}(\cos\theta_0 - \cos\theta). \tag{10}$$

Introducînd expresiile (9) și (10) în ecuațiile (6) și (7), rezultă:

$$N_B = \frac{3}{4}G\sin\theta(3\cos\theta - 2\cos\theta_0);$$

$$N_A = \frac{G}{4} + \frac{3}{4}G\cos\theta(3\cos\theta - 2\cos\theta_0).$$

Scara se deslipește de perete atunci cînd $N_B = 0$, adică:

$$3\cos\theta_1 - 2\cos\theta_0 = 0 \quad \text{sau} \quad \cos\theta_1 = \frac{2}{3}\cos\theta_0.$$

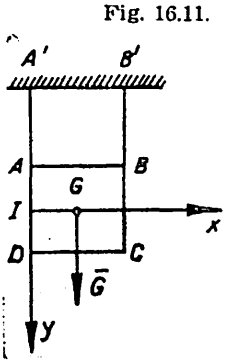
În cazul cînd $\theta_0 = 30°$ rezultă $\theta_1 = 53°45'$.

16.8. O placă pătrată, cu latura a și greutatea G, este prinsă cu două fire AA' și BB' (fig. 16.11). Rupîndu-se firul BB', să se afle în acel moment tensiunea în firul AA'.

Rezolvare. După ce s-a rupt firul, placa are o mișcare plană, care în momentul inițial are centrul instantaneu de rotație I, mijlocul lui AD.

Aplicînd teoremele mișcării centrului de masă $G(\xi, \eta)$ și a momentului cinetic a plăcii în jurul punctului I, se poate scrie:

Fig. 16.11.



$$\frac{G}{g}\ddot{\xi} = 0; \quad \frac{G}{g}\ddot{\eta} = G - T$$

și

$$J_I\ddot{\theta} = G\cdot\frac{a}{2}.$$

Pentru o coborîre a centrului de greutate cu η, placa se rotește cu θ și $\eta=\frac{a}{2}\theta$, de unde, prin derivări succesive, se deduce:

$$\ddot{\eta}=\frac{a}{2}\ddot{\theta}$$

și

$$J_I=J_x+J_y=M\frac{a^2}{12}+M\frac{a^2}{12}+M\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{12}Ma^2.$$

Eliminînd termenii θ și $\ddot{\eta}$ din ecuațiile de mai sus, se obține: $T=\frac{2}{5}P$ în stare dinamică, față de: $T=\frac{1}{2}P$ în stare statică.

16.9. O bară omogenă cu lungimea $2b$ și masă M, este prinsă de un cui cu ajutorul a două fire de lungime l. Prinderea se face în punctele A și B, astfel încît $AG=GB=a$. La un moment dat, firul OB rupîndu-se, bara se va deplasa față de poziția de repaus (fig. 16.12). Să se definească mișcarea barei și tensiunea din firul AO.

Rezolvare. Notînd cu ξ și η coordonatele centrului de greutate al barei, ecuațiile de mișcare sînt:

$$M\ddot{\xi}=T\sin\varphi; \tag{1}$$

$$M\ddot{\eta}=Mg-T\cos\varphi; \tag{2}$$

$$J_G\ddot{\theta}=Ta\cos\varphi. \tag{3}$$

Între ξ, η și θ există următoarele relații:

$$\xi=a\cos\theta-l\sin\varphi; \quad \eta=a\sin\theta+l\cos\varphi.$$

Prin diferențiere, neglijînd pătratele vitezelor $\dot{\theta}$ și $\dot{\eta}$ care inițial sînt nule, se obține:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}&=-a\ddot{\theta}\sin\theta-l\ddot{\varphi}\cos\varphi;\\ \ddot{\eta}&=a\ddot{\theta}\cos\theta-l\ddot{\varphi}\sin\varphi.\end{aligned} \tag{4}$$

În poziția inițială, la începutul mișcării, $\theta=0$, $\varphi=\varphi_0$ și $a=l\sin\varphi_0$.

Ținînd seamă de relațiile (4) și de valoarea

$$J_G=\frac{1}{3}Mb^2,$$

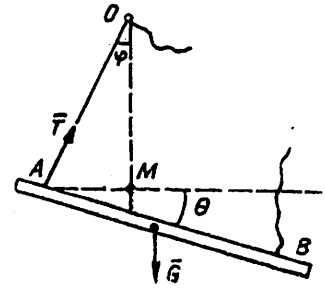
relațiile (1), (2) și (3) devin:

$$-Ml\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)=T\sin(\varphi-\theta)+Mg\sin\theta \tag{1'}$$

$$Ma\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi)=Mg\cos\varphi-T \tag{2'}$$

$$\frac{1}{3}Mb^2\ddot{\theta}=Ta\cos\varphi \tag{3'}$$

Fig. 16.12.



care, datorită condițiilor inițiale, devin:

$$-Ml\ddot{\varphi}\cos\varphi_0 = T\sin\varphi_0; \tag{1''}$$

$$Ma\ddot{\theta}\cos\varphi_0 = Mg - T\cos\varphi_0; \tag{2''}$$

$$\frac{1}{3}Mb^2\ddot{\theta} = Ta\cos\varphi_0. \tag{3''}$$

Rezolvînd sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute rezultă $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$ și T:

$$\ddot{\varphi} = -g\frac{b^2\sin\varphi_0}{l(3a^2\cos^2\varphi_0 + b^2)};$$

$$\ddot{\theta} = g\frac{3a\cos^2\varphi_0}{3a^2\cos^2\varphi_0 + b^2};$$

$$T = Mg\frac{b^2\cos\varphi_0}{3a^2\cos^2\varphi_0 + b^2}.$$

În cazul particular, cînd bara este atîrnată de capetele ei, $a=b$ și atunci relațiile de mai sus devin:

$$\ddot{\varphi} = -g\frac{\sin\varphi_0}{l(3\cos^2\varphi_0 + 1)}; \quad \ddot{\theta} = g\frac{3\cos^2\varphi_0}{b(3\cos^2\varphi_0 + 1)}; \quad T = Mg\frac{\cos\varphi_0}{3\cos^2\varphi_0 + 1}.$$

16.10. Să se studieze mișcarea unui cilindru omogen plin, cu masa M, pe un plan înclinat cu un unghi α, ținînd seamă atît de frecarea de alunecare, cît și de frecarea de rostogolire (fig. 16.13).

Rezolvare. În cazul general, cilindrul va avea o mișcare care se poate descompune într-o translație egală cu aceea a centrului de greutate G și o mișcare de rotație în jurul centrului de greutate. Ecuațiile de mișcare sînt:

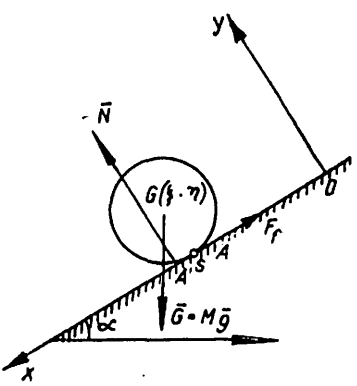
$$M\ddot{\xi} = Mg\sin\alpha - F_f; \tag{1}$$

$$M\ddot{\eta} = N - Mg\cos\alpha; \tag{2}$$

$$J\ddot{\theta} = F_f R - Ns, \tag{3}$$

în care F_f este forța de frecare care are sensul din figură, iar $J = \frac{MR^2}{2}$ este momentul de inerție în raport cu axa care trece prin centrul de greutate.

Fig. 16.13.



Cum $\eta = R = const$, rezultă $\ddot{\eta} = 0$, așa încît din relația (2) se obține:

$$N = Mg\cos\alpha.$$

Avînd trei necunoscute (ξ, θ și F_f) și numai două ecuații (1) și (3), pentru studierea mișcării se introduce o relație suplimentară, după felul mișcării.

a) Cilindrul are numai alunecare. Relația suplimentară este în acest caz la limită:

$$F_f = \mu N = \mu Mg\cos\alpha \tag{4}$$

şi trebuie îndeplinite simultan condiţiile:

$$\xi>0 \quad \text{şi} \quad \ddot{\theta}\leqslant 0. \tag{5}$$

Rezolvînd sistemul format de ecuaţiile (1), (3) şi (4), se deduce:

$$\xi=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=const,$$

şi

$$\ddot{\theta}=\frac{2g\sin\alpha}{R^2}(R-s).$$

Condiţiile de existenţă a mişcării de alunecare fără rotirea cilindrului, conform relaţiilor (5), sînt:

$$\mu<\operatorname{tg}\alpha \quad \text{şi} \quad \mu\leqslant\frac{s}{R}.$$

b) Cilindrul se rostogoleşte fără să alunece. Relaţia suplimentară în acest caz este:

$$\xi=R\theta, \text{ de unde: } \ddot{\xi}=R\ddot{\theta} \tag{6}$$

şi trebuie îndeplinite simultan condiţiile:

$$\ddot{\theta}>0 \quad \text{şi} \quad F_f<\mu N. \tag{7}$$

Din rezolvarea sistemului format din ecuaţiile (1), (3) şi (6), se deduce:

$$\ddot{\theta}=\frac{2}{3}\frac{g}{R^2}(R\sin\alpha-s\cos\alpha);$$

$$F_f=Mg\frac{R\sin\alpha+2s\cos\alpha}{3R}.$$

Condiţiile de existenţă a mişcării de rostogolire fără alunecare, conform relaţiilor (7), sînt deci:

$$\frac{s}{R}<\operatorname{tg}\alpha<3\mu-\frac{2s}{R}.$$

c) Cilindrul se rostogoleşte cu alunecare. Notînd cu x deplasarea cilindrului datorită alunecării, relaţia suplimentară în acest caz este:

$$\xi=x+R\theta, \text{ de unde } \ddot{\xi}=\ddot{x}+R\ddot{\theta} \tag{8}$$

şi trebuie îndeplinite simultan condiţiile:

$$\ddot{x}>0;\ \ddot{\theta}>0;\ F_f=\mu N \text{ (la limită)}. \tag{9}$$

În acest caz ecuaţia (1) devine:

$$M\ddot{x}+R\ddot{\theta}=Mg\sin\alpha-F_f. \tag{1'}$$

Rezolvînd sistemul format de ecuaţiile (1') şi (3), rezultă:

$$\ddot{x}=g\left[\sin\alpha-\left(3\mu-2\frac{s}{R}\right)\cos\alpha\right];$$

$$\ddot{\theta}=\frac{2g}{R}\cdot\left(\mu-\frac{s}{R}\right)\cos\alpha.$$

Condiţiile de existenţă a mişcării de rostogolire cu alunecare, conform relaţiilor (9), sînt deci:

$$\operatorname{tg}\alpha>3\mu-2\frac{s}{R}\quad\text{şi}\quad\mu>\frac{s}{R}.$$

16.11. O roată avînd centrul de greutate la o distanţă a de centrul de simetrie, se rostogoleşte, fără alunecare, pe o şină orizontală (fig. 16.14). Să se determine ecuaţia de mişcare a roţii, atunci cînd asupra roţii nu se exercită nici o forţă sau cuplu exterior.

Rezolvare. Mişcarea roţii poate fi descompusă într-o translaţie identică cu aceea a centrului de greutate G şi o mişcare de rotaţie în jurul centrului de greutate G. Notînd cu $J=mi^2$ momentul de inerţie al roţii şi i raza de inerţie, se pot scrie ecuaţiile de mişcare:

$$m\ddot{\xi}=-F;\quad m\ddot{\eta}=N-mg;$$

$$mi^2\ddot{\theta}=-Na\cos\theta-F(r+a\sin\theta),$$

în care:

$$\xi=x+a\cos\theta;\quad\eta=r+a\sin\theta;$$

$$\dot{\xi}=\dot{x}-a\dot{\theta}\sin\theta;\quad\dot{\eta}=a\dot{\theta}\cos\theta;$$

$$\ddot{\xi}=\ddot{x}-a\dot{\theta}^2\cos\theta-a\dot{\theta}^2\sin\theta;\quad\ddot{\eta}=-a\dot{\theta}^2\sin\theta+a\dot{\theta}^2\cos\theta.$$

Înlocuind valorile de mai sus în sistemul de ecuaţii (1), se obţine:

$$\ddot{x}-a\ddot{\theta}\sin\theta-a\dot{\theta}^2\cos\theta=-\frac{F}{m};\tag{2}$$

$$a\ddot{\theta}\cos\theta-a\dot{\theta}^2\sin\theta=\frac{N}{m}-g;\tag{3}$$

$$i\ddot{\theta}=-\frac{N}{m}a\cos\theta-\frac{F}{m}(r+a\sin\theta).\tag{4}$$

Avînd rostogolire fără alunecare, se mai adaugă ecuaţia de condiţie:

$$x=-r\theta,$$

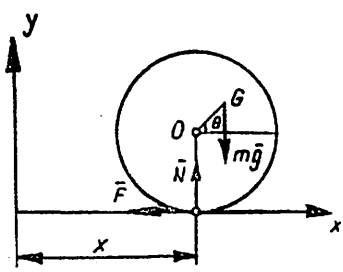
de unde:

$$\ddot{x}=-r\ddot{\theta}.$$

În acest caz, ecuaţia de mişcare (2) devine:

$$(r+a\sin\theta)\ddot{\theta}+a\cos\theta\,\dot{\theta}^2=\frac{F}{m}.\tag{5}$$

Fig. 16.14.



Sistemul are trei ecuații și trei necunoscute: F, N și θ. Rezolvarea se poate face direct prin determinarea accelerației unghiulare $\ddot{\theta}$, sau se poate folosi o relație suplimentară între necunoscute, rezultată prin aplicarea teoremei energiei. Aplicarea acestei teoreme nu reprezintă decît un artificiu de calcul, care conduce uneori mai ușor la rezultat. Aplicînd această metodă, energia cinetică a roții este:

$$E=\frac{1}{2}m[\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+i^2\dot{\theta}^2]=\frac{1}{2}m[(r+a\sin\theta)^2+i^2+a^2\cos^2\theta]\dot{\theta}^2.$$

Cum forța F este aplicată în centrul instantaneu de rotație, nu produce lucru mecanic, variația lucrului mecanic este dată numai de greutatea roții. În poziția inițială, centrul de greutate fiind definit de unghiul θ_0, și de distanța a, lucrul mecanic este:

$$L=a(\sin\theta_0-\sin\theta)\,mg,$$

de unde:

$$\frac{1}{2}m[(r+a\sin\theta)^2+i^2+a^2\cos^2\theta]\dot{\theta}^2=a(\sin\theta_0-\sin\theta)\,mg$$

care dă:

$$\dot{\theta}=\frac{2a(\sin\theta_0-\sin\theta)}{(r+a\sin\theta)^2+i^2+a^2\cos^2\theta}. \tag{8}$$

Înlocuind pe $\dot{\theta}^2$ în ecuațiile (5) și (6) cu valoarea determinată în (8) se obține sistemul:

$$(r+a\sin\theta)\ddot{\theta}-\frac{F}{m}=-\frac{2a^2(\sin\theta_0-\sin\theta)\cos\theta}{(r+a\sin\theta)^2+i^2+a^2\cos^2\theta}; \tag{9}$$

$$a\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{N}{m}=-g+\frac{2a^2(\sin\theta_0-\sin\theta)\sin\theta}{(r+a\sin\theta)^2+i^2+a^2\cos^2\theta}; \tag{10}$$

$$i^2\cdot\ddot{\theta}+\frac{N}{m}a\cos\theta+\frac{F}{m}(r+a\cos\theta)=0. \tag{11}$$

Determinantul coeficienților necunoscutelor este:

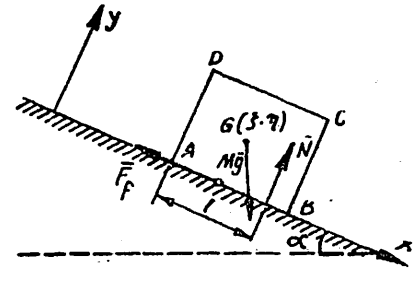
$$\Delta=\begin{vmatrix} r+a\sin\theta & -1 & 0 \\ a\cos\theta & 0 & -1 \\ i^2 & r+a\sin\theta & a\cos\theta \end{vmatrix}=i^2+(r+a\sin\theta)^2+a^2\cos\theta,$$

iar accelerația unghiulară devine:

$$\ddot{\theta}=-\frac{a\cos\theta}{\Delta}\left[g+\frac{2ar(\sin\theta_0-\sin\theta)}{(r+a\sin^2\theta)^2+i^2+a^2\cos^2\theta}\right].$$

16.12. Un bloc de piatră, de forma unui cub omogen cu masa M și latura a, se găsește în repaus pe o rampă înclinată față de orizontală cu unghiul α (fig. 16.15). Să se studieze mișcarea blocului atunci cînd între plan și corp există frecare de alunecare.

Fig. 16.15.



Rezolvare. Cazurile posibile de mişcare ale blocului sînt: alunecare, rostogolire fără alunecare, rostogolire cu alunecare.

a) Alunecare. Ecuaţiile de mişcare ale centrului de greutate, scrise în raport cu axele de coordonate alese, sînt:

$$M\ddot{\xi}=Mg\sin\alpha-F_f; \tag{1}$$

$$M\ddot{\eta}=N-Mg\cos\alpha \tag{2}$$

şi, ţinînd seamă şi de o mişcare posibilă în jurul centrului de greutate:

$$J\ddot{\theta}=N\left(l-\frac{a}{2}\right)-F_f\cdot\frac{a}{2}\cdot \tag{3}$$

Cum $\eta=\frac{a}{2}=const.$ şi nu există nici o rotire în jurul centrului de greutate:

$$\ddot{\eta}=0 \quad \text{şi} \quad \ddot{\theta}=0. \tag{4}$$

Pentru a avea alunecare fără rotire, trebuie ca:

$$\ddot{\xi}>0; \quad F=\mu N \quad \text{şi} \quad 0<l<a. \tag{5}$$

Din rezolvarea sistemului, format din ecuaţiile (1), (2) şi (3), rezultă:

$$\ddot{\xi}=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha); \quad N=Mg\cos\alpha; \quad l=\frac{a}{2}(1+\mu).$$

Condiţiile de existenţă ale mişcării de alunecare, aşa după cum reiese din relaţiile (5) şi soluţiile sistemului, sînt:

$$\mu<\operatorname{tg}\alpha \quad \text{şi} \quad \mu<1.$$

b) Rostogolire fără alunecare. Rotirea blocului nu se poate face decît în jurul muchiei care trece prin B şi normală la faţa $ABCD$. Considerînd poziţia limită a cubului în momentul începutului mişcării de rotaţie (fig. 16.16), centrul de greutate va fi definit de coordonatele ξ, η, altele decît cele indicate la punctul *a*). Ecuaţiile de mişcare ale blocului sînt:

$$M\ddot{\xi}=Mg\sin\alpha-F_f; \tag{6}$$

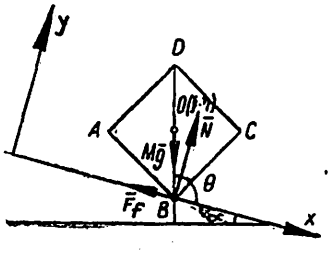
$$M\ddot{\eta}=N-Mg\cos\alpha; \tag{7}$$

$$J\ddot{\theta}=-N\frac{a}{2}-F_f\frac{a}{2}. \tag{8}$$

în care J este momentul de inerţie al cubului în raport cu o axă trecînd prin centrul de greutate G, normală pe planul xOy, de valoare:

$$J=M\frac{a^2}{6}.$$

Fig. 16.16.



Existînd numai rotire, relaţia suplimentară de condiţie, care permite rezolvarea sistemului, este:

$$\xi=\eta=-\frac{a}{2}\theta, \quad \text{de unde} \quad \ddot{\xi}=\ddot{\eta}=-\frac{a}{2}\ddot{\theta},$$

iar ca mişcarea să se producă trebuie ca:

$$\ddot{\theta}>0 \quad \text{şi} \quad F_f<\mu N. \tag{9}$$

Din rezolvarea sistemului, rezultă:

$$\ddot{\theta}=\frac{3g}{4a}(\cos\alpha-\sin\alpha);\quad N=\frac{Mg}{8}(3\sin\alpha+5\cos\alpha);$$

$$F_f=\frac{Mg}{8}(5\sin\alpha+3\cos\alpha).$$

Această mişcare este posibilă atunci cînd:

$$\operatorname{tg}\alpha>1 \text{ şi } (5-3\mu)\operatorname{tg}\alpha<5\mu-3.$$

c) Rostogolire cu alunecare. Relaţia suplimentară în acest caz este:

$$\xi=x-\frac{a}{2}\theta, \quad \text{de unde:} \quad \ddot{\xi}=\ddot{x}-\frac{a}{2}\ddot{\theta}$$

şi trebuie îndeplinite simultan condiţiile:

$$\ddot{x}>0;\quad \ddot{\theta}>0;\quad F_f=\mu N. \tag{10}$$

Din rezolvarea sistemului rezultă:

$$\ddot{x}=g\frac{(3-5\mu)\cos\alpha+(5-3\mu)\sin\alpha}{5-3\mu};$$

$$\ddot{\theta}=\frac{6(1-\mu)g\cos\alpha}{a(5-3\mu)};\qquad N=\frac{2Mg\cos\alpha}{5-3\mu}.$$

Condiţiile de existenţă ale mişcării de rostogolire cu alunecare sînt date de inegalităţile:

$$1<\mu<\frac{5}{3} \text{ şi } (5-3\mu)\operatorname{tg}\alpha>5\mu-3.$$

Observaţie: Condiţiile de existenţă ale diferitelor categorii de mişcări pot fi deduse în mod sugestiv printr-o construcţie grafică (fig. 16.17).

Astfel, dacă într-un sistem de axe de coordonate (λ, μ), în care $\operatorname{tg}\alpha=\lambda$, se trasează curbele:

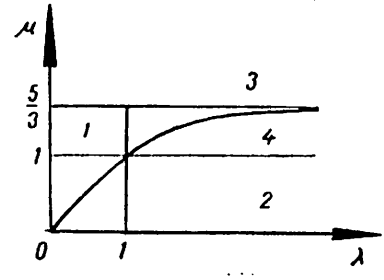
$$\mu=1;\quad \lambda=1;\quad \lambda=\mu;$$

$$(5-3\mu)\lambda+3-5\mu=0,$$

rezultă:

regiunea 1 — echilibru;
regiunea 2 — alunecare fără rotire;
regiunea 3 — rostogolire fără alunecare;
regiunea 4 — rostogolire cu alunecare.

Fig. 16.17.



16.13. Pentru a determina momentul de inerţie al unei elice, se montează la axul unui tambur

cu raza r şi momentul de inerţie J_r (fig. 16.18). Peste tambur este înfăşurat un fir avînd la capăt o greutate P. Cronometrînd timpul T necesar greutăţii P să parcurgă spaţiul h, să se calculeze momentul de inerţie J_e al elicei. Se neglijează frecările.

Rezolvare. Izolînd corpurile, se pot scrie ecuaţiile de mişcare a fiecărui corp în parte:

— tamburul cu elice:

$$(J_e+J_r)\,\ddot{\theta}=Tr, \tag{1}$$

în care T este tensiunea din fir;

— corpul P:

$$\frac{P}{g}\ddot{x}=P-T. \tag{2}$$

Eliminînd pe T din cele două ecuaţii şi ştiind că $\ddot{\theta}=\frac{1}{r}\ddot{x}$, se obţine:

$$\left(J_e+J_r+\frac{P}{g}r^2\right)\ddot{x}=Pr^2.$$

Integrînd, rezultă:

$$x=\frac{Pr^2}{2\left(J_e+J_r+\frac{P}{g}r^2\right)}t^2+C_1t+C_2. \tag{3}$$

Punînd condiţiile iniţiale $t=0$, $x=c$, $v=0$, constantele de integrare devin: $C_1=0$ şi $C_2=c$, aşa încît relaţia se poate scrie:

$$x=c+\frac{Pr^2}{2\left(J_e+J_r+\frac{P}{g}r^2\right)}t^2.$$

La timpul $t=T$, $x-c=h$, scoţînd valoarea lui J_e se găseşte:

$$J_e=\frac{Pr^2}{g}\left(\frac{gT^2}{2h}-1\right)-J_r.$$

16.14. Un fus de forma unui cilindru circular drept, cu raza r şi înălţimea $4r$, terminat la capete cu două conuri de înălţime $4r$, se învîrteşte în jurul axei sale cu turaţia n (fig. 16.19). Presupunînd conul rezemat într-un vîrf pe un plan orizontal, iar înclinarea conului faţă de verticală fiind θ, să se arate că fusul va avea o mişcare de precesie, cu viteza unghiulară ω_1. Aplicaţie: $r=3$ cm; $n=200$ rot/min.

Fig. 16.18.

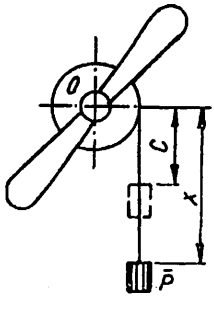
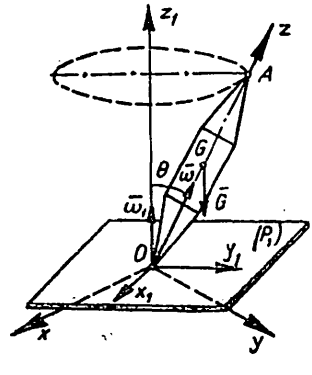


Fig. 16.19.



Rezolvare. În cazul fusului, care constituie un giroscop, $J_x=J_y=J$ şi asupra lui acţionînd un cuplu de moment M_0 (produs de greutatea proprie G), perpendicular pe planul z_1Oz, de componente:

$$M_x=M_0\cos\varphi;\quad M_y=M_0\sin\varphi;\quad M_z=0,$$

ecuațiile lui Euler devin:

$$J\frac{d\omega_x}{dt}+(J_z-J)\,\omega_y\omega_z=M_x;$$

$$J\frac{d\omega_y}{dt}+(J-J_z)\,\omega_z\omega_x=M_y; \qquad (1)$$

$$J_z\frac{d\omega_z}{dt}=M_z.$$

Se observă că soluțiile $\psi=\omega_1 t$, $\varphi=\omega t$ și $\theta=const$ verifică sistemul de ecuații Euler. În adevăr, cu aceste valori componentele ω_x, ω_y, ω_z devin:

$$\omega_x=\omega_1\sin\theta\sin\omega t;$$

$$\omega_y=\omega_1\sin\theta\cos\omega t,$$

$$\omega_z=\omega+\omega_1\cos\theta.$$

În acest caz relațiile (1) devin:

$$J\omega_1\omega\sin\theta\cos\omega t+(J_z-J)\,\omega_1(\omega+\omega_1\cos\theta)\sin\theta\cos\omega t=M_0\cos\omega t;$$

$$-J\omega_1\omega\sin\theta\sin\omega t+(J-J_z)\,\omega_1(\omega+\omega_1\cos\theta)\sin\theta\sin\omega t=M_0\sin\omega t;$$

$$J_z\frac{d\omega_1}{dt}\cos\theta=0.$$

Simplificînd prima ecuație cu $\cos\omega t$ și a doua ecuație cu $\sin\omega t$, se constată egalitatea celor două ecuații, adică:

$$[J_z\omega+(J_z-J)\,\omega_1\cos\theta]\,\omega_1\sin\theta=M_0, \qquad (2)$$

iar ultima ecuație de $\omega_1=const$. Deci, fusul are o mișcare de precesie în jurul axei fixe Oz_1, cu viteza unghiulară ω_1 constantă. Valoarea ei se poate determina din relația (2). Ținînd seamă că în cazul problemei, $M_0=Gd\sin\theta$, ecuația (2) devine:

$$[J_z\omega+(J_z-J)\,\omega_1\cos\theta]\,\omega_1=G\cdot d,$$

de unde:

$$\omega_1=\frac{-J_z\omega\pm\sqrt{(J_z\omega)^2+4Gd\,(J_z-J)\cos\theta}}{2\,(J_z-J)\cos\theta}.$$

Notînd masa cilindrului cu m, pentru datele problemei avem:

$$d=6r;\ \omega=\frac{\pi n}{30}=400\,\pi\ s^{-1};\ \ G=m\cdot g+2\,\frac{1}{3}\,m\cdot g=\frac{5}{3}\,m\cdot g;$$

$$J_z=\frac{1}{2}\,m\cdot r^2+2\,\frac{3}{10}\left(\frac{1}{3}\,m\right)r^2=0{,}7m\cdot r^2;$$

$$J=\frac{113}{40}\left(\frac{5}{3}\,m\right)r^2+\left(\frac{5}{3}\,m\right)\cdot(6r)^2=\frac{257}{24}\,m\cdot r^2=10{,}7\,mr^2.$$

În cazul aplicației numerice se obțin pentru ω_1 două valori: $\omega_1'=5{,}98\ s^{-1}$ și $\omega_1''=85{,}04\ s^{-1}$. Dacă se face raportul dintre viteza unghiulară de rotație a fusului, ω, și viteza unghiulară de precesie, ω_1', se constată că prima este de 209,3 ori mai mare decît a doua. De aceea, în practică, relația (2) se poate simplifica, neglijînd cel de-al doilea termen din paranteză, obținîndu-se relația aproximativă:

$$J_z\omega\omega_1 \sin\theta = M_0,$$

care, în cazul problemei, dă ca soluție:

$$\omega_1 = \frac{Gd}{J_z\omega} = 3{,}72\ s^{-1}.$$

16.15. Dîndu-se un giroscop ($J_x=J_y$) mobil în jurul unui punct fix O și căruia i s-a dat o rotație ω în jurul axei sale de simetrie Oz, se cere să se determine:

a) condiția ca axa Oz a giroscopului să rămînă fixă;

b) timpul în care giroscopul execută o rotație completă în jurul axei sale Oz_1.

Rezolvare. a) Ca axa giroscopului Oz să rămînă fixă, trebuie ca viteza unghiulară de precesie ω_1 să fie nulă. Din relația (2) (problema 16.14) rezultă pentru $\omega_1=0$, $M_0=0$, deci condiția este ca momentul tuturor forțelor, exterioare, în raport cu punctul fix O, să fie nul.

Condiția de mai sus este realizată dacă se ia ca punct fix al giroscopului, punctul în care este aplicată rezultanta $\bar{R}$ a forțelor exterioare.

În cazul unui giroscop, acționat numai de propria lui greutate, punctul fix se ia centrul de greutate al giroscopului. Evident că axa Oz mai este stabilă dacă rămîne verticală, chiar dacă punctul O nu coincide cu centrul de greutate (fig. 16.20).

b) În cazul condițiilor date ($J_x=J_y$, $M_x=M_y=M_z=0$), ecuațiile lui Euler devin:

$$J_x\frac{d\omega_x}{dt}+(J_z-J_x)\,\omega_y\omega_z=0;$$

$$J_y\frac{d\omega_y}{dt}+(J_x-J_z)\,\omega_z\omega_x=0;$$

$$J_z\frac{d\omega_z}{dt}=0.$$

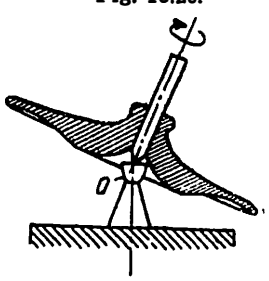
Din ultima ecuație se deduce: $\omega_z=const$, și notînd

$$p=\frac{J_z-J_x}{J_x}\omega_z,$$

primele ecuații se mai pot scrie:

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2}+p^2\omega_x=0;\quad \frac{d^2\omega_y}{dt^2}+p^2\omega_y=0$$

Fig. 16.20.



cu soluţiile :

$$\omega_x=\omega' \cos (pt+\varphi_1') ; \quad \omega_y=\omega'' \cos (pt+\varphi'')$$

în care ω', φ', ω'', φ'', sînt constantele de integrare care se determină din condiţiile iniţiale.

Timpul T, în care giroscopul execută o rotaţie completă în jurul axei sale Oz, este perioada mişcărilor oscilatorii precedente, deci :

$$T=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi J_z}{(J_z-J_x)\omega_z}.$$

16.16. O bară subţire şi uniformă, cu masa m şi lungimea l, are o mişcare de rotaţie cu viteza ω_z constantă în jurul axei longitudinale, iar un capăt al ei se sprijină pe un plan orizontal. Dacă la celălalt capăt acţionează o forţă F, perpendiculară pe bară, avînd suportul fix în raport cu bara, mereu în direcţia axei Ox, să se determine mişcarea.

Rezolvare. Bara fiind de secţiune neglijabilă, se poate scrie $J_z=0$, iar $J_x=J_y=\frac{1}{3}m \cdot l^2$. În acest caz, ecuaţiile lui Euler devin :

$$J\left(\frac{d\omega_x}{dt}-\omega_y\omega_z\right)=M_x ; \quad J\left(\frac{d\omega_y}{dt}+\omega_x\omega_z\right)=M_y ; \quad 0=M_z. \tag{1}$$

Considerînd bara foarte subţire, se poate neglija greutatea proprie, astfel încît singurul moment este produs de forţa $\bar{F}$. Luînd ca axă a x-ilor direcţia de acţiune a forţei $\bar{F}$, componentele momentului sînt :

$$M_x=0 ; \quad M_y=F ; \quad M_z=0,$$

dar ecuaţiile (1) devin ;

$$J\left(\frac{d\omega_x}{dt}-\omega_y\omega_z\right)=0 ; \quad J\left(\frac{d\omega_y}{dt}+\omega_x\omega_z\right)=F, \tag{2}$$

sau

$$\frac{d\omega_x}{dt}-\omega_y\omega_z=0 \quad \text{şi} \quad \frac{d\omega_y}{dt}+\omega_x\omega_z=\frac{3F}{ml}. \tag{2'}$$

Diferenţiind prima ecuaţie, rezultă :

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2}=\omega_z\frac{d\omega_y}{dt} \quad \text{de unde :} \quad \frac{d\omega_y}{dt}=\frac{1}{\omega_z}\frac{d^2\omega_x}{dt^2}. \tag{3}$$

Eliminînd pe $d\omega_y/dt$ din ecuaţiile (2') şi (3), se obţine ecuaţia :

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2}+\omega_z^2\omega_x=\frac{3F}{ml}\omega_z, \tag{4}$$

care reprezintă o mişcare oscilatorie. Prin integrare se găseşte :

$$\omega_x=\frac{3F}{ml^2}\omega_z+\omega_0 \cos (\omega_z t+\varphi).$$

Pe baza relației (3) se obține și:

$$\omega_y = \frac{1}{\omega_z} \cdot \frac{d\omega_x}{dt} = -\omega_0 \sin(\omega_z t + \varphi),$$

în care ω_0 și φ_0 sînt două constante de integrare care se determină din condițiile inițiale.

16.17. Un disc circular omogen, cu greutatea $G=1{,}2$ kN și raza $r=0{,}6$ m, se rotește cu viteza unghiulară $\omega=40\ s^{-1}$ în jurul axei sale geometrice care se sprijină în lagărele A și B ($AB=l=2$ m) (fig. 16.21). Să se determine:

a) reacțiunile totale din lagăre, atunci cînd cadrul care suportă aceste lagăre se rotește cu viteza unghiulară $\omega_1=2\pi s^{-1}$ în jurul unei axe verticale, care trece prin centrul de greutate al discului;

b) viteza unghiulară de rotație ω_1, astfel încît una dintre reacțiunile din lagăre să fie nulă.

Rezolvare. a) Axa de rotație a discului fiind ea însăși mobilă, avînd o rotație în jurul axei fixe Oz cu viteza unghiulară ω_1, se poate considera că discul are o mișcare în jurul punctului O. Cum $J_x=J_y=J$, se pot aplica ecuațiile lui Euler în forma simplificată (1) din problema 16.14. Știind că $\theta=\pi/2$ și $\varphi=\omega_1 t$ rezultă:

$$\omega_x=\omega\sin\omega t;\quad \omega_y=\omega\cos\omega t;\quad \omega_z=\omega,$$

astfel încît ecuațiile lui Euler devin:

$$J\omega_1\omega\cos\varphi+(J_z-J)\,\omega_1\omega\cos\varphi=M_0\cos\varphi;$$

$$J\omega_1\omega\sin\varphi+(J-J_z)\,\omega_1\omega\sin\varphi=M_0\sin\varphi;$$

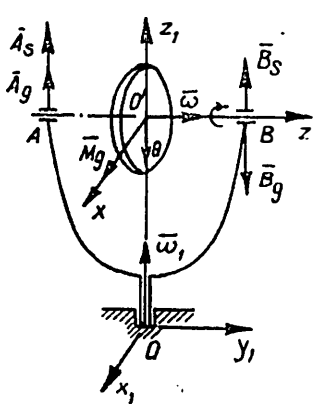
$$0=M_z,$$

de unde:

$$J_z\omega\omega_1=M_0=M_g. \tag{1}$$

Ca rezultat al rotirii cadrului care suportă axul discului, ia naștere cuplul giroscopic de moment M_g, avînd direcția perpendiculară pe planul format de vectorii $\bar{\omega}$ și $\bar{\omega}_1$, sensul indicat în figură, definit conform considerațiilor teoretice, și mărimea dată de relația (1). Acest moment va produce în lagăre două reacțiuni giroscopice $\bar{A}_g$ și $\bar{B}_g$, avînd direcțiile paralele cu vectorul $\bar{\omega}_1$. La aceste reacțiuni se mai adaugă reacțiunile din stare statică, produse de greutatea $\bar{G}$ ($\bar{A}_s$ și $\bar{B}_s$). Cum în cazul problemei, vectorii $\bar{A}_g$ și $\bar{A}_s$, respectiv $\bar{B}_g$ și $\bar{B}_s$ au aceleași direcții, mărimile lor se adună algebric, putînd scrie:

Fig. 16.21.



$$R_A=\frac{G}{2}+\frac{G\cdot r^2}{2gl}\omega\omega_1=1{,}464\ \text{kN};$$

$$R_B=\frac{G}{2}-\frac{G\cdot r^2}{2gl}\omega\omega_1=-0{,}264\ \text{kN},$$

deoarece $J_z=G\cdot r/2g$.

Sensul reacțiunilor se schimbă atunci cînd se schimbă sensul uneia dintre rotații.

b) Reacțiunea din lagărul B devine nulă dacă:

$$\omega_1=\frac{g\cdot l}{r^2\omega}=0{,}434\ \text{s}^{-1}.$$

16.18. O turbină, al cărei arbore este paralel cu axa longitudinală a vaporului, are o turație $n=250$ rot/min. Greutatea rotorului este de 180 kN, raza de giratie $i=1{,}43$ m, iar distanța dintre lagăre este $l=5{,}55$ (fig. 16.22). Să se determine apăsările giroscopice în lagărele A și B cînd:

a) vaporul se întoarce în jurul axei verticale care trece prin centrul rotorului, cu viteza unghiulară $\omega_1=10°/\text{s}$;

b) vaporul merge rectiliniu, însă are un tangaj care se poate asimila unei oscilații simple armonice, avînd amplitudinea de 5° și perioada $T=5$ s.

Rezolvare. a) În cazul rotirii vaporului în jurul axei Oz_1 cu viteza unghiulară ω_1, axa rotorului va avea și ea această mișcare de rotație. Știind că în acest caz $\theta=\frac{\pi}{2}$, rezultă valoarea momentului giroscopic:

$$M_g=J_z\omega\omega_1.$$

Datorită acestui moment, care are direcția perpendiculară pe planul Oz_1z și sensul cel indicat în figura 16.23, în lagăre se vor produce presiunile giroscopice egale $P_A=P_B=P_g$, turbina fiind montată la mijlocul arborelui. Valoarea acestei apăsări este:

$$P=\frac{J\omega\omega_1}{l}=\frac{\frac{G}{g}i^2\frac{\pi n}{30}\frac{\theta}{l}\frac{\pi}{180}}{l}=30{,}7\ \text{kN}.$$

Direcțiile apăsărilor sînt paralele cu direcția vectorului viteză unghiulară de precesie $\bar{\omega}_1$. Reacțiunile în lagăre vor fi egale și de sens contrar apăsărilor.

Știind că reacțiunile date de greutatea proprie a rotorului sînt $R'_A=R'_B=90$ kN și au aceleași direcții cu reacțiunile giroscopice, reacțiunile totale în lagăre sînt:

$$R_A=R'_A+R_g=120{,}07\ \text{kN};\quad R_B=R'_B-R_g=59{,}30\ \text{kN}.$$

b) Datorită tangajului, axul rotorului va avea o mișcare oscilatorie armonică în jurul unei axe perpendiculare pe axul rotorului și care trece prin O, deci vectorul $\bar{\omega}$, care definește variația unghiului ψ pe timpul tangajului, va avea direcția perpendiculară pe planul Oz_1z. Sensul său va varia după sensul rotației. În cazul de față se va considera sensul indicat în figura 16.23.

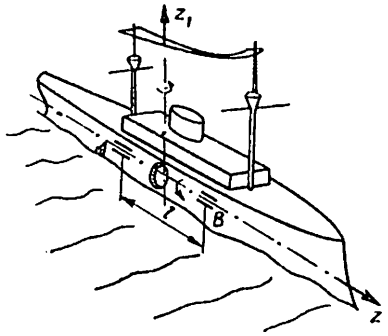


Fig. 16.22.

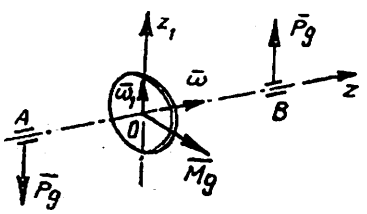


Fig. 16.23.

Mişcarea oscilatorie armonică fiind definită de ecuaţia:

$$\psi=\psi_{max}\sin\frac{2\pi}{T}t,$$

în care:

$$\psi_{max}=5^\circ=\frac{\pi}{36}\text{ rad}\quad\text{şi}\quad T=5\text{ s},$$

rezultă:

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T}\psi_{max}\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

Considerînd mişcarea la timpul $t=T$, care va da viteza unghiulară maximă, rezultă:

$$\omega_{1\,max}=\frac{2\pi}{T}\psi_{max}=\frac{2\pi^2}{180}.$$

Vectorii $\bar{\omega}$ şi $\bar{\omega}_1$ fiind perpendiculari $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ se obţine imediat valoarea momentului giroscopic:

$$M_g=J_z\omega\omega_1.$$

Vectorul moment va fi perpendicular pe planul format de direcţiile celor doi vectori viteză unghiulară, iar sensul este cel indicat în figura 16.24. Din cauza acestui moment, în lagăre se vor naşte reacţiunile giroscopice egale $\bar{R}_g$ avînd direcţiile paralele cu vectorul $\bar{\omega}_1$ şi mărimile maxime:

$$R_{g\,max}=\frac{J_z\omega\omega_{1max}}{l}=\frac{\frac{G}{g}l^2\frac{\pi n}{30}\frac{2\pi^2}{180}}{5{,}55}=19{,}66\text{ kN}.$$

Ţinînd seamă şi de reacţiunile statice, $\bar{R}'_A$ şi $\bar{R}'_B$, reacţiunile totale vor fi:

$$R_A=R_B=\sqrt{R'^2_A+R^2_g}=92{,}12\text{ kN}.$$

16.19. Axa de rotaţie a rotorului unui vapor este perpendiculară pe axa longitudinală a vaporului. Vaporul avînd o mişcare de ruliu după o lege sinusoidală:

$$\theta=\theta_0\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

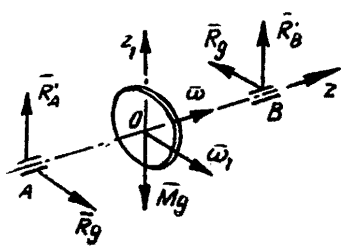
de perioadă T şi amplitudine θ_0, iar rotaţia rotorului făcîndu-se cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, să se afle mărimea maximă a reacţiunilor giroscopice din palierele axului rotorului, datorită mişcării de ruliu.

Rezolvare. Mişcarea de ruliu avînd o perioadă foarte mare, se poate admite că vectorul moment cinetic $J\bar{\omega}=\overline{OV}$ este pe axa de rotaţie a rotorului.

În timpul mişcării de ruliu, extremitatea V a vectorului descrie un arc de cerc cu raza $\overline{OV}=J\bar{\omega}$ şi viteza în această mişcare se determină prin înmulţirea razei cu viteza unghiulară:

$$\omega_1=\dot{\theta}=-\theta_0\frac{2\pi}{T}\sin^2\frac{2\pi}{T}t.$$

Fig. 16.24.



Viteza unghiulară maximă datorită ruliului va fi:

$$\dot{\theta}_{max}=\theta_0 \frac{2\pi}{T}.$$

Viteza maximă a lui V este: $J\omega \cdot \theta_0 \frac{2\pi}{T}$ și aceasta trebuie să fie egală, pe baza teoremei momentului cinetic, cu momentul maxim al reacțiunii suplimentare R_{max} în palierele motorului, datorită ruliului, deci:

$$R_{max} l = J\omega\omega_1;$$

$$R_{max}=\frac{J\omega\omega_1}{l}=\frac{J\omega}{l}\theta_0\frac{2\pi}{T}.$$

Presupunînd că rotorul se află la mijlocul deschiderii axului, reacțiunile statice $A_s=B_s=\frac{G}{2}$, devin din cauza acțiunii giroscopice (fig. 16.25):

$$R_A=R_B=\sqrt{A_s^2+R_g^2}\approx\frac{G}{2}\sqrt{1+r^2\left(\frac{\omega\omega_1}{l}\right)^2}.$$

16.20. Rotorul unei mașini, care poate fi asimilat cu un disc omogen cu raza R și grosimea h, avînd masa m, este fixat pe un arbore care are o rotație uniformă, de viteză unghiulară $\bar{\omega}_1$. Axa de simetrie a rotorului face unghiul θ cu axa arborelui (fig. 16.26). Să se determine reacțiunile rotorului în lagărele de fixare ale arborelui, știind că distanța dintre ele este l.

Rezolvare. Rotorul poate fi considerat ca un giroscop care are o viteză unghiulară de rotație proprie în jurul axei sale nulă ($\omega=0$), deoarece axa de rotație e susținută în lagăre, iar ca viteză unghiulară de precesie tocmai viteza unghiulară ω_1 de rotație a arborelui.

În acest caz, din relația (*l*) de la considerațiile teoretice, cunoscînd elementele cinetice, se poate determina valoarea momentului giroscopic:

Fig. 16.25.

$$M_g=(J_z-J)\,\omega_1^2 \sin\theta\cos\theta,$$

sau, cum în practică θ este mic, se mai poate scrie:

$$M_g\approx(J_z-J)\,\omega_1^2\theta.$$

Deoarece $J_z>J$, momentul giroscopic își păstrează semnul. Direcția vectorului va fi perpendiculară pe planul Ozz_1, iar sensul cel indicat în figură.

Reacțiunile giroscopice care se nasc în lagăre, $\bar{R}_A$ și $\bar{R}_B$, au valorile:

$$R_A=R_B=\frac{(J_z-J)\,\omega_1^2\theta}{l}.$$

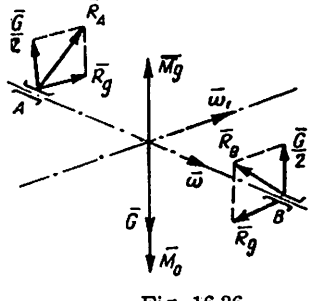
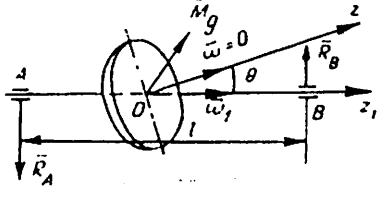


Fig. 16.26.



Observație. Dacă viteza de rotație a arborelui, $\bar{\omega}_1$, este foarte mare, reacțiunile în lagăre pot deveni considerabile, de unde rezultă necesitatea de a centra astfel rotorul încît axa sa să coincidă cu axul arborelui.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

16.21. Pentru a se determina perioada de oscilație a unui pendul matematic, în laborator, se utilizează de fapt un pendul fizic, format dintr-o sferă plină de rază r și masă m, legată la capătul unui fir de lungime l. Să se determine eroarea care se face în măsurarea perioadei de oscilație. Aplicație $l=100\ r$.

Indicație și răspuns. Deoarece pentru sfera plină $J_G=\frac{2}{5}mr^2$, rezultă $i_G^2=\frac{2}{5}r^2$, $l_e=l+\frac{i_G^2}{l}=l+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l}$.

Ca urmare raportul perioadelor este:

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{l_e}{l}}=\sqrt{1+\frac{2r^2}{5l^2}}.$$

Eroarea este cu atît mai mică cu cît raza sferei este mai mică. Pentru $r=0$ rezultă $T_2=T_1$, iar în cazul aplicației $T_2=1{,}00002\ T_1$.

16.22. Un metronom este format din două mase A și B cu greutăți P și $P+p$, reunite printr-o tijă de greutate neglijabilă, mobilă în jurul punctului O, mijlocul lui $AB=l$ (fig. 16.27). Să se determine perioada de oscilație în cazul cînd $l=9{,}81$ cm, $P=4{,}5\ p$.

Răspuns. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{2P}{p}\right)}=6{,}2831$ s.

16.23. O placă subțire, omogenă, de formă dreptunghiulară $ABCD$, (fig. 16.28) oscilează în jurul axei fixe AB, care face cu verticala unghiul α. Cunoscînd lățimea plăcii $AD=a$, să se determine perioada ei de oscilație.

Aplicație. $\alpha=30°$; $a=0{,}5$ m.

Indicație și răspuns. Din ecuația mișcării plăcii

$$J_\Delta\ddot{\theta}=-M=-\frac{G}{g}\frac{a}{2}\sin\alpha$$

cum $J_\Delta=\frac{G}{g}\frac{a^2}{3}$, rezultă

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{a}{g\sin\alpha}}=1{,}6\text{ s}.$$

16.24. Se dă un disc de rază r. Să se arate că perioada de oscilație T_1 este mai mare cînd discul oscilează în jurul unei axe care atinge circomferința și este perpendiculară pe planul său, decît perioada T_2 corespunzătoare situației în care discul oscilează în jurul unei axe tangente și situate în același plan (fig. 16.29).

Fig. 16.27.

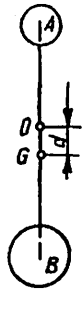


Fig. 16.28.

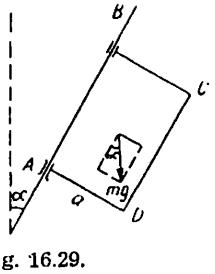
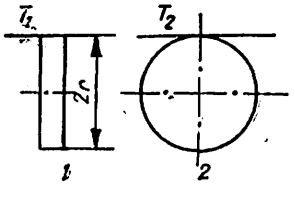


Fig. 16.29.



Indicație și răspuns. Avem $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}$ unde momentele de inerție în cele două situații sînt respectiv $J_1 = m\frac{r^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$; $J_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{5}{4}mr^2$.

Ca urmare $T_1 > T_2$.

16.25. Un con circular drept, cu raza r și înălțimea h, oscilează în jurul unei axe orizontale care trece prin vîrf. Să se calculeze lungimea pendulului sincron.

Indicație și răspuns. Deoarece $d = \frac{3}{4}h$, iar din anexa 4 avem:

$$i^2 = \frac{J}{M} = \frac{3}{20}\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right),$$

rezultă:

$$l_e = d + \frac{i_G^2}{2} = \frac{r^2 + 4h^2}{5h}.$$

16.26. Pentru determinarea momentului de inerție al corpului C, în raport cu o axă oarecare AB, care trece prin centrul de masă G, corpul se fixează de un cadru $ABCD$ care se poate roti în jurul axei CD, paralelă cu AB (fig. 16.30). Se deplasează cadrul din poziția sa inițială cu un unghi θ foarte mic și se cronometrează timpul T în care face o perioadă completă. Știind că greutatea corpului este P, $AD = BC = h$ și neglijînd greutatea cadrului, să se determine momentul de inerție al corpului C.

Răspuns.

$$J_G = Ph\left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{h}{g}\right).$$

16.27. Un fus cu fir de bumbac, de formă conică și greutate G, are o viteză unghiulară de regim ω în jurul axei verticale, produsă de forța P (fig. 16.31).

După cît timp de la pornire fusul va căpăta turația de regim, dacă se neglijează greutatea roții R și frecările?

Indicație și răspuns. Ținînd seama că momentul de inerție al conului în raport cu axa de rotație $J_\Delta = \frac{3}{10}Mr^2$ este constant, din ecuația de mișcare:

$$J_\Delta \ddot{\theta} = PR,$$

ținînd seamă că în momentul inițial $\omega_0 = 0$, se obține:

$$t = \frac{3}{10} \cdot \frac{Mr^2}{PR}.$$

Fig. 16.30.

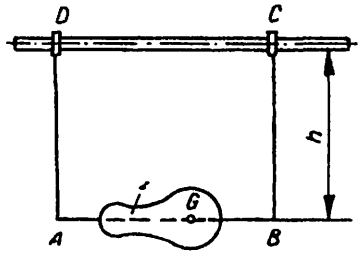
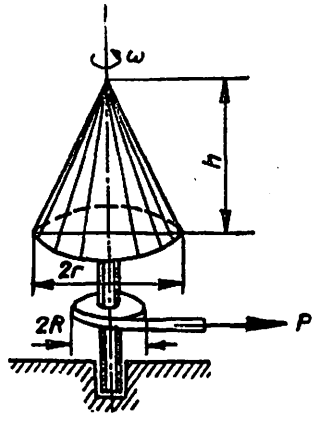


Fig. 16.31.



16.28. Pentru determinarea momentului de inerție al unui volant, acesta se suspendă în punctul A și i se

imprimă o mişcare oscilatorie (fig. 16.32). Ştiind că greutatea volantului $G=2{,}5$ kN, distanţa $OA=0{,}4$ m şi durata unei oscilaţii $T=1{,}80$ s; să se determine:

a) lungimea pendulului echivalent l_e şi raza de inerţie i_G^2;

b) momentul de inerţie al volantului în raport cu axa care trece prin O.

Indicaţie şi răspuns. a) Din expresia perioadei unui pendul fizic (problema 16.4)

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l_e}{g}},\quad \text{unde}\quad l_e=d+\frac{i_G^2}{g},\quad \text{aproximînd } \pi^2\approx g \text{ rezultă:}$$

$$l_e=\frac{T^2}{4}=0{,}81 \text{ m şi } i_G^2=g\,(l_e-d)=0{,}164 \text{ m}^2.$$

b) Rezultă $J_G=Mi_G^2=40{,}6$ kgm^2.

16.29. Să se studieze mişcarea unui solid aflat iniţial în repaus, care se poate roti în jurul unui punct fix O şi care este supus acţiunii unui cuplu avînd axa paralelă cu o axă principală de inerţie a solidului, trecînd prin O.

Răspuns. Avînd $\omega_x=\omega_y=0$, $M_x=M_y=0$, ecuaţiile lui Euler se reduc numai la ecuaţia:

$$J\frac{d\omega_z}{dt}=M_z.$$

16.30. O sferă omogenă se roteşte în jurul centrului ei. Dacă asupra sferei acţionează un cuplu a cărui axă este paralelă cu o axă oarecare, să se determine mişcarea sferei.

Indicaţie şi răspuns. Luînd axa cuplului ca axă Oz, rezultă $M_x=0$, $M_y=0$ şi $M_z=M$. Notînd $J_x=J_y=J_z=J$, ecuaţiile lui Euler devin:

$$J\frac{d\omega_x}{dt}=0;\quad J\frac{d\omega_y}{dt}=0,\quad J\frac{d\omega_z}{dt}=M.$$

Sfera va avea o mişcare de rotaţie în jurul axei cuplului definită de ecuaţia a treia şi alte două mişcări de rotaţie, cu vitezele unghiulare ω_x şi ω_y constante.

16.31. Sub acţiunea greutăţii proprii, un con circular drept, de rază r şi înălţime h (fig. 16.33), efectuează o mişcare de precesie regulată, în jurul unei axe verticale ce trece prin vîrful său. Se cere viteza unghiulară de rotaţie proprie, ω, a conului, care este foarte mare, în funcţie de viteza unghiulară de precesie ω_1.

Fig. 16.32.

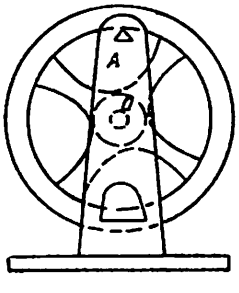
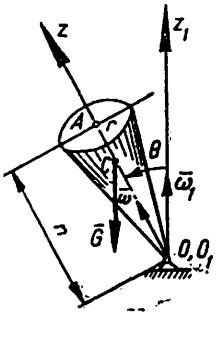


Fig. 16.33.



Indicaţie şi răspuns. Viteza proprie de rotaţie fiind foarte mare avem:

$$\bar{M}_0=J_z\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}=\overline{OC}\times\bar{G},$$

unde $OC=\frac{3}{4}h$.

Cum $J_z=\frac{3}{10}\cdot\frac{G}{g}r^2$ rezultă

$$\omega=\frac{5}{2}\frac{gh}{r^2\omega_1}.$$

16.32. Un disc omogen de rază r și greutate $\bar{G}$ se rotește cu o viteză unghiulară foarte mare ω în jurul axei sale Oz, fixată în articulația sferică O. (fig. 16.34). În plus discul execută sub acțiunea greutății proprii o mișcare de precesie regulată în jurul verticalei ce trece prin O. Să se determine viteza unghiulară de precesie ω_1 și componenta orizontală a reacțiunii din articulația O, în funcție de unghiul θ și lungimea axului $OC=l$ de greutate neglijabilă.

Indicație și răspuns.

Din egalitatea vectorială

$$\bar{M}_0=J_z\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}=\overline{OC}\times\bar{G},$$

ținînd seamă că $J_z=\frac{G}{g}\frac{R^2}{2}$, rezultă:

$$\omega_1=\frac{2gl}{R^2\omega}.$$

Din teorema impulsului rezultă:

$$H=\frac{4Ggl^3}{\omega^2R^4}\sin\theta.$$

16.33. Să se determine presiunile giroscopice pe șine ale unei perechi de roți de locomotivă într-o curbă de rază R. Viteza locomotivei este v, iar raza roții r (fig. 16.35).

Indicație și răspuns. Datorită mișcării giroscopice, la care $\theta=\frac{\pi}{2}$, cuplul giroscopic de moment $\bar{M}_g$, are direcția perpendiculară pe planul Ozz_1 (planul vertical al osiei), sensul cel indicat de săgeată și modulul:

$$|\bar{M}_g|=J\omega\omega_1=\frac{Jv^2}{Rr}=\frac{Ja_c}{r},$$

unde s-a notat cu a_c accelerația în curbă.

Rezultă că acesta, va mări presiunea roții exterioare pe șină și va micșora presiunea roții interioare, deci reacțiunea din punctul A, pe roata exterioară, va fi mai mare.

Fig. 16.34.

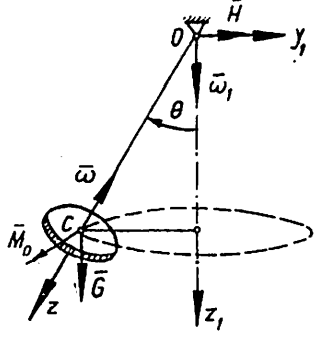
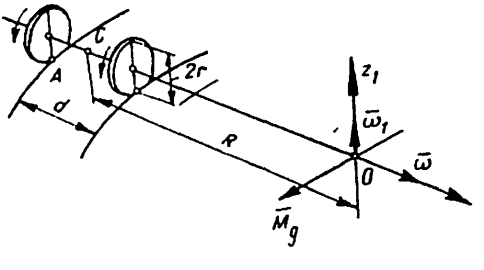


Fig. 16.35.



Capitolul 17

CIOCNIRI ŞI PERCUŢII

A. CONSIDERAŢII TEORETICE

1. **Ciocnirea** este caracterizată printr-o schimbare finită, dar bruscă, a vitezelor (în direcţie sau modul) elementelor materiale, sub influenţa unor forţe considerabile, *forţe instantanee.*

Durata ciocnirii este foarte mică (de ordinul sutimilor sau miimilor de secundă), dar măsurabilă, iar schimbările de poziţie ale elementelor materiale în timpul ciocnirii sînt neglijabile.

2. **Vector percuţie.** Dacă forţa instantanee $\bar{F}(x, y, z)$ acţionează asupra unui punct material de masă m în timpul duratei ciocnirii $\Delta t = t_2 - t_1$ forţa $\bar{F}$ variază în mărime şi direcţie. Vectorul $\bar{P}$ de componente

$$P_x = \int_{t_1}^{t_2} X\,dt;\quad P_y = \int_{t_1}^{t_2} Y\,dt;\quad P_z = \int_{t_1}^{t_2} Z\,dt \qquad (a)$$

şi al cărui punct de aplicaţie coincide cu poziţia punctului material m în timpul ciocnirii, se numeşte *vector percuţie*, corespunzător forţei instantanee $\bar{F}$. Vectorul percuţie $\bar{P}$ se reprezintă prin vectorul $\overline{MC}$ (fig. 17.1), iar scalar se poate reprezenta prin aria haşurată (fig. 17.2).

Fig. 17.1.

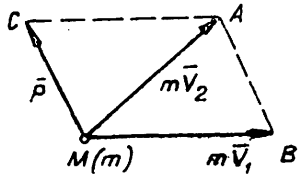
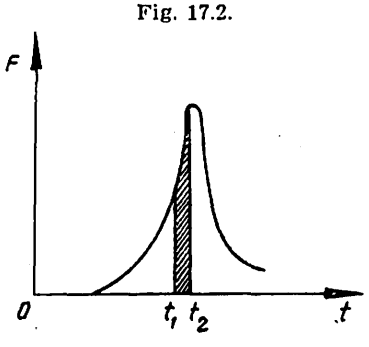


Fig. 17.2.



În timpul ciocnirii, forţele obişnuite (greutatea corpurilor etc.) produc percuţii neglijabile, dar vectorii percuţie produc reacţiuni puternice.

3. **Teoreme generale.** În studiul fenomenului de ciocnire se aplică teorema impulsului (centrului de masă) şi teorema momentului cinetic.

a) Teorema impulsului. Variaţia de impuls $\Delta\bar{H}$ a unui punct material de masă m asupra căruia acţionează forţa instantanee $\bar{F}$, este:

$$\Delta\bar{H} = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \bar{P} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\cdot dt, \qquad (a')$$

sau în raport cu un sistem de axe, relaţiile scalare echivalente:

$$mv_{2x}-mv_{1x}=P_x=\int_{t_1}^{t_2}X\mathrm{d}t;\quad mv_{2y}-mv_{1y}=P_y=\int_{t_1}^{t_2}Y\mathrm{d}t;$$

$$mv_{2z}-mv_{1z}=P_z=\int_{t_1}^{t_2}Z\mathrm{d}t, \tag{b}$$

în care $\bar{v}_1\,(v_{1x},\ v_{1y},\ v_{1z})$ şi $\bar{v}_2\,(v_{2x},\ v_{2y},\ v_{2z})$ sînt vitezele înainte şi după ciocnire.

Pentru un sistem de puncte materiale, ce suferă percuţii exterioare, variaţia în timpul percuţiei a sumei impulsurilor este egală cu suma percuţiilor exterioare date şi de legătura care acţionează asupra sistemului:

$$\Delta\bar{H}=\sum m\bar{v}_2-\sum m\bar{v}_1=\sum\bar{P}_e+\sum\bar{P}_l. \tag{c}$$

b) Teorema centrului de masă. Teorema referitoare la sisteme mai poate fi enunţată şi astfel: variaţia vitezei centrului de masă al unui sistem material care suferă o ciocnire este aceeaşi ca şi cum întreaga sa masă ar fi concentrată în centrul de masă, iar percuţiile exterioare ar fi aplicate în acest punct.

4. **Teorema momentului cinetic** se aplică şi în cazul ciocnirii corpurilor care posedă o mişcare de rotaţie.

Variaţia momentului cinetic, în raport cu un punct sau cu o dreaptă, a unui sistem material care suportă o percuţie este egală cu momentul în raport cu acel punct sau cu acea dreaptă a percuţiilor exterioare, date şi de legătură.

$$\Delta\bar{K}=\sum_1^n\bar{r}_i\times\bar{P}_i, \tag{d}$$

iar scalar:

$$M_{0x}(m\bar{v}_2)-M_{0x}(m\bar{v}_1)=yP_z-zP_y;$$

$$M_{0y}(m\bar{v}_2)-M_{0y}(m\bar{v}_1)=zP_x-xP_z; \tag{d'}$$

$$M_{0z}(m\bar{v}_2)-M_{0z}(m\bar{v}_1)=xP_y-yP_x.$$

Teoremele impulsului, enunţate mai sus, pot fi aplicate în cazul ciocnirilor şi în raport cu axe mobile, cu condiţia de a introduce percuţiile forţelor de inerţie de transport şi neglijînd forţele de inerţie complementare deoarece acestea sînt forţe finite.

De asemenea, *teorema momentului cinetic se aplică şi mişcării unui sistem în jurul centrului său de masă, cu condiţia de a lua momentul cinetic în raport cu acesta sau în raport cu o axă, trecînd prin centrul de masă.*

5. **Pot exista ciocniri ale corpurilor** în mișcare de translație, *dreaptă centrică* (fig. 17.3) sau *oblică* (fig. 17.4), ciocniri ale corpului ce are o mișcare de translație cu corpuri în rotație (fig. 17.5) sau ciocniri ale corpurilor ce posedă mișcări de rotație plane (17.6) sau ciocniri ale corpurilor în spațiu.

Cum teorema impulsului și momentului cinetic nu sînt suficiente pentru soluționarea problemelor ciocnirilor, se introduce coeficientul de restituire k, definit de raportul vitezelor relative v'_r după ciocnire și v_r înainte de ciocnire.

a) În mișcarea de translație coeficientul de restituire are valoarea:

$$k=\frac{v'_r}{v_r}=\frac{v'_2-v'_1}{v_1-v_2}, \qquad (e)$$

unde v_1, v_2 și v'_1, v'_2 sînt respectiv vitezele corpurilor înainte și după ciocnire.

b) În cazul ciocnirii dintre un corp care are o mișcare de translație și altul avînd o mișcate de rotație în jurul unei axe fixe, coeficientul de restituire este:

$$k=\frac{v'_r}{v_r}=\frac{l\omega'-v'}{v-l\omega}, \qquad (e')$$

în care: ω și ω' sînt vitezele unghiulare ale corpului înainte și după ciocnire;

v și v' — vitezele corpului cu masa m înainte și după ciocnire;

l este distanța de la axa de rotație la direcția vitezei v.

Pentru corpurile perfect elastice, $k=1$; pentru corpurile plastice, $k=0$; iar pentru corpurile reale, $0<k<1$.

Mai jos se arată cîțiva dintre coeficienții de restituire, care depind de natura materialelor corpurilor care se ciocnesc:

— sticlă	$k=15/16$;
— fildeș	$k=8/9$;
— oțel și plută	$k=5/9$;
— lemn	$k\approx 1/2$;
— lut, pămînt moale	$k=0$.

6. **Pentru aflarea vitezelor corpurilor** după ciocnire în cazul ciocnirii drepte centrice se aplică teorema impulsului:

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2 \qquad (f)$$

și relația (*e*) de definiție a coeficientului de restituire.

Fig. 17.3.

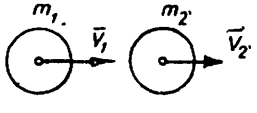


Fig. 17.4.

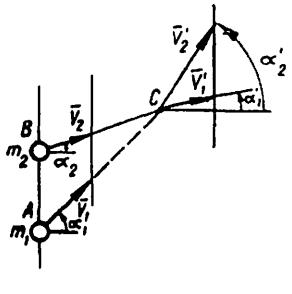


Fig. 17.5.

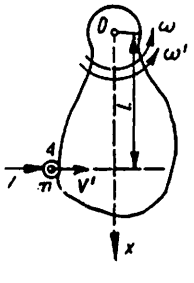
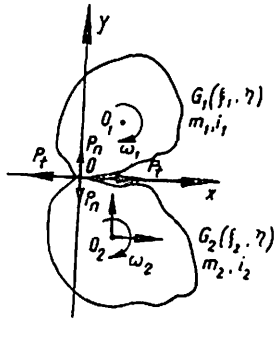


Fig. 17.6.



În cazul ciocnirii oblice fără frecare, componentele tangențiale rămîn neschimbate în timpul ciocnirii, coeficientul de restituire referindu-se numai la componentele normale ale vitezelor.

În rezolvarea problemelor de ciocnire dintre un corp avînd o mișcare de translație și altul avînd o mișcare de rotație în jurul unei axe fixe, se aplică teorema momentului cinetic:

$$mv \cdot l + J\omega = mv' \cdot l + J\omega' \qquad (g)$$

și expresia corespunzătoare (e') a coeficientului de restituire, unde J este momentul de inerție al corpului în raport cu axa de rotație.

7. **Pierderea de energie** în timpul ciocnirii pentru corpurile reale:

a) în mișcarea de translație

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(m_1 v_2^2 + m_2 v_2^2\right) = \frac{1}{2}(1-k^2)\, m_r v_r^2, \qquad (h)$$

unde m_r este masa redusă definită de relația:

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \qquad (i)$$

iar $v_r = v_1 - v_2$ este viteza relativă înainte de ciocnire.

b) În cazul ciocnirii unui corp în translație cu un corp în rotație pierderea de energie se exprimă printr-o relație avînd aceeași formă cu precedenta (*h*), însă masa redusă m_r și viteza relativă dinainte de ciocnire au respectiv valorile:

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m} + \frac{l^2}{J_0}; \quad v_r = v - l\omega. \qquad (j)$$

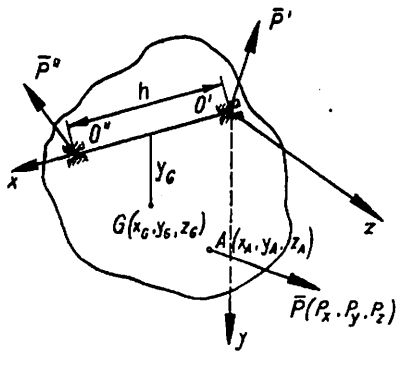
8. **Percuții în axa de rotație.** În timpul ciocnirii, datorită percuției exterioare $\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$, în axa de rotație apar percuțiile $\bar{P}'(P'_x, P'_y, P'_z)$ și $\bar{P}''(P''_x, P''_y, P''_z)$ figura 17.7 în cele două puncte ale axei de rotație. Valorile acestora, deduse din teorema impulsului și momentului cinetic, sînt:

$$\begin{aligned} P_x + P'_x + P''_x &= 0 \\ P_y + P'_y + P''_y &= 0 \\ P_z + P'_z + P''_z &= M y_G (\omega' - \omega) \end{aligned} \qquad (k)$$

și

$$\begin{aligned} J_x(\omega' - \omega) &= y_A P_z - z_A P_y \\ -J_{yx}(\omega' - \omega) &= z_A P_x - x_A P_z - h P''_z \\ -J_{zx}(\omega' - \omega) &= x_A P_y - y_A P_x + h P''_y. \end{aligned} \qquad (l)$$

Fig. 17.7.



Rezultă că pentru a nu avea percuție în ax:

— percuția trebuie să fie perpendiculară pe planul format de axa de rotație și centrul de greutate;

— planul perpendicular pe axa de rotație, care conține percuția, trebuie să întîlnească axa de rotație într-un punct pentru care axa de rotație este axă principală de inerție;

— distanța de la centrul de ciocnire la axă trebuie să fie egală cu lungimea l_e a pendulului matematic sincron, al corpului care se rotește:

$$l_e = \frac{J_{xx}}{M \cdot y_G}. \qquad (m)$$

9. **Studiul ciocnirilor** poate fi efectuat și cu ajutorul ecuațiilor lui *Lagrange*, (cap. XVIII), care se reduc în acest caz la relația:

$$\Delta\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_s}\right) = P_s, \qquad (n)$$

unde E_c este energia cinetică a sistemului, q_s, $\dot{q}_s$ coordonatele, respectiv vitezele generalizate, iar P_s impulsul corespunzător variației coordonatelor generalizate.

10. **Teorema lui Carnot.** Prin introducerea unor legături persistente rigide, fără frecare, în timpul mișcării unui sistem material energia cinetică pierdută (diferența dintre energia cinetică înainte și de după ciocnire) este egală cu energia cinetică a vitezelor pierdute:

— pentru corpuri în translație

$$\sum \frac{1}{2} m_s v_s^2 - \sum \frac{1}{2} m_s v_s'^2 = \sum \frac{1}{2} m_s (v_s' - v_s)^2, \qquad (p)$$

sau în cazul ciocnirii corpurilor în rotație:

$$\sum \frac{1}{2} J_s \omega_s^2 - \sum \frac{1}{2} J_s \omega_s'^2 = \sum \frac{1}{2} J_s (\omega_s' - \omega_s)^2, \qquad (q)$$

unde ω_s și ω_s' sînt vitezele unghiulare dinainte și după ciocnire.

B. PROBLEME REZOLVATE

17.1. O bilă de oțel, de greutate Q, căzînd de la înălțimea h, lovește o placă masivă de oțel. Coeficientul de restituire fiind k, să se determine percuția și valoarea medie a forței de ciocnire dacă durata ciocnirii este Δt. Aplicație $\Delta t = 0{,}001$ s; $k = \frac{2}{3}$, $h = 2m$; $Q = 1$ N.

Rezolvare. Cum viteza v_1 a bilei înainte de ciocnire este $v_1 = \sqrt{2gh}$, iar viteza acesteia v_1' după ciocnire $v_1' = -kv_1$, deoarece viteza plăcii este nulă, rezultă pentru percuția P valoarea:

$$P = m[v_1 - (-v_1')] = m(1+k)v_1 = m(1+k)\sqrt{2gh}. \qquad (1)$$

Valoarea F_m a forței medii în timpul ciocnirii dedusă din relația:

$$P=\int_{t_1}^{t_2} F\cdot dt=F_m\cdot\Delta t \quad \text{este} \quad F_m=m\frac{1+k}{\Delta t}\cdot\sqrt{2gh}\,.$$

Pentru aplicația numerică dată, se obține o forță medie de percuție $F_m=106$ N, valoare ce depășește de peste 100 ori greutatea bilei.

17.2. O minge de dimensiuni mici, avînd un coeficient de restituire k, este aruncată din originea O, cu viteza v_0, sub unghiul α cu pămîntul, presupus orizontal și imobil. Neglijînd frecările și rezistența aerului, mingea cade în A, astfel încît $OA=x_1$. După ciocnire, mingea se deplasează cu viteza v_1, sub unghiul β (fig. 17.8) și așa mai departe. Dîndu-se v_0, α, k, să se afle distanța totală parcursă de minge și timpul total pînă cînd aceasta se oprește.

Rezolvare. a) Ciocnirea fiind oblică, componentele vitezei pe direcția deplasării mingei sînt constante, deci:

$$v_0\cos\alpha=v_1\cos\beta, \tag{1}$$

iar pe direcția perpendicularei la suprafața de ciocnire:

$$kv_0\sin\alpha=v_1\sin\beta. \tag{2}$$

Pentru o parabolă în vid, abscisa maximă, *bătaia*, este

$$x_1=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\cdot \tag{3}$$

Din relațiile (1) și (2) se obține distanța x_2 corespunzătoare celui de al doilea salt:

$$x_2=\frac{v_1^2\sin 2\alpha}{g}=k\frac{v_0^2}{g}2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=kx_1. \tag{4}$$

Ca urmare, rezultă că distanțele succesive x_1, x_2, ... x_n sînt în progresie geometrică cu rația $k<1$ și deci:

$$x=\sum x_i=x_1+kx_1+\ldots=x_1(1+k+k^2+\ldots)=\frac{1}{1-k}\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\cdot \tag{5}$$

Pentru calcularea timpului după care mingea se oprește, din ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$x=v_0t\cos\alpha \quad \text{și} \quad y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\sin\alpha\,, \tag{6}$$

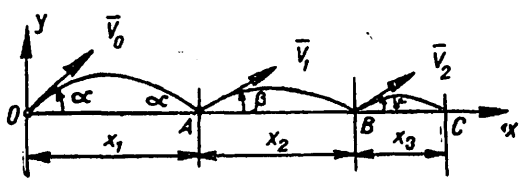
se deduce timpul necesar parcurgerii primului salt x_1 (cînd $y=0$), care este:

$$t_1=\frac{2v_0}{g}\sin\alpha. \tag{7}$$

Pentru al doilea salt:

$$t_2=\frac{2v_1}{g}\sin\beta=\frac{2}{g}kv_0\sin\alpha=kt_1. \tag{8}$$

Fig. 17.8.



Timpii succesivi descresc tot în progresie geometrică şi, însumînd, rezultă:

$$T=\sum_{1}^{n} t_i=\frac{1}{1-k}\cdot\frac{2v_0}{g}\sin\alpha. \tag{9}$$

17.3. Dintr-un punct O se asvîrle o minge cu viteza $\bar{v}_0$ care face unghiul α cu suprafaţa solului. Cînd mingea atinge înălţimea maximă, ea loveşte în punctul A un perete vertical şi se reîntoarce căzînd în punctul B (fig. 17.9). Cunoscînd distanţa $BC=d$, să se determine valoarea coeficientului de restituire k la ciocnirea dintre minge şi perete, precum şi viteza v_B.

Rezolvare. Neglijînd rezistenţa aerului, din egalitatea proiecţiei vitezelor orizontale în punctele O şi A rezultă că viteza cu care mingea loveşte peretele în A este:

$$v_A=v_0\cos\alpha. \tag{1}$$

Distanţa OC, abscisa săgeţii maxime, este:

$$OC=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g},\ \text{iar}\ h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}. \tag{2}$$

După ciocnire:

$$v'_A=kv_A=kv_0\cos\alpha. \tag{3}$$

Proiecţiile pe orizontală a vitezelor în punctele A şi B, pe traiectoria AB, trebuind să fie egale, rezultă:

$$v_A=-v_B\cos\beta\ \text{şi}\ kv_0\cos\alpha=v_B\cos\beta \tag{4}$$

Din problema precedentă rezultă:

$$d=k\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}, \tag{5}$$

şi admiţînd că punctul A poate fi atins cu mingea aruncată din B sub unghiul β, cu viteza $\bar{v}_B$, se obţine abscisa bătăii maxime:

$$d=\frac{v_B^2\sin 2\beta}{2g}. \tag{6}$$

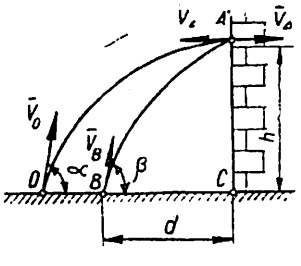
Din relaţiile (5), (6) şi (4) rezultă:

$$v_0\sin\alpha=v_B\sin\beta. \tag{7}$$

Eliminînd unghiul β din relaţiile (4) şi (7), se obţine:

$$v_B=v_0\sqrt{\sin^2\alpha+k^2\cos^2\alpha}. \tag{8}$$

Fig. 17.9.



Din expresia (5) rezultă:

$$k=\frac{2dg}{v_0^2\sin^2\alpha}\leqslant 1,$$

iar din relaţiile (1) şi (7) se obţine:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{k}\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}.$$

17.4. Să se construiască grafic vitezele şi direcţiile mişcării, după ciocnire, a două bile sferice cu masele m_1 şi m_2, care se întîlnesc oblic. Se vor studia cazurile corpurilor perfect plastice şi perfect elastice.

Rezolvare. Notînd cu A şi B poziţiile bilelor înainte de ciocnire, iar cu C punctul lor de întîlnire (fig. 17.10), vitezele lor instantanee înainte de ciocnire sînt respectiv, $\overline{AC}=\overline{v}_1$ şi $\overline{BC}=\overline{v}_2$. Centrul de masă G al celor două bile va avea înainte de ciocnire viteza $\overline{GC}=\overline{v}$.

Cum în timpul ciocnirii nu apar decît forţe interioare, viteza centrului de masă nu se va schimba după ciocnire şi deci în momentul următor ciocnirii centrul de masă se va găsi în G', pe prelungirea dreptei GC, la o distanţă $G'C=GC$.

În cazul corpurilor perfect plastice, ciocnirea se termină de îndată ce vitezele au devenit aceleaşi şi după ciocnire corpurile cu viteza comună: $u=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$ parcurg împreună dreapta CG'.

În cazul corpurilor perfect elastice, datorită ciocnirii, fiecare dintre bile îşi va modifica viteza şi în faza a doua a ciocnirii, fiecare corp va cîştiga sau va pierde aceeaşi viteză pe care ar fi cîştigat-o sau pierdut-o în prima perioadă a ciocnirii. În cazul cînd ciocnirea n-ar fi avut loc, în al doilea interval de timp, corpul A ar fi ajuns în A' şi corpul B în B'. Cum la sfîrşitul acestui interval de timp corpurile ar fi avut viteza CG', corpurile au cîştigat: primul viteza $A'G'$ şi al doilea viteza $B'G'$. În perioada a doua, bilele cîştigă aceleaşi viteze. Va fi suficient să se ia $G'B''=G'B'$ şi $G'A''=G'A''$ pentru a avea poziţiile A'' şi B'' pe care le ocupă corpurile după ciocnire. Construcţia este deci următoarea: din centrul de masă G' se duce o paralelă la AB şi se ia $G'A''=G'A'$ şi $G'B''=G'B'$. După ciocnire bilele se mişcă respectiv cu vitezele $\overline{CA''}=\overline{v}_1'$, şi $\overline{CB''}=\overline{v}_2'$.

17.5 Roata unei maşini, de masă m şi rază r, desprinzîndu-se din ax, cade cu viteza $\overline{v}_0$ care face cu verticala unghiului α şi în acelaşi timp se roteşte cu viteza unghiulară ω (fig. 17.11). Ştiind că în punctul de contact cu solul ciocnirea este neelastică şi nu există alunecare, să se determine reacţiunea solului asupra roţii şi vitezele acesteia după ciocnire. Cît trebuie să fie coeficientul de frecare dintre sol şi roată, pentru ca aceasta să nu alunece?

Rezolvare. Notînd cu v_x' şi v_y' componentele vitezei şi cu ω' viteza unghiulară după ciocnire, şi ştiind că mişcarea roţii este o mişcare plană, din ecuaţiile impulsului şi momentului cinetic deducem:

$$m\,(v_x'-v_0\sin\alpha)=X_A\,; \quad (1)$$

$$m\,(v_y'+v_0\cos\alpha)=Y_A\,; \quad (2)$$

$$J\,(\omega'-\omega)=-rX_A, \quad (3)$$

Fig. 17.10.

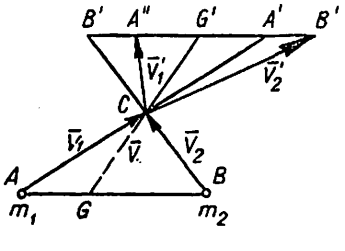
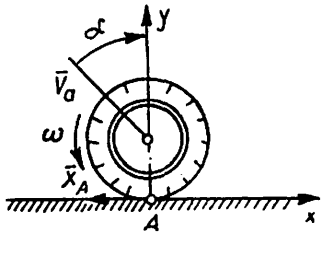


Fig. 17.11.



în care X_A și Y_A sînt componentele reacțiunii în punctul A, care produce percuții.

Considerînd ciocnirea neelastică, rezultă $v'_y=0$ și cum nu există alunecare după ciocnire, se poate scrie: $\omega' r+v'_x=0$. Luînd $J=mr^2$, (roată cu o coroană foarte subțire), din rezolvarea sistemului, se obține:

$$X_A=\frac{m}{2}(r\omega+v_0\sin\alpha)\,;\quad Y_A=mv_0\cos\alpha, \tag{4}$$

iar vitezele după ciocnire sînt:

$$v'_x=\frac{1}{2}(v_0\sin\alpha-r\omega)\,;\quad \omega'=\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{v_0}{r}\sin\alpha\right).$$

Pentru ca în punctul A să nu existe alunecare, trebuie ca:

$$X_A\leqslant\mu Y_A.$$

Înlocuind valorile obținute în relația (4), rezultă:

$$\mu\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{r\omega}{v_0\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right).$$

17.6. Un tăvălug plin, cu masa M și raza r, se rostogolește fără alunecare, pe un plan orizontal, cu viteza $\bar{v}$. La un moment dat tăvălugul trece cu planul său median un prag de înălțime h (fig. 17.12). Considerînd ciocnirea complet neelastică:

a) să se calculeze reacțiunea în punctul de contact B și viteza tăvălugului după trecerea pragului;

b) care este condiția ce trebuie îndeplinită pentru ca să nu existe alunecare în B ? Discuție;

c) să se determine pierderea de energie suportată de tăvălug în timpul trecerii peste prag.

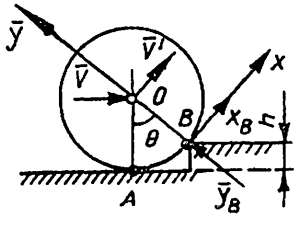
Rezolvare. a) Cilindrul se rostogolește cu viteza orizontală constantă v_0 și în momentul ciocnirii cu obstacolul B viteza centrului se modifică, iar în punctul de ciocnire B apare o forță de reacție, cu componentele X_B și Y_B, care produc percuții. În momentul ciocnirii, noul centru instantaneu de rotație este B, deci direcția vitezei centrului tăvălugului este v', perpendiculară pe raza OB.

Notînd cu ω și ω' respectiv vitezele unghiulare ale tăvălugului înainte și după ciocnire, componentele vitezei centrului O sînt:

$$\bar{v}\,(v\cos\theta,\ -v\sin\theta)\,;\quad \bar{v}'\,(v',\ 0).$$

Greutatea (forțele finite) nu produce percuții. Singurele percuții sînt produse de reacțiunile $(X_B,\ Y_B)$. Tăvălugul, avînd o mișcare plană, ecuațiile (b') și (d') devin:

Fig. 17.12.



$$M\,(v'-v\cos\theta)=X_B\,;$$
$$M\,(0+v\sin\theta)=Y_B\,;\qquad (1)\text{ și }(2)$$
$$J\,(\omega-\omega')=rX_B,\quad \text{în care}\quad J=M\frac{r^2}{2}\,;\qquad (3)\text{ și }(4)$$

dar, avînd rostogolire fără alunecare,

$$\omega=\frac{v}{r} \quad \text{şi} \quad \omega'=\frac{v'}{r}. \tag{5}$$

Eliminînd reacţiunea X_B din ecuaţiile (1) şi (3), şi ţinînd seamă de reacţiile (4) şi (5), rezultă:

$$v'=\frac{v}{3}(1+2\cos\theta). \tag{6}$$

Cunoscînd pe v' se obţin reacţiunile:

$$X_B=\frac{Mv}{3}(1-\cos\theta); \quad Y_B=M\cdot v\cdot\sin\theta. \tag{7}$$

b) Pentru a nu exista alunecare în punctul de contact B trebuie îndeplinită condiţia:

$$X_B\leqslant\mu Y_B,$$

de unde:

$$\mu\geqslant\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{8}$$

Pentru cazul particular $\theta=\frac{\pi}{2}$, condiţia ca tăvălugul să se rostogolească fără alunecare este $\mu\geqslant\frac{1}{3}$.

c) Energia cinetică a tăvălugului înainte de ciocnire este:

$$E_c=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}M\frac{r^2}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2=\frac{3}{4}\cdot M\cdot v^2. \tag{9}$$

Pierderea de energie în timpul ciocnirii, ţinînd seamă de relaţia (6), devine:

$$E_c=\frac{3}{4}M(v^2-v'^2)=\frac{M\cdot v^2}{3}(1-\cos\theta)(2+\cos\theta).$$

Cum:

$$\cos\theta=\frac{r-h}{r}=1-\frac{h}{r},$$

rezultă:

$$\Delta E_c=Mv^2\cdot\left[\frac{h}{r}-\frac{1}{3}\left(\frac{h}{r}\right)^2\right];$$

iar dacă înălţimea h a pragului este mică în raport cu raza r, pierderea de energie este:

$$\Delta E_c\approx\left(\frac{h}{r}\right)Mv^2.$$

17.7. Să se arate unele aplicaţii practice în care se foloseşte centrul de ciocnire.

Rezolvare. În afară de observaţiile din problema precedentă se vor da unele indicaţii referitoare la: *ciocan, pendulul balistic, ciocanul-pendul* pentru măsurarea *rezilienţei.*

a) *Ciocanul.* Pentru a da un bun randament în muncă, ciocanul nu trebuie să obosească inutil pe muncitor, deci nu trebuie să producă percuții în mînă (fig. 17.13).

Depărtarea dintre punctul de prindere O al ciocanului și centrul de ciocnire C este lungimea pendulului echivalent, de mărime.

$$l_e=\xi+\frac{i^2}{\xi}\cdot$$

Centrul de greutate al ciocanului trebuie să fie mai aproape de punctul de prindere O decît centrul de ciocnire C și pentru aceasta se face coada ciocanului de o lungime corespunzătoare, iar forma ciocanului este făcută astfel încît să apropie centrul de greutate de O.

b) *Pendulul balistic* poate servi la măsurarea vitezelor inițiale ale proiectilelor. Este un pendul mobil în jurul unui cuțit O avînd un cilindru umplut cu nisip (fig. 17.14).

Proiectilul de masă m, lansat cu viteza inițială v_0 necunoscută, este oprit de cutia de nisip și produce asupra pendulului percuția $\bar{P}$, perpendiculară pe planul vertical format de axă și G.

În raport de unghiul θ de înclinație al pendulului datorit percuției P, aplicînd teorema energiei cinetice și teoremele impulsului, se poate determina viteza inițială după relația:

$$v_0=2\sqrt{\frac{g}{l_e}}\cdot\frac{M\cdot\eta+m\cdot l_e}{m}\cdot\sin\frac{\theta}{2},$$

în care M este masa pendulului și m masa proiectilului, în ipoteza că percuția se produce în centrul de ciocnire.

c) *Ciocanul pentru determinarea rezilienței.* Ciocanul este făcut dintr-un pendul-ciocan OG ce poartă un cuțit A care rupe epruveta E (fig. 17.15).

Ciocnirea se produce cînd centrul de greutate G are poziția cea mai de jos și pendulul este astfel construit încît să nu producă percuții în axa de rotație.

Centrul de greutate ridicîndu-se după ciocnire în G', la o distanță verticală h față de poziția inițială G, energia cinetică pierdută în ciocnire de către pendulul de masă m este:

$$\Delta E=mhg.$$

Reziliența este raportul dintre $\Delta E/A$, A fiind aria secțiunii epruvetei.

Fig. 17.13.

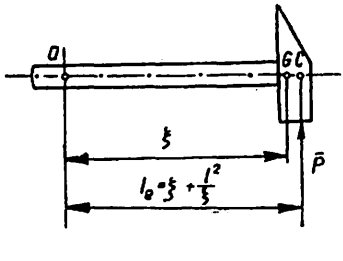


Fig. 17.14.

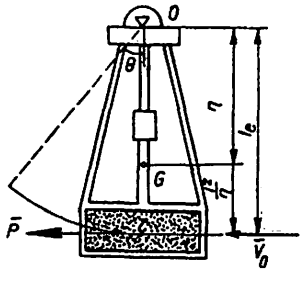
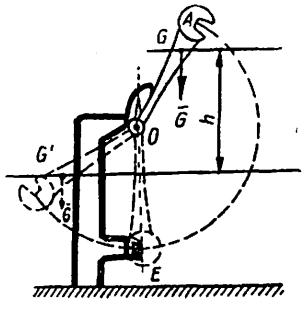


Fig. 17.15.



17.8. Un bloc paralelipipedic dreptunghic, de dimensiuni b, c, h și greutate G, are la un moment dat viteza v cînd întîlnește în cale un prag foarte mic A (fig. 17.16). Admițînd că saltul peste prag este neglijabil, să se calculeze:

1) Valoarea minimă a vitezei v care permite blocului să pivoteze în jurul axei trecînd prin A și să capete o poziție verticală, chiar în momentul în care încetează viteza.

2) Să se determine pierderea relativă de energie $\frac{\Delta E}{E}$ în momentul ciocnirii, în funcție de raportul $\frac{b}{h}$.

Rezolvare. Blocul avînd viteza de translație v, înainte de ciocnirea sa cu pragul A posedă impulsul $H_x = \frac{G}{g} v$. Din teorema momentului cinetic aplicată în momentul ciocnirii în raport cu axa AB, cum momentul percuțiilor exterioare este nul, rezultă

$$J_z \cdot \omega = \frac{h}{2} H_x, \tag{1}$$

unde:

$$J_z = \frac{1}{12} \frac{G}{g} (b^2+h^2) + \frac{G}{g} \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{3} \frac{G}{g} (b^2+h^2),$$

este momentul de inerție, iar ω viteza unghiulară de rotație în jurul muchiei AB.

Ca urmare viteza unghiulară ω este:

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{h}{b^2+h^2} v.$$

Aplicînd teorema energiei între momentul întîlnirii pragului și momentu în care blocul s-a ridicat cu centrul său de greutate pe verticala pragului, avem:

$$\frac{1}{2} J_z \omega^2 = G \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} - \frac{h}{2} \right)$$

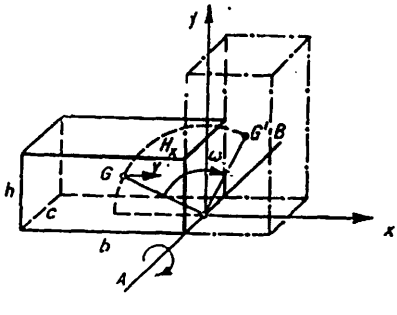
de unde viteza minimă v_{min} pe care trebuie să o aibă blocul este:

$$v_{min} = 2 \sqrt{\frac{g}{3} \left(1+\frac{b^2}{h^2}\right) (\sqrt{b^2+h^2} - h)}.$$

Pierderea relativă de energie în momentul ciocnirii, ținînd seama de relațiile precedente, este:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 - \frac{1}{2} J_z \omega^2}{\frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2} = 1 - \frac{3}{4} \frac{1}{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2}.$$

Fig. 17.16.



17.9. O bară rigidă şi omogenă $AB=l$ şi masa m cade într-un plan vertical şi se ciocneşte în A de un planşeu neelastic (fig. 17.17). Să se afle reacţiunea din A produsă în timpul ciocnirii.

Rezolvare. Problema se va soluţiona prin aplicarea ecuaţiilor Lagrange. Notînd cu θ şi y_G coordonatele polare ale centrului de greutate ale barei, cu $J_G=\frac{ml^2}{12}$ momentul de inerţie al barei în raport cu centrul de masă, energia cinetică a sistemului este:

$$E_c=\frac{1}{2}m\dot{y}_G^2+\frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2. \tag{1}$$

Ciocnirea fiind fără frecare, reacţiunea P_y din A, datorită ciocnirii, produce ca impulsuri generalizate corespunzătoare celor două coordonate valorile:

$$P_y, \quad \text{şi} \quad \frac{1}{2}P_y l\sin\theta. \tag{2}$$

Ca urmare, ţinînd seama de relaţia (n) din consideraţiile generale, se deduc ecuaţiile:

$$\Delta\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{y}_G}\right)=m\left(\dot{y}_{G_2}-(-\dot{y}_{G_1})\right)=P_y; \quad \Delta\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right)=J_G(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)=\frac{1}{2}P_y l\sin\theta,$$

unde indicele *1* corespunde momentului dinainte de ciocnire, iar indicele *2*, după ciocnire.

Din ecuaţiile precedente se deduc $v'_{G,2}$, $\dot{\theta}_2$ ce reprezintă respectiv viteza centrului de greutate a barei şi viteza unghiulară a acesteia, precum şi reacţiunea P_y:

$$v'_G=\dot{y}_{G,2}=-\frac{l\sin\theta\left[3\dot{y}_{G,0}\frac{\sin\theta}{l}+\frac{1}{2}\omega_0\right]}{1+3\sin^2\theta}$$

$$\omega'=\dot{\theta}_2=\frac{\omega+6v_{G,0}\cdot\frac{\sin\theta}{l}}{1+3\sin^2\theta}; \quad P_y=\frac{m\left(v_{G,0}-\frac{l}{2}\omega\sin\theta\right)}{1+3\sin^2\theta}.$$

17.10. Două roţi de raze R_1, R_2 se învîrtesc independent în jurul axelor paralele O_1 şi O_2 cu vitezele unghiulare ω_1, ω_2 (fig. 17.18). La un moment dat o a treia roată, de rază R, situată pe o axă paralelă cu precedentele şi care nu se roteşte, se presează contra primelor două roţi. Grosimea fiind suficient de mare, se produc în punctele de contact frecări, care fac ca cele trei roţi să se mişte solidar.

Fig. 17.17.

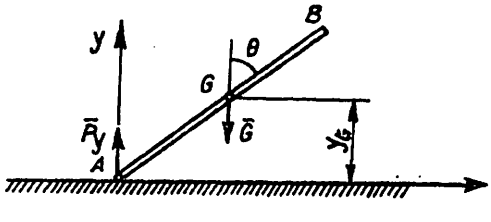
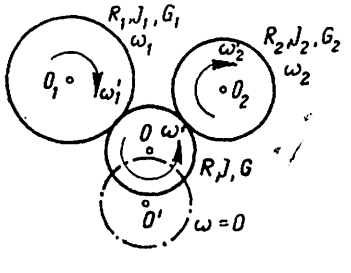


Fig. 17.18.



Se cere să se determine vitezele unghiulare ω_1', ω_2' și ω' a celor trei roți după stabilirea contactului;

Rezolvare. a) Din relațiile:

$$\omega' R = \omega_1' R_1 = \omega_2' R_2,$$

și teorema lui *Carnot*:

$$\left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2\right) - \left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1'^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2'^2 + \frac{1}{2} J \omega'^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} J_1 (\omega_1 - \omega_1')^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega_2 - \omega_2')^2 + \frac{1}{2} J \omega'^2$$

rezultă:

$$\omega_1' = \frac{G_1 R_1 \omega_1 + G_2 R_2 \omega_2}{(G_1 + G_2 + G) R_1}$$

$$\omega_2' = \frac{G_1 R_1 \omega_1 + G_2 R_2 \omega_2}{(G_1 + G_2 + G) R_2}$$

$$\omega' = \frac{G_1 R_1 \omega_1 + G_2 R_2 \omega_2}{(G_1 + G_2 + G) R}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

17.11. Un corp plastic de 40 N, având o viteză de 12 m/s, lovește centric un alt corp în greutate de 150 N, având o viteză în același sens cu viteza primului corp, egală cu 3 m/s. Să se determine:

a) viteza u a ambelor corpuri după ciocnire:

b) pierderea de energie în ciocnire.

Răspuns: $K=0$; $u=4{,}9$ m/s; $\Delta E=233$ N·m.

17.12. Un ciocan, de greutate G_1 newtoni, cade de la înălțimea h metri asupra unei nicovale de greutate G_2 newtoni. Coeficientul de restituire fiind k să se determine:

a) viteza ciocanului după ciocnire;

b) pierderea de energie în ciocnire.

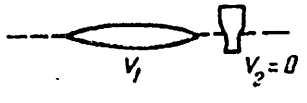
Aplicație numerică: $G_1=2\cdot10^4$ N; $G_2=1{,}6\cdot10^5$ N, $h=1{,}25$ m; $k=0{,}6$.

Răspuns: $v_2=0$; $v_1'=\frac{G_1-kG_2}{G_1+G_2}$; $v_1=\sqrt{2gh}$; $v_1=4{,}95$ m/s; $\Delta E=1{,}08\cdot10^4$ N·m.

17.13. Suveica unui război de țesut (fig. 17.19) de greutate $G_1=2{,}7$ N, care are viteza $v_1=8{,}4$ m/s, lovește picherul în greutate $G_2=2{,}3$ N, care se află în repaus. Să se afle vitezele suveicii și picherului după ciocnire, având $k=0{,}3$.

Răspuns: $v_1'=\frac{G_1-kG_2}{G_1+G_2}\cdot v=3{,}36$ m/s; $v_2'=\frac{(1+k)G_1}{G_1+G_2}=5{,}9$ m/s.

Fig. 17.19.



17.14. O bară omogenă de lungimea $2l$ și masa M, articulată în O, este ciocnită în capătul B de o bilă cu masa m, care cade fără viteză inițială de la o înălțime h (fig. 17.20). Înainte de ciocnire pîrghia era în repaus. Știind că ciocnirea este perfect elastică, să se determine viteza v' a bilei și viteza unghiulară ω a pîrghiei după ciocnire. Discuție.

Răspuns:

$$v' = \frac{3m-M}{3m+M} \cdot \sqrt{2gh}; \quad \omega' = \frac{6m}{3m+M} \cdot \frac{v}{l}.$$

Dacă $M>3m$, după ciocnire bila se ridică în sus; dacă $M=3m$ bila cade liberă, fără viteză inițială; dacă $M<3m$ bila cade în jos cu viteza inițială v'.

17.15. O placă circulară omogenă, de grosime constantă (fig. 17.21), poate oscila în jurul tangentei TT'. Să se afle centrul de ciocnire, astfel ca să nu se producă percuție în ax. Cum se modifică centrul de ciocnire dacă oscilația plăcii se produce în jurul unei axe tangentă la placă dar perpendiculară pe aceasta.

Răspuns:

$$l_c = OC = \frac{J_{TT'}}{M \cdot \eta} = \frac{5}{4} R; \quad l_c = OC' = \frac{J_{T'T}}{M\eta} = \frac{3}{2} R.$$

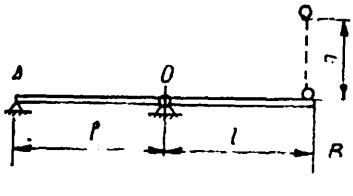
17.16. O bară omogenă cu lungimea l și masa m este așezată perpendicular pe un plan orizontal. Dacă în punctul A definit de $GA=a$, bara suferă o percuție orizontală $\overline{P}$, să se determine mișcarea pe care o va căpăta bara (fig. 17.22).

Răspuns:

$$v' = \frac{P}{m} \text{ și } \omega' = \frac{12a}{2} \cdot \frac{P}{m}.$$

17.17. Un disc omogen cu masa M și raza R se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unui ax care trece prin O, perpendicular pe planul discului, punct situat la distanța l de centrul de greutate (fig. 17.23). În același timp, discul se deplasează cu viteza v, ce face cu direcția OG unghiul α. Punctul O fixîndu-se brusc, să se determine viteza unghiulară a discului în momentul fixării, precum și percuția care se naște în ax.

Fig. 17.20.



Indicație și răspuns. Ținînd seama că după ciocnire viteza centrului de greutate este: $v'_x=0$; $v'_y=-l\omega'$, iar înainte de fixare viteza era $v_x=v\cos\alpha$; $v_y=v\sin\alpha-l\omega$, din teorema impulsului rezultă:

$$M \cdot v \cdot \cos\alpha = P_x; \quad M(-l\omega' + l\omega - v \cdot \sin\alpha) = P_y,$$

se obțin componentele P_x și P_y a vectorului percuție în ax.

Fig. 17.21.

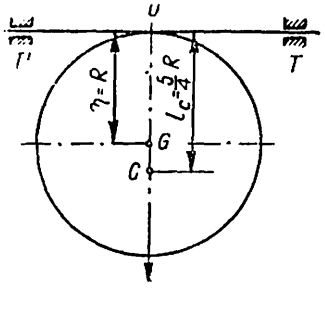


Fig. 17.22.

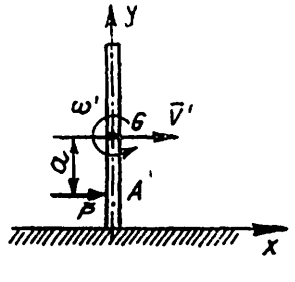
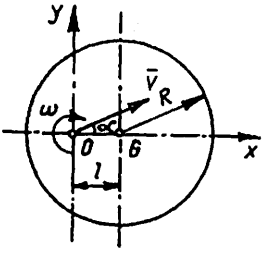


Fig. 17.23.



Din teorema momentului cinetic,

$$M\frac{R^2}{2}(\omega'-\omega)=Ml\,(-l\omega'+l\omega-v\sin\alpha),$$

rezultă viteza unghiulară a discului după percuţie:

$$\omega'=\omega-\frac{2vl\sin\alpha}{R^2+2l^2}.$$

17.18. O roată cu masa M, raza r şi raza de giraţie i, se rostogoleşte pe un plan orizontal, cu viteza v (fig. 17.24). La un moment dat, roata urcă o pantă de unghi α. Să se calculeze viteza roţii în momentul schimbării pantei.

Indicaţie şi răspuns: Din teorema impulsului şi a momentului cinetic, mişcarea fiind plană, rezultă următorul sistem de trei ecuaţii:

$$M(v'-v\cos\alpha)=X_A;\quad M(O+v\sin\alpha)=Y_A$$
$$J(\omega'-\omega)=-X_Ar.$$

Înlocuind $J=M\cdot i^2$, unde i este raza de inerţie, se obţine:

$$v'=v\frac{i^2+r^2\cos\alpha}{i^2+r^2}.$$

17.19. O bară OA, articulată în O, este lăsată să cadă fără viteză iniţială de la un unghi α (fig. 17.25). După ciocnirea capătului barei de un opritor, baza revenind sub unghiul β, se cere să se afle coeficientul de restituire k.

Răspuns.

$$k=\sqrt{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}.$$

17.20. O bară cu greutatea G_1 şi lungimea $O_1A=l$, articulată în O_1, poate ciocni muchea superioară a unui cub de greutatea G_2 şi latură a, articulat în O_2 (fig. 17.26). Coeficientul de restituire fiind 0,5 să se determine unghiul α, astfel ca după ciocnire, cubul să se poată roti în jurul axei O_2.

Răspuns:

Cu ajutorul teoremei energiei se află viteza unghiulară de rotire a barei înainte de ciocnire, deci viteza cu care capătul barei loveşte cubul. Apoi, aplicînd teorema momentului cinetic în timpul ciocnirii cubului faţă de axa O_2, se găseşte:

$$\cos\alpha=1-\frac{2}{9}(\sqrt{2}-1)\frac{a}{l}\left(1+2\frac{G_2}{G_1}\right)^2.$$

Fig. 17.24.

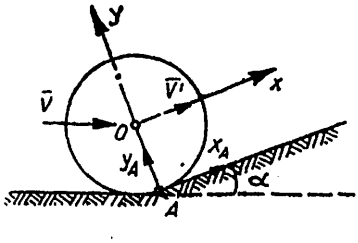


Fig. 17.25.

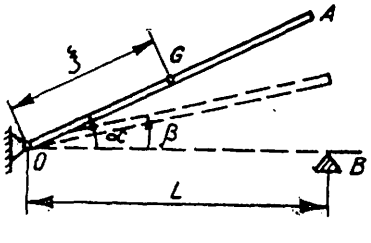
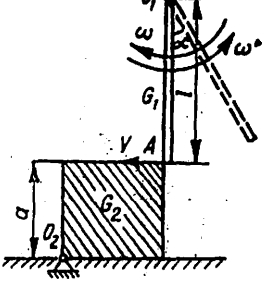


Fig. 17.26.



17.21. Vătalei unui război de țesut (fig. 17.27) i se cunoaște momentul de inerție J_0 în raport cu axa de rotație, greutatea acesteia G, distanța η a centrului de greutate la axul vătalei. Să se determine:

a) perioada T și lungimea pendulului sincron l_e;

b) masa suplimentară m_1 care trebuie adăugată la distanța L de ax, pentru a ridica centrul de ciocnire pînă la gura țesăturii aflată la distanța d de axa de rotație, eliminînd astfel percuțiile în ax;

c) pozițiile extreme ale centrului de ciocnire la axa de rotație a vătalei, în cazul în care se adaugă o masă suplimentară m.

Indicații și răspuns:

a) $T=2\pi\sqrt{\frac{J_0}{G\eta}}$, $l_e=\frac{J_0}{M\eta}$ unde M este masa totală.

b) Prin adăugarea masei suplimentare m_1 se modifică atît momentul de inerție cît și momentul static iar perioada devine:

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{J_0+m_1L^2}{G\eta+m_1gL}}=2\pi\sqrt{\frac{d}{g}},$$

de unde rezultă:

$$m_1=\frac{Gd\eta-gJ_0}{gL(L-d)}.$$

c) pozițiile extreme ale centrului de ciocnire y la axa de rotație a vătalei, în funcție de distanța x a masei suplimentare, sînt determinate de valorile extreme ale funcției $y=f(x)$

$$\frac{y}{g}=\frac{J_0+mx^2}{G\eta+mgx}.$$

Se obține:

$$x_{1,2}=\frac{-M\eta\pm\sqrt{M^2\eta^2+mJ_0}}{m}.$$

17.22. La un moment dat, trei roți libere O_1,O_2,O_3 de raze R_1, R_2, R_3, momente de inerție J_1, J_2, J_3 și viteze unghiulare ω_1, ω_2, ω_3 se cuplează brusc (fig. 17.28). Să se afle vitezele unghiulare ω_1', ω_2', ω_3' după cuplare și percuțiile dintre roți din momentul cuplării.

Indicație și răspuns.

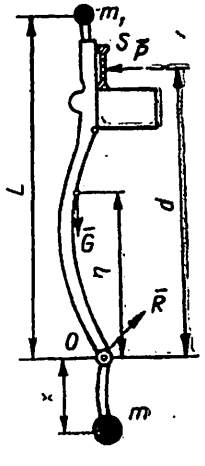


Fig. 17.27.

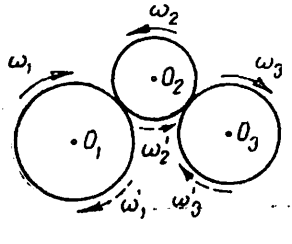


Fig. 17.28.

$$P_{1-2}=\frac{J_1}{R_1}(\omega_1'-\omega_1).$$

$$P_{2-3}=\frac{J_3}{R_3}(\omega_3'-\omega_3).$$

Aplicînd teorema lui Carnot și relațiile cinematice dintre vitezele unghiulare, se obține:

$$\omega_1'R_1=\omega_2'R_2=\omega_3'R_3=\frac{\frac{J_1\omega_1}{R_1}+\frac{J_2\omega_2}{R_2}+\frac{J_3\omega_3}{R_3}}{\frac{J_1}{R_1^2}+\frac{J_2}{R_2^2}+\frac{J_3}{R_3^2}}.$$

Capitolul 18

MECANICA ANALITICĂ

I. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT. FORȚE DE INERȚIE. ECHILIBRU DINAMIC

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Întregul edificiu al dinamicii clasice** este bazat pe legea fundamentală a lui Newton, $\bar{F}=m\bar{a}$, care arată legătura dintre masă, accelerație și forță.

Pentru aplicațiile practice, această ecuație se scrie sub o altă formă, cunoscută sub denumirea de *principiul lui d'Alembert.* Nu este vorba de un nou principiul ci de un alt mod de a exprima legile fundamentale ale dinamicii. Cu ajutorul acestui principiu, soluționarea problemelor de dinamică, poate fi obținută folosind metodele din statică, prin introducerea, pe lîngă forțele date și a celor de legătură, a *forțelor de inerție.*

Forțe de inerție

2. **Forțele de inerție** apar ori de cîte ori există variații de viteze în mărime sau direcție. Acestea au întotdeauna sens contrar accelerației. Ele sînt *fictive* pentru *corpul mișcat* și *reale* pentru *corpul care produce mișcarea.*

În tabela 18.1 sînt înscrise valorile torsorului de inerție (forțe și momente de inerție) în diferite mișcări pe care poate să le aibă punctul material și rigidul.

3. **Forțe de inerție în mișcarea relativă.** Deoarece într-o asemenea mișcare intervin accelerațiile: absolută, relativă, de transport și Coriolis ($\bar{a}_a=\bar{a}_r+\bar{a}_t+\bar{a}_c$), există și forțe de inerție corespunzătoare: $\bar{F}_{i_a}$, $\bar{F}_{i_r}$, $\bar{F}_{i_t}$, $\bar{F}_{i_c}$ între care există relația:

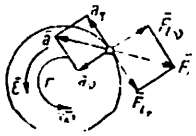
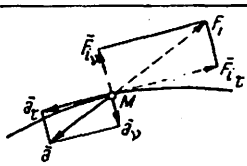
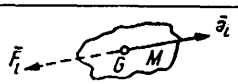
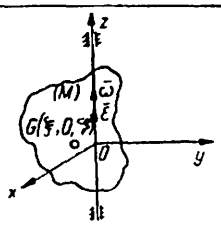
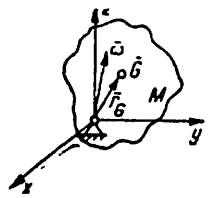
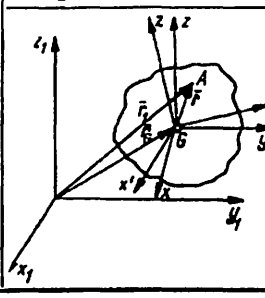
$$\bar{F}_{i_a}=\bar{F}_{i_r}+\bar{F}_{i_t}+\bar{F}_{i_c}. \qquad (a)$$

În cazul particular în care punctul material este în mișcare, în raport cu un sistem de referință mobil într-o mișcare de translație a cărui origine are o mișcare rectilinie și uniformă, atunci:

$$\bar{F}_{i_t}=0 \quad \text{și} \quad \bar{F}_{i_c}=0 \text{ și rămîne } \bar{F}_{i_a}=\bar{F}_{i_r}. \qquad (b)$$

Tabela 18.1

Forțe și torsor de inerție

	Sistem	Figura	Torsorul forțelor de inerție	Observații
Punct material	Mișcare circulară variată		$\lvert\bar{F}_{iv}\rvert = mr\omega^2$ $\lvert\bar{F}_{i\tau}\rvert = mr\varepsilon$ $\lvert\bar{F}_i\rvert = mr\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$	În mișcare uniformă $\bar{F}_{i\tau}=0$
	Mișcare curbilinie (coordonate intrinseci)		$\lvert\bar{F}_{iv}\rvert = m\frac{v^2}{\rho}$ $\lvert\bar{F}_{i\tau}\rvert = m\dot{v}$ $\lvert\bar{F}_i\rvert = m\sqrt{\dot{v}^2+\frac{v^4}{\rho^2}}$	$\bar{F}_{iv}$ — se numește forța centripetă și ρ raza de curbură.
Rigid	în translație		$\bar{F}_i = M\bar{a}_C$; $\bar{M}_i = 0$	G — centrul de inerție.
	în rotație *a)* axă principală de inerție și de simetrie.		$\bar{F}_i = 0$; $\bar{M}_i = -J_z\bar{\varepsilon}$	J_z — momentul de inerție în raport cu axa de rotație.
	b) axă de rotație oarecare		$\bar{F}_i = -M\bar{a}_G = -M\omega^2\xi\bar{i} + M\varepsilon\xi\bar{j}$ $\bar{M}_i = (J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2)\bar{i} + (J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2)\bar{j} - J_z\varepsilon\bar{k}$	
	cu punct fix		$\bar{F}_i = -M[\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_G + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_G)]$ $\bar{M}_i = M_{ix}\bar{i} + M_{iy}\bar{j} + M_{iz}\bar{k}$ $M_{ix} = -J_1\varepsilon_x + \omega_y\omega_z(J_2-J_3)$ $M_{iy} = -J_2\varepsilon_y + \omega_z\omega_x(J_3-J_1)$ $M_{iz} = -J_3\varepsilon_z + \omega_x\omega_y(J_1-J_2)$	$J_1J_2J_3$ sînt momentele de inerție centrale principale.
	în mișcare generală		$\bar{F}_i = -M\bar{a}_G$ $\bar{M}_i = -\left(\frac{\partial\bar{K}_G}{\partial t} + \bar{\omega}\times\bar{K}_G\right)$	$\bar{a}_G$ — accelerația centrului de inerție. $\bar{K}_G$ — momentul cinetic în raport cu centrul de inerție.

Aplicarea principiului lui d'Alembert

4. **Mişcarea punctului.** Avînd un punct material M, cu masa m, acţionat de către o serie de forţe date, cu rezultanta $\bar{F}$ şi supus la anumite legături însumate într-o rezultantă $\bar{L}$, punctul poate fi considerat ca liber sub acţiunea rezultantei $\bar{R}=\bar{F}+\bar{L}$ şi va căpăta o acceleraţie $\bar{a}$.

Dacă se introduce forţa de inerţie

$$\bar{F}_i=-m\bar{a} \quad \text{rezultă} \quad \bar{R}+\bar{F}_i=0,$$

sau

$$\bar{F}+\bar{L}+\bar{F}_i=0, \tag{c}$$

care se poate enunţa astfel:

În mişcarea punctului, la fiecare moment, există echilibru între forţele date, de legătură şi de inerţie. Acest echilibru nu este real, ci fictiv, căci altfel corpul s-ar găsi în stare de repaus, sau de mişcare rectilinie uniformă.

5. **Mişcarea sistemelor.** Dacă în loc de un singur punct, există un sistem de puncte materiale sau corpuri, izolîndu-le, se poate face ca fiecăruia dintre ele să-i corespundă cîte un torsor $\tau_i(\bar{F}_i, \bar{M}_i)$ de inerţie. Pentru fiecare corp va exista cîte o relaţie de echilibru:

$$\begin{aligned} &\sum \bar{F}_{ext}+\sum \bar{F}_l+\sum \bar{F}_i=0; \\ &\sum \bar{M}_{ext}+\sum \bar{M}_l+\sum \bar{M}_i=0 \end{aligned} \tag{d}$$

şi deci se poate studia echilibrul întregului sistem. Astfel, se poate enunţa:

Într-un sistem material în mişcare, în fiecare moment, există echilibru între forţele exterioare, forţele de legătură şi forţele de inerţie.

6. **Utilitatea principiului.** Cu ajutorul principiului lui d'Alembert se rezolvă în general trei categorii de probleme:

a) determinări de mişcări prin reducerea problemelor de mişcare la probleme de echilibru dinamic;

b) calcularea reacţiunilor în stare dinamică, care sînt diferite de cele în stare statică, deoarece în stare statică $\bar{L}=-\bar{F}$, iar în stare dinamică $\bar{L}=-\bar{F}-\bar{F}_i$;

c) studierea echilibrului relativ, care se poate reduce la echilibru absolut.

În practică, o mişcare este considerată de cele mai multe ori în raport cu un sistem de referinţă care, la rîndul lui, se află în mişcare în raport cu un sistem fix. *Dacă punctul material este în repaus în raport cu sistemul mobil, punctul se află în echilibru relativ.*

Problemele de echilibru relativ se rezolvă în acelaşi mod ca şi cele de echilibru *absolut*, înlocuind forţa de inerţie în mişcarea absolută cu forţa de inerţie de

transport $\bar{F}_{i_t}$. În adevăr, $\bar{a}=\bar{a}_r+\bar{a}_t+\bar{a}_c$, și cum viteza relativă $\bar{v}_r=0$, rezultă că atît accelerația relativă $\bar{a}_r=0$, cît și accelerația complementară $\bar{a}_c=2\bar{\omega}\times\bar{v}_r=0$, deci:

$$\bar{a}=\bar{a}_t \quad \text{și} \quad \bar{F}+\bar{L}+\bar{F}_{i_t}=0, \tag{e}$$

în care $\bar{F}_{i_t}$ este forța de inerție de transport.

B. PROBLEME REZOLVATE

18.1. Două corpuri P și Q sînt legate între ele cu un fir trecut peste un scripete fără frecare și cu masă neglijabilă (fig. 18.1). Corpurile se pot deplasa pe două plane înclinate ce au respectiv unghiurile α și β. Corpul Q alunecînd pe planul înclinat în jos și coeficientul de frecare dintre corpuri și planuri fiind μ, să se calculeze accelerația sistemului, valorile reacțiunilor și tensiunea în fir.

Rezolvare. Asupra corpului P acționează următoarele forțe (fig. 18.2) exterioare, de legătură și de inerție:

— greutatea proprie $\bar{P}$; — forța de frecare $\bar{F}'_\mu$;
— tensiunea în fir $\bar{T}$; — forța de inerție $\bar{F}_1$.
— reacțiunea planului $\bar{N}_1$;

Proiectînd forțele pe un sistem de două axe, se poate scrie:

$$T-F_1-P\sin\alpha-F'_\mu=0; \tag{1}$$

$$N_1-P\cos\alpha=0, \tag{2}$$

în care

$$F_1=\frac{P}{g}a \quad \text{și} \quad F'_\mu=\mu P\cos\alpha,$$

ecuația (1) devine:

$$T-\frac{P}{g}a-P\sin\alpha-\mu P\cos\alpha=0. \tag{1'}$$

Izolînd corpul Q, asupra lui acționează următoarele forțe:

— greutatea proprie $\bar{Q}$; — forța de frecare $\bar{F}''_\mu$;
— tensiunea în fir $\bar{T}$; — forța de inerție $\bar{F}_2$.
— reacțiunea planului $\bar{N}_2$;

Scriind echilibrul acestor forțe, rezultă:

$$Q\sin\beta-T-F_2-F''_\mu=0; \tag{3}$$

$$N_2-Q\cos\beta=0, \tag{4}$$

Fig. 18.1.

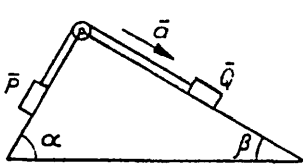
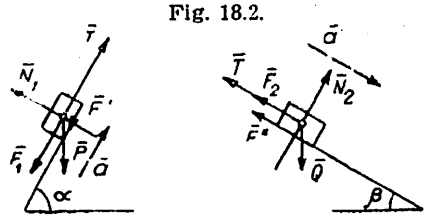


Fig. 18.2.



Cum: $F_2=\frac{Q}{g}a$ și $F_\mu''=\mu Q\cos\beta$,
ecuația (3) devine:

$$T+\frac{Q}{g}a+\mu Q\cos\beta-Q\sin\beta=0. \qquad (3')$$

Eliminînd pe T din ecuațiile (1') și (3'), se găsește

$$a=\frac{Q(\sin\beta-\mu\cos\beta)-P(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{P+Q}g=const. \qquad (5)$$

Apoi:

$$N_1=P\cos\alpha;\quad N_2=Q\cos\alpha;\quad T=\frac{PQ}{P+Q}[\sin\alpha+\sin\beta+\mu(\cos\alpha-\cos\beta)].$$

18.2. Un camion transportă un transformator de greutate G. Pentru a nu se deplasa în mers, transformatorul este ancorat cu patru cabluri ca în figura 18.3. Coeficientul de frecare dintre platforma camionului și sarcină este μ. Camionul avînd viteza v km/oră frînează brusc, cu o forță constantă, oprindu-se după t secunde. Să se determine tensiunile în cablurile de ancorare.

Rezolvare. În perioada opririi, camionul are o mișcare uniform întîrziată cu accelerația

$$a=\frac{v}{3{,}6\,t}\ \text{m/s}^2.$$

Forța de inerție ce apare în această perioadă va acționa cablurile de ancorare CC' și DD' în care se vor produce tensiunile T_1 și T_2. Între transformator și platforma camionului mai intervine și forța de frecare $F_\mu\leqslant\mu G$.

Din ecuațiile de echilibru dinamic, rezultă:

$$T_1=T_2=T;\quad F_i-F_\mu-2T\sin\alpha=0.$$

Ca urmare:

$$T=\frac{ma-\mu G}{2\sin\alpha}=\frac{G}{2\sin\alpha}\cdot\left(\frac{v}{3{,}6\,gt}-\mu\right).$$

18.3. Centrul de greutate al unui autovehicul care se deplasează pe o șosea, avînd raza de curbură ρ (fig. 18.4), are centrul de greutate la o înălțime h față de sol, iar distanța dintre axele roților l. Să se determine:

a) viteza maximă cu care poate merge autovehiculul fără să se răstoarne;

b) viteza maximă pentru care nu derapează, coeficientul de frecare dintre șosea și roți fiind μ;

c) în cazul în care șoferul frînează automobilul brusc cu accelerația a, să se arate că posibilitatea de alunecare a mașinii crește.

Fig. 18.3.

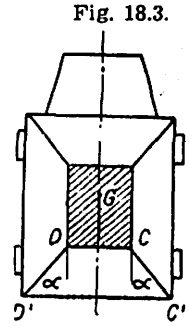
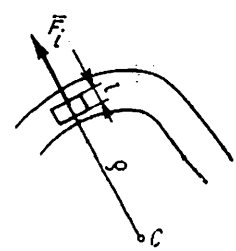


Fig. 18.4.



Rezolvare. a) Datorită mersului în curbă cu viteza constantă v, va apare o forță de inerție F_i care va da un moment de răsturnare:

$$M_r = F_i \cdot h = m\frac{v^2}{\rho}h,$$

și căruia i se va opune momentul stabilizator:

$$M_s = G\frac{l}{2}.$$

Pentru a avea stabilitate, trebuie ca:

$$M_r \leqslant M_s,$$

de unde:

$$v^2 \leqslant \frac{l\rho g}{2h}.$$

b) Pentru a nu derapa, trebuie ca:

$$F_i \leqslant F_\mu,$$

în care forța de frecare F_μ este la limită: $F_\mu = \mu G$.

Deci:

$$v \leqslant \sqrt{\mu\rho g}.$$

Din compararea vitezelor de la punctele *a)* și *b)*, se constată că în general automobilul derapează mai ușor decît se răstoarnă.

c) Datorită frînării, pe lîngă forța de inerție $\bar{F}_{iv}$ normală intervine și forța de inerție tangențială $\bar{F}_{i\tau}$. În acest caz:

$$F = \sqrt{F_{iv}^2 + F_{i\tau}^2} = m\sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + a_\tau^2}.$$

Pentru ca automobilul să nu alunece, trebuie ca:

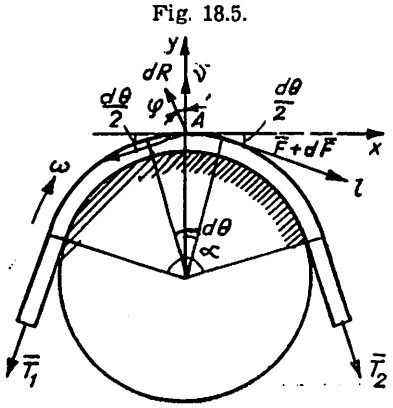
$$m\sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + a_\tau^2} \leqslant \mu G,$$

de unde:

$$v \leqslant \sqrt[4]{\rho^2(\mu^2 \cdot g^2 - a_\tau^2)}.$$

Deci pentru a nu derapa, automobilul trebuie să meargă cu o viteză redusă.

Fig. 18.5.



18.4. Să se determine relația care există între tensiunile dintr-o curea de transmisie care acționează două șaibe aflate în mișcare (fig. 18.5), admițînd că există o alunecare relativă a curelei de-a lungul roții, de coeficient de frecare μ. Se notează cu φ unghiul de frecare și cu dR rezultanta reacțiunii elementare a elementului de curea.

Rezolvare. Luînd un element de curea, cuprins între două raze care fac un unghi $d\theta$ şi scriind ecuaţiile de echilibru dinamic ale forţelor care acţionează asupra acestui element pe două axe de coordonate (tangenta în punctul A şi normala), se obţine :

$$(\sum X);\ (F+dF)\cos\frac{d\theta}{2}-F\cos\frac{d\theta}{2}-dR\sin\varphi=0; \tag{1}$$

$$(\sum Y);\ -(F+dF)\sin\frac{d\theta}{2}-F\sin\frac{d\theta}{2}+dm\frac{v^2}{\rho}+dR\cos\varphi=0. \tag{2}$$

Unghiul $d\theta$ fiind mic, se poate admite $\cos\frac{d\theta}{2}\approx 1$ şi $\sin\frac{d\theta}{2}\approx\frac{d\theta}{2}$.

Pe de altă parte, secţiunea curelei este constantă, astfel încît :

$$dm=\frac{\gamma}{g}A\rho d\theta.$$

în care γ este greutatea specifică a curelei, iar A secţiunea.

Neglijînd produsul $\frac{dF\cdot d\theta}{2}$, ecuaţiile (1) şi (2) devin :

$$dF=dR\sin\varphi; \tag{1'}$$

$$\left(F-\frac{\gamma}{g}Av^2\right)d\theta=dR\cos\varphi. \tag{2'}$$

Împărţindu-le, se obţine :

$$\frac{dF}{F-\frac{\gamma}{g}Av^2}=\operatorname{tg}\varphi d\theta.$$

Însă $\operatorname{tg}\varphi=\mu$, unghiul φ fiind unghiul de frecare.

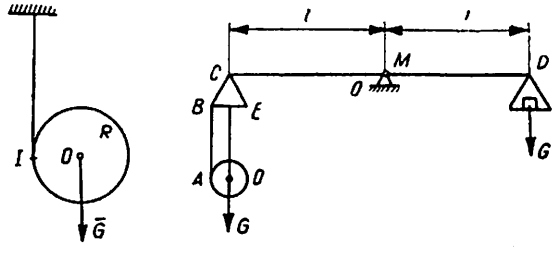
Integrînd de la 0 la α, adică de la T_1 la T_2 ($T_1>T_2$), se obţine :

$$\frac{T_1-A\frac{\gamma}{g}v^2}{T_2-A\frac{\gamma}{g}v^2}=e^{\mu\alpha}.$$

Observaţie. În cazul cînd roata stă pe loc şi numai cureaua are tendinţa de alunecare de-a lungul roţii ($v=0$), se regăseşte relaţia cunoscută din statică.

18.5. O bobină asimilată cu un disc cilindric de rază R şi greutate G, este susţinută de un fir (fig. 18.6, *a*). Bobina desfăşurîndu-se de pe fir, să se determine : acceleraţia unghiulară a bobinei, acceleraţia centrului O al discului, tensiunea din fir.

Fig. 18.6.



Indicație și răspuns. Ținînd seama de forța și cuplul de inerție corespunzătoare mișcării plan paralele a discului, se obține:

$$\varepsilon=\frac{2}{3}\frac{g}{R};\quad a=\frac{2}{3}g;\quad T=\frac{G}{3}.$$

Se poate imagina un dispozitiv simplu prin care să se verifice experimental rezultatul obținut (fig. 18.6, *b*).

O bobină de greutate G este prinsă de platanul C al balanței, prin firele AB și OE, iar în platanul D se pune pentru echilibru aceeași greutate G. Tăind firul OE, bobina se pune în mișcare. Tensiunea în firul AB se micșorează, lucru care se poate constata prin faptul că balanța se menține în echilibru numai cu o greutate $\frac{G}{3}$ așezată în platanul D.

18.6. O bară omogenă, avînd greutatea p pe unitate de lungime, se rotește în jurul verticalei articulației O, cu n rot/min (fig.18.7). Știind că $OA=a$ și $OB=b$, să se determine valoarea unghiului α făcut de bară cu verticala.

Rezolvare. În rotație, asupra fiecărei porțiuni din bară acționează două forțe:
— greutatea proprie $\bar{G}_a$, respectiv $\bar{G}_b$;
— forțele de inerție $\bar{F}_a$ și $\bar{F}_b$.

Forța de inerție elementară pentru un element de bară cu masa dm, aflat la distanța x de articulația O, este:

$$dF_i=(x\sin\alpha)\,\omega^2 dm=\rho A\omega^2\sin\alpha x\cdot dx.$$

Integrînd pentru toată lungimea barei, se obține:

$$F_i=\int_0^l dF_i=\frac{1}{2}(\rho Al)(l\sin\alpha)\,\omega^2=\frac{Ml}{2}\omega^2\sin\alpha,$$

aplicată la $\frac{2}{3}l$ față de 0.

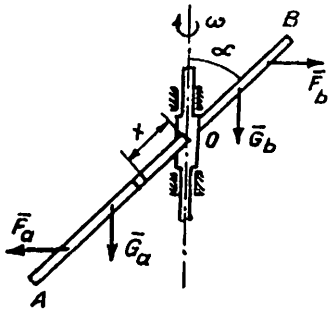
Din ecuația de momente în raport cu punctul O, rezultă:

$$F_b\frac{2}{3}b\cos\alpha+G_b\frac{b}{2}\sin\alpha+F_a\frac{2}{3}a\cos\alpha-G_a\frac{a}{2}\sin\alpha=0.$$

Ținînd seama de valorile forțelor centrifuge și de faptul că $G_a=p\cdot a$ și $G_b=p\cdot b$, se obține:

$$\frac{pb^3}{3g}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha+\frac{pb^2}{2}\sin\alpha+\frac{pa^3}{3g}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{pa^2}{2}\sin\alpha=0.$$

Fig. 18.7.



Din rezolvarea ecuației, rezultă: $\sin\alpha=0$; $\alpha=0$, soluție banală, și:

$$\cos\alpha=\frac{3g(a^2-b^2)}{2\omega^2(a^3+b^3)}=\frac{3g}{2\frac{\pi^2n^2}{900}}\,\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}.$$

Deoarece:

$$g\approx\pi^2\approx 10,$$

rezultă:

$$\cos\alpha = \frac{1\,350}{n^2} \cdot \frac{a-b}{a^2-ab+b^2}.$$

18.7. Un dispozitiv pentru determinarea tensiunii maxime a unui fir se compune din două bare identice, cu lungimea l și greutatea G, articulate în punctul O. La capetele A și B se prinde firul de lungime a, a cărui tensiune la rupere se determină (fig. 18.8). Întreg dispozitivul se rotește în jurul verticalei punctului O. Știind că în momentul ruperii firului turația era n, se cere:

— tensiunea la ruperea firului;

— valoarea reacțiunii în punctul O;

— turația pentru care firul este întins, fără a suporta o tensiune.

Rezolvare. Datorită simetriei, se studiază numai echilibrul dinamic al barei OA. În timpul mișcării de rotație în jurul verticalei Oy bara va fi acționată de următoarele forțe:

— greutatea proprie $\bar{G}$;

— tensiunea firului $\bar{T}$;

— forța de inerție $\bar{F}_i$;

— componenta orizontală a reacțiunii $\bar{H}$;

— componenta verticală a reacțiunii $\bar{V}$.

Ținînd seamă de problema precedentă, forța de inerție $\bar{F}_i$, de modul:

$$F_i = \frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\,l\omega^2 \cdot \sin\alpha,$$

este aplicată la o distanță $\frac{2}{3}\,l$ față de O.

Ecuațiile de echilibru ale forțelor ce acționează asupra barei, sînt:

$$(\sum X);\quad F_i - T - H = 0; \tag{1}$$

$$(\sum Y);\quad V - G = 0; \tag{2}$$

$$(\sum M_0\bar{F});\quad F_i\,\frac{2l}{3}\cos\alpha - Tl\cos\alpha - G\,\frac{l}{2}\sin\alpha = 0. \tag{3}$$

Din ecuația (3) se deduce valoarea lui T:

$$T = G\sin\alpha\left(\frac{\omega^2 l}{3g} - \frac{1}{2\cos\alpha}\right) \tag{4}$$

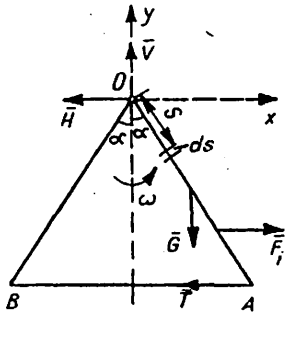
și componentele H și V ale reacțiunii din articulație:

$$V = G;\quad H = F_i - T = \frac{G}{2}\sin\alpha\left(\frac{\omega^2}{3g} - \frac{1}{\cos\alpha}\right),$$

iar reacțiunea:

$$R = \sqrt{H^2+V^2}.$$

Fig. 18.8.



Tensiunea în fir este nulă pentru:

$$n=\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l\cos\alpha}}.$$

18.8. O placă triunghiulară ABC omogenă, de greutate G, este articulată în punctul B, iar în A este prinsă cu un fir orizontal foarte mic (fig. 18.9). Să se determine tensiunea T în fir, cînd placa se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω. Cînd este nulă tensiunea în fir?

Rezolvare. Asupra plăcii acţionează:

— greutatea proprie $\bar{G}$;

— tensiunea în fir $\bar{T}$;

— componentele reacţiunii $\bar{H}$ şi $\bar{V}$ din articulaţia B;

— forţa de inerţie $\bar{F}_i$, care se determină prin integrarea forţelor de inerţie corespunzătoare unui element de placă:

$$F_i=\int_0^a dF_i=\int_0^a dm\cdot x\cdot\omega^2=\int_0^a\left(\frac{2M}{ab}\right)\cdot\frac{b}{a}(a-x)x\omega^2dx=\frac{Ma}{3}\omega^2.$$

Distanţa η a punctului de aplicaţie al forţei de inerţie faţă de baza AC se poate determina luînd momentele statice în raport cu axa Ox:

$$\eta F_i=\int_b^0\frac{y}{2}dF_i=\frac{Mab}{12}\omega^2,$$

de unde:

$$\eta=\frac{b}{4}.$$

În raport cu un sistem de axe xAy şi luînd momentele forţelor în raport cu punctul B, rezultă ecuaţiile de echilibru dinamic:

$$(\sum X);\quad V-G=0; \tag{1}$$

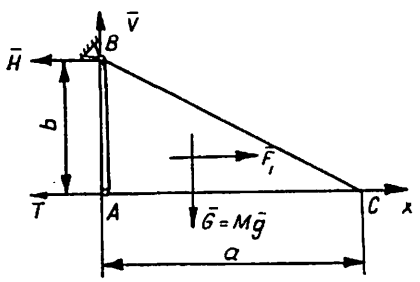
$$(\sum Y);\quad T+H-F_i=0; \tag{2}$$

$$(\sum M_BF);\quad Tb+G\frac{a}{3}-F_i\frac{3}{4}b=0. \tag{3}$$

Înlocuind valoarea forţei de inerţie şi rezolvînd sistemul, se obţine:

$$H=\frac{Ma}{3b}\left(g+\frac{b\omega^2}{4}\right);\quad T=\frac{Ma}{b}\left(\frac{b\omega^2}{4}-\frac{g}{3}\right).$$

Fig. 18.9.



Tensiunea este nulă cînd $\omega^2=\frac{4g}{3b}$, iar reacţiunea orizontală H devine:

$$H=\frac{4a}{9b}Mg.$$

18.9. O placă metalică cu greutatea P este transportată pe două role, fiecare avînd greutatea Q și raza R. Coeficientul de frecare de rostogolire dintre rolă și pămînt este s (fig. 18.10.). Știind că asupra plăcii acționează o forță orizontală $\bar{F}$, să se determine mișcarea plăcii. (Se presupune că nu există alunecare a plăcii pe role și nici a rolelor pe pămînt).

Rezolvare. Se separă corpurile. Considerînd că prin aplicarea forței $\bar{F}$, placa are o mișcare accelerată cu o accelerație $\bar{a}$, forțele care acționează asupra ei sînt (fig. 18.11):

— greutatea proprie $\bar{P}$;
— forța de tracțiune $\bar{F}$;
— reacțiunile rolelor, normale $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ și tangențiale $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$;
— forța de inerție $\bar{F}_i$.

Scriind ecuațiile de echilibru, rezultă:

$$F-\frac{P}{g}a-F_1-F_2=0; \tag{1}$$

$$N_1+N_2-P=0. \tag{2}$$

Asupra fiecărei role acționează următoarele forțe:

— greutatea proprie Q;
— reacțiunile $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ ale forței $\bar{P}$;
— forța tangențială de rostogolire $\bar{F}_1$, respectiv $\bar{F}_2$;
— reacțiunea normală a pămîntului $\bar{N}_1'$, respectiv $\bar{N}_2'$;
— forța de adeziune $\bar{F}_1'$, respectiv $\bar{F}_2'$;
— forța de inerție $\bar{F}_i'$;
— cuplul de inerție $\bar{C}_i$.

Ecuațiile de echilibru (ecuația de proiecție pe axa y-ilor și ecuația de momente) sînt:

a) pentru rola (1):

$$N_1'-N_1-Q=0; \tag{3}$$

$$F_1\cdot 2R-F_iR-C_i-N_1's=0; \tag{4}$$

b) pentru rola (2):

$$N_2'-N_2-Q=0; \tag{5}$$

$$F_2\cdot 2R-F_iR-C_i-N_2's=0, \tag{6}$$

sau:

$$F_1\cdot 2R-F_iR-C_i-(N_1+Q)s=0;$$

$$F_2\cdot 2R-F_iR-C_i-(N_2+Q)s=0.$$

Fig. 18.10.

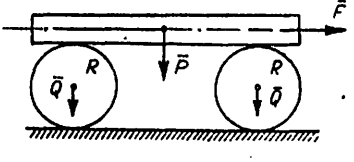
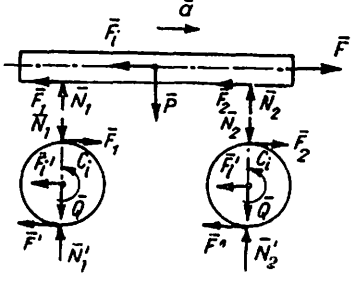


Fig. 18.11.



Adunîndu-le și ținînd seamă de ecuațiile (1) și (2), se poate scrie:

$$\left(F-\frac{P}{g}a\right)2R-2F_tR-2C_t-(P+2Q)\,s=0. \qquad (7)$$

Deoarece:

$$F_t=\frac{Q}{g}a_1, \quad \text{în care} \quad a_1=\frac{a}{2}$$

și

$$C_t=J\varepsilon=\frac{Q}{2g}R^2\varepsilon=\frac{Q}{2g}Ra_1,$$

rezultă:

$$2FR-\frac{2P}{g}Ra-\frac{3}{2}\frac{Q}{g}Ra-(P+2Q)\,s=0,$$

de unde:

$$a=\frac{4FR-2(P+2Q)\,s}{(4P+3Q)\,R}g.$$

În cazul în care:

$$F>\frac{s}{2R}(P+2Q),$$

mișcarea plăcii este uniform accelerată.

Pentru

$$F=\frac{s}{2R}(P+2Q),$$

mișcarea plăcii este uniformă.

Dacă sistemul se găsea în repaus, condiția reprezenta echilibrul limită.

18.10. Se dă sistemul de scripeți din figura 18.12, sensul de rotație al celor trei mase fiind cel indicat de săgeți. Neglijîndu-se greutățile scripeților și frecările, să se determine:

— accelerațiile maselor m_1, m_2 și M;

— tensiunile în fire, pe timpul mișcării.

Rezolvare. Se notează cu $\bar{a}_t$ accelerația de transport, provenită din mișcarea masei M și a scripetelui (2) și cu $\bar{a}_r$ accelerația relativă a maselor m_1 și m_2. Se separă corpurile și se observă că asupra fiecăruia acționează forțele indicate în figura 18.13. Din ecuațiile de echilibru dinamic al celor trei corpuri M, m_1, m_2 rezultă:

Fig. 18.12.

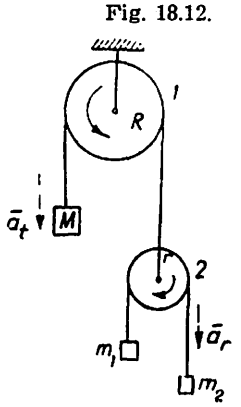
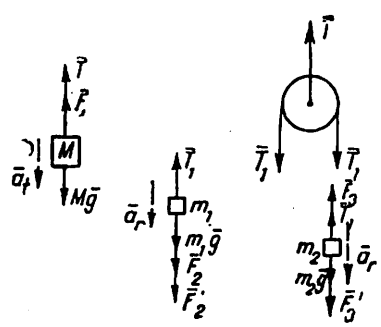


Fig. 18.13.



$$T+F_1-Mg=0; \qquad (1)$$

$$T-2T_1=0$$

$$T_1-m_1g-F_2-F_2'=0, \qquad (2)$$

$$T_1+T_3-m_1g-F_3'=0$$

în care

$$F_2=m_1\cdot a_r;\quad F_2'=m_1a_t;\quad F_3=m_2a_r \text{ și } F_3'=m_2\cdot a_t,$$

rezultă:

$$a_t=\frac{M(m_1+m_2)-4m_1\cdot m_2}{M(m_1+m_2)+4m_1\cdot m_2}g;\quad a_r=\frac{2M(m_2-m_1)}{M(m_1+m_2)+4m_1\cdot m_2}g;$$

$$T_1=\frac{4M\cdot m_1\cdot m_2}{M(m_1+m_2)+4m_1\cdot m_2};\quad T=\frac{8M\cdot m_1\cdot m_2}{M(m_1+m_2)+4m_1\cdot m_2}.$$

18.11. Căruciorul unei macarale, avînd greutatea G, se deplasează cu viteza constantă v, pe brațul macaralei, în timp ce acesta se rotește cu n rot/min (fig. 18.14). Deplasarea căruciorului se face de la centru spre periferie. Să se determine forța de inerție absolută a căruciorului atunci cînd aceasta se află la o distanță d de axa căruciorului.

Rezolvare. Mișcarea de translație a căruciorului este o mișcare relativă, iar rotirea macaralei este o mișcare de transport. Notînd cu x distanța de la axa de rotație la poziția căruciorului, forța de inerție absolută este:

$$\bar{F}_{i_a}=\bar{F}_{i_r}+\bar{F}_{i_t}+\bar{F}_{i_c}, \tag{g}$$

în care:

$$F_{i_r}=m\frac{dv}{dt}=0 \text{ (viteza fiind constantă)}; \tag{1}$$

$$F_{i_{t_r}}=m\frac{dv_t}{dt}=m\frac{d}{dt}(\omega x). \tag{2}$$

Trebuie observat că valoarea forței de inerție de transport este:

$$F_{i_{t_r}}=mx\frac{d\omega}{dt}, \tag{2'}$$

iar nu

$$F_{i_{t_r}}=m\left(\omega\frac{dx}{dt}+x\frac{d\omega}{dt}\right),$$

deoarece, conform definiției mișcării de transport, aceasta presupune implicit o poziție fixă a mobilului față de triedrul mobil, deci în cazul de față $x=const.$

În cazul problemei, cum $\omega=const$, relația (2') devine:

$$F_{i_{t_r}}=0 \text{ (radială)}$$

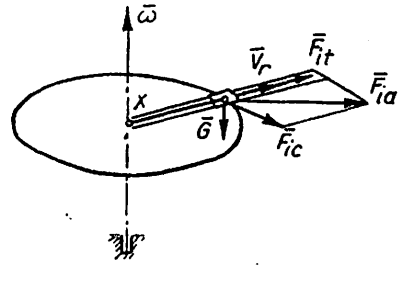
Forța de inerție de transport normală este:

$$F_{i_{t_v}}=m\cdot\omega^2\cdot x \tag{3}$$

Forța de inerție complementară este:

$$F_{i_c}=2m\cdot v\cdot\omega\cdot\sin(\widehat{v,\omega}), \tag{4}$$

Fig. 18.14.



Întrucît unghiul format de vectorii v și ω este egal cu 90°, rezultă:

$$F_{i_c}=2m\cdot v\cdot\omega, \tag{4'}$$

reprezentînd un vector perpendicular pe direcția radială.

În consecință, forța de inerție absolută devine:

$$F_{i_a}=m\cdot\omega\cdot\sqrt{\omega^2\cdot d^2+4v^2}.$$

18.12. Un volant are montate pe două brațe, două bile cu greutatea egală G, care pot aluneca, fără frecare, în lungul brațelor, fiind împinse spre axul volantului de două arcuri de constantă elastică k (fig. 18.15). Cînd volantul este în repaos bilele se găsesc la o distanță b de ax. Să se studieze mișcarea bilelor în situația unei viteze unghiulare ω constante.

Rezolvare. O bilă oarecare va avea o mișcare relativă în lungul brațului volantului și o mișcare de transport, datorită rotirii volantului. Accelerațiile bilei sînt:

— accelerația radială $\ddot{x}$, în lungul brațului;

— accelerația lui Coriolis: $a_c=2\omega v$, perpendiculară pe direcția brațului și îndreptată în sensul de rotație.

Viteza unghiulară fiind constantă, accelerația tangențială este nulă.

În acest caz, ecuațiile de echilibru ale forțelor care acționează asupra bilei, scrise în raport cu un sistem de axe xOy, sînt:

$$\frac{G}{g}\ddot{x}+kx-\frac{G}{g}(b+x)\,\omega^2=0; \tag{1}$$

$$N-\frac{G}{g}(2\omega v)=0, \tag{2}$$

în care N este reacțiunea exercitată de braț asupra bilei.

Din prima ecuație se deduce valoarea accelerației:

$$\ddot{x}=(b+x)\,\omega^2-\frac{gk}{G}x.$$

Cînd $\ddot{x}=0$, bila se găsește în echilibru relativ și poziția acesteia este definită de:

$$x_e=\frac{b\omega^2}{\frac{gk}{G}-\omega^2}.$$

Pentru ca acest lucru să se întîmple, trebuie ca $x_e>0$ ce rezultă din condiția de stabilitate, deci:

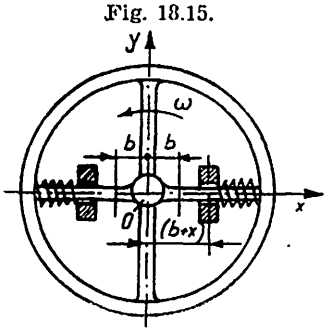


Fig. 18.15.

$$k>\frac{G}{g}\omega^2.$$

Mișcarea bilei, definită de ecuația (1), este:

$$\frac{G}{g}\ddot{x}+\left(k-\frac{G}{g}\omega^2\right)x=\frac{G}{g}\omega^2 b, \tag{1'}$$

o mișcare oscilatorie armonică, de perioadă:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{G}{g\left(k-\frac{G}{g}\omega^2\right)}}.$$

18.13. Să se studieze mișcarea sistemului mecanic din figura 18.16, *a*, compus din corpurile P, Q și troliul O de greutate G, știind că în deplasare corpurilor P și Q li se opune cîte o rezistență proporțională cu vitezele acestora, iar corpul Q se mișcă cu frecare pe planul orizontal. Se vor determina și tensiunile din fire. Se va admite că la $t=0$; $v=v_0$

Rezolvare. Izolînd corpurile (fig. 18.16, *b*) și aplicînd principiul lui d'Alembert pentru fiecare corp, avem ecuațiile:

$$(\sum X);\ T_1-k_1v_1-\frac{Q}{g}a_1-\mu Q=0; \tag{1}$$

$$(\sum Y);\ N-Q=0;$$

$$(\sum M_0);\ -T_1r-J_0\varepsilon+TR=0; \tag{2}$$

$$\sum Y;\ P-T-\frac{P}{g}a-k\cdot v=0. \tag{3}$$

Ținînd seama de relațiile cinematice ale corpurilor în mișcare:

$$a_1=\frac{r}{R}a;\quad v_1=\frac{r}{R}v;\quad \varepsilon=\frac{a}{R}=\frac{\dot{v}}{R} \tag{4}$$

și înlocuind expresiile tensiunilor T_1 și T din ecuațiile (1) și (3), ecuația (2) se reduce la:

$$\left[\frac{P}{g}+\frac{Q}{g}\cdot\frac{r^2}{R^2}+\frac{J_0}{R^2}\right]\dot{v}+\left(k+k_1\frac{r}{R}\right)v=P-\mu\frac{r}{R}Q. \tag{5}$$

Integrînd ecuația (5), cu notațiile:

$$A=\frac{P}{g}+\frac{Q}{g}\frac{r^2}{R^2}+\frac{J_0}{R^2};\quad B=k+k_1\frac{r^2}{R^2};\quad C=P-\mu\frac{r}{R}Q,$$

se obține:

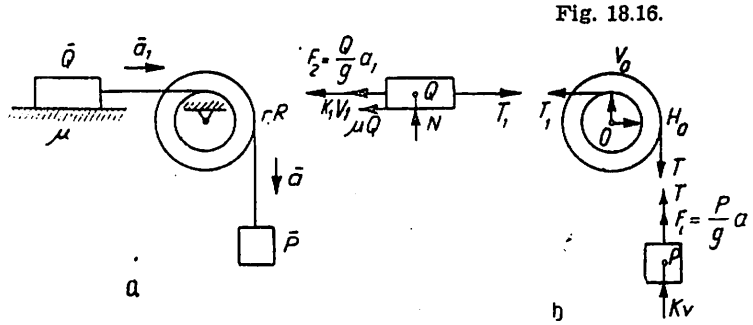
$$v=-\frac{A}{B}v_0e^{-\frac{B}{A}t}+\frac{D}{B}. \tag{6}$$

Cunoscînd viteza v (6), prin derivare rezultă accelerația:

$$a=v_0e^{-\frac{B}{A}t}, \tag{7}$$

și din (1) și (3) tensiunile T_1 și T din fire.

Fig. 18.16.



18.14. Pe o bară de lungime l, înclinată față de axa verticală cu un unghi constant α, poate aluneca, fără frecare, un cursor cu greutatea $\overline{P}$ (fig. 18.17). Știind că bara se rotește în jurul axei verticale cu viteza unghiulară constantă $\overline{\omega}$, să se determine mișcarea cursorului pe bară și reacțiunea barei asupra cursorului în condițiile inițiale $t=0$; $r_0=0$; $v_r=0$.

Rezolvare. Cursorul are o mișcare relativă de-a lungul barei cu viteza relativă $\overline{v}_r$ și o mișcare de transport de rotație cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$. Notînd cu $\overline{R}$ reacțiunea barei asupra cursorului, cu $\overline{F}_{i_r}$, $\overline{F}_{i_t}$, $\overline{F}_{i_c}$ forțele de inerție relativă, de transport și complementară și $OC=r$, ecuația de echilibru dinamic (d'Alembert) este:

$$\overline{P}+\overline{R}+\overline{F}_{i_r}+\overline{F}_{i_t}+\overline{F}_{i_c}=0. \tag{1}$$

Proiectînd ecuația (1) pe direcția barei și ținînd seamă de mărimea forțelor de inerție:

$$|\overline{F}_{i_r}|=\frac{P}{g}\ddot{r};\quad |\overline{F}_{i_t}|=\frac{P}{g}\omega^2\cdot r\sin\alpha;\quad |\overline{F}_{i_c}|=2\frac{P}{g}\omega v_r,$$

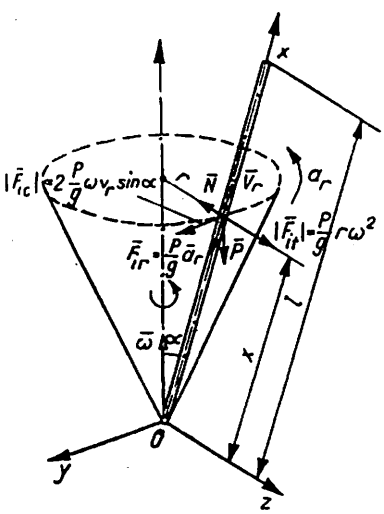
se obține ecuația diferențială:

$$\ddot{r}-r\omega^2\sin^2\alpha=-g\cos\alpha,$$

cu soluția generală:

$$r=Ae^{\omega t\sin\alpha}+Be^{-\omega t\sin\alpha}+\frac{g}{\omega^2}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Fig. 18.17.



Pentru condițiile inițiale date, se obține:

$$A=B=-\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{\omega^2}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

și ca urmare:

$$r=\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}(1-\mathrm{ch}\omega t\cdot\sin\alpha).$$

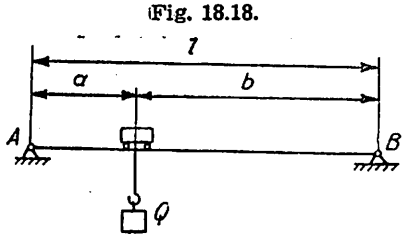
Pentru calculul reacțiunilor se proiectează ecuația (1) pe axele Oy (perpendiculară pe planul format de bară și axă de rotație) și Oz, perpendiculară pe planul xOy. Se obține:

$$R_y=F_{i_c}=2m\omega v_r\sin\alpha;$$

$$R_x=m(g+r\omega^2\cos\alpha)\sin\alpha.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

Fig. 18.18.



18.15. Cabina de comandă de greutate P (fig. 18.18), aflată pe podul rulant AB, în poziția definită de distanțele din schiță, ridică sarcina $\overline{Q}$ cu accelera-

ția $\bar{a}_0$. Să se afle reacțiunile dinamice apoi să se compare cu reacțiunile statice.

Aplicație: $P=4\,000$ N, $Q=20\,000$ N; $a=2$ m; $b=6$m; $a_0=3$ g.

Indicație și răspuns. Reacțiunile statice sînt:

$$R_A=\frac{b}{l}(P+Q);\quad R_B=\frac{a}{l}(P+Q),$$

iar tensiunea în cablu $T=Q$.

Sarcina Q, urcîndu-se cu accelerația a_0, conform principiului lui d'Alembert tensiunea în cablu este:

$$T'=Q\left(1+\frac{a_0}{g}\right),$$

iar reacțiunile dinamice R'_A, R'_B sînt:

$$R'_A=\frac{b}{l}(P+T')=\frac{b}{l}\left[P+Q\left(1+\frac{a_0}{g}\right)\right];$$

$$R'_B=\frac{a}{l}(P+T')=\frac{a}{l}\left[P+Q\left(1+\frac{a_0}{g}\right)\right].$$

Pentru aplicația numerică se obține:

$T=Q=20\,000$ N; $R_A=18\,000$ N; $R_B=6\,000$ N;

$T'=4Q=80\,000$ N; $R'_A=63\,000$ N; $R'_B=21\,000$ N.

18.16. Să se determine accelerația planului din figura 18.19, cu ajutorul căruia se ridică o sarcină Q, întrebuințînd greutatea $P>\frac{Q}{4}$.

Răspuns

$$a=\frac{4(4P-Q)}{16P+Q}g.$$

18.17. Care este turația cu care trebuie rotit un vas pentru ca fluidul pe care-l conține să nu se verse, atunci cînd centrul de greutate al fluidului se află la distanța r de axa în jurul căreia se face rotirea (fig. 18.20)?

Indicație și răspuns. În situația cea mai defavorabilă, cînd vasul se află cu gura în jos, trebuie ca cele două forțe, și anume greutatea proprie G și forța de inerție F_i, să-și facă echilibru. Ca urmare:

$$n=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

18.18. Vagonetul unei linii suspendate, avînd greutatea G, atîrnă liber de o șină (fig. 18.21). Să se determine:

a) valoarea forței în cazul cînd vagonetul are o viteză v, iar șina pe care se deplasează are raza de curbură ρ;

Fig. 18.19.

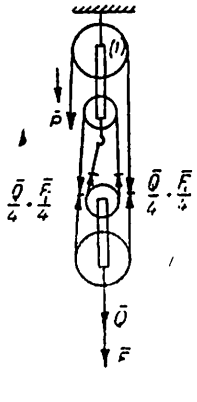


Fig. 18.20.

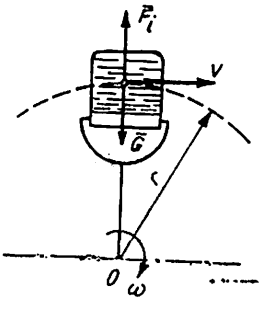
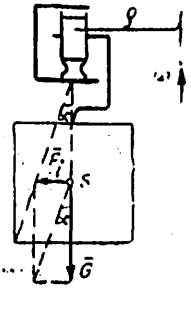


Fig. 18.21.



b) sub ce unghi α se înclină axa vagonetului;
c) reacţiunea R a şinei.

Indicaţie şi răspuns. Vagonetul, asimilat cu un punct material, avînd o mişcare circulară uniformă, va apare numai forţa de inerţie normală F_i:

a) $$F_i = \frac{Gv^2}{g \cdot \rho};$$

b) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_i}{G};$$

c) $$R = \sqrt{F_i^2 + G^2}.$$

18.19. Un automobil, avînd greutatea G, se deplasează pe un drum orizontal într-o mişcare uniform accelerată (fig. 18.22), cu acceleraţia a. Să se calculeze reacţiunile R_f şi R_s, corespunzătoare perechilor de roţi din faţă şi din spate.

Indicaţie şi răspuns. Introducînd forţa de inerţie în cazul mişcării accelerate, se obţine:

$$R_f = \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{g} \cdot \frac{h}{b+c}\right) g; \quad R_s = \left(\frac{c}{b+c} + \frac{a}{g} \cdot \frac{h}{b+c}\right) g.$$

18.20. Un regulator (Watt) are două bile identice de greutate G fiecare. Barele OS susţin prin intermediul barelor AB, de masă neglijabilă, un manşon cu greutatea Q (fig. 18.23). Ştiind că regulatorul se roteşte în jurul axului vertical cu turaţia n, se cere:

a) valoarea unghiului α;
b) eforturile N din barele AB.

Aplicaţie: $G=80$ N; $Q=240$ N; $OS=l=0{,}45$ m; $OA=AB=a=0{,}27$ m; $n=90$ rot/min.

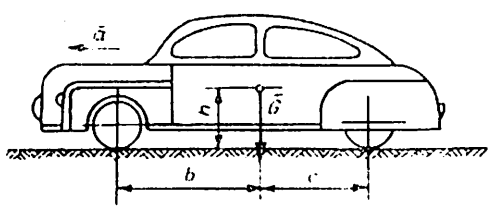
Indicaţie şi răspuns. Din ecuaţia de momente a forţelor ce acţionează asupra barei OS în raport cu articulaţia O, rezultă:

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \arccos\frac{Gl + Qa}{ml^2\omega^2}; \quad N = \frac{Q}{2\cos\alpha}.$$

Pentru aplicaţia numerică se obţine:

$$\alpha_2 = 46°30' \text{ şi } T = 175 \text{ N}.$$

Fig. 18.22.



18.21. De pe un tambur plin, cu greutatea G şi raza R, se desfăşoară un cablu de greutate neglijabilă, de care este suspendată o sarcină P (fig. 18.24). Să se determine viteza cu care

Fig. 18.23.

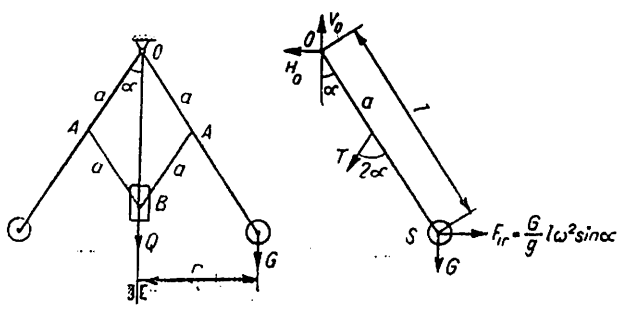
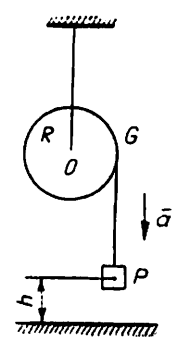


Fig. 18.24.



sarcina ajunge la sol, știind că înălțimea la care se găsește tamburul este h, în cazul cînd se neglijează frecarea din ax și apoi cînd se ține seamă de aceasta (μ este coeficientul de frecare la alunecare, iar r raza fusului).

Indicație și răspuns. Izolînd corpurile și introducînd forțele și cuplurile de inerție se obține:

$$a=\frac{P}{P+\frac{G}{2}}g; \quad v=\sqrt{2ah}.$$

În cazul cînd intervine frecarea în ax, ecuația de momente aplicată discului are forma:

$$J\varepsilon-TR-C_f=0 \quad \text{și} \quad C_f\leqslant\mu Nr.$$

18.22. Un fir trecut peste un scripete S, fără frecare și fără masă, are la un capăt o greutate $\bar{P}$, care cade vertical, și la celălalt capăt este legat de axul unui cilindru plin, de greutate $\bar{G}$ și rază $\bar{R}$, care se rostogolește pe un plan orizontal (fig. 18.25, *a*).

Coeficientul de frecare la rostogolire fiind s, și de frecare la alunecare μ, să se afle accelerația $\bar{a}$ a sistemului și tensiunea din fir.

Indicație și răspuns. Notînd cu $\bar{T}$ tensiunea din fir, $\bar{F}_i'$ și $\bar{F}_i$ forțele de inerție, cu $\bar{N}$ reacțiunea normală, cu $\bar{F}$ forța de frecare la alunecare a discului pe plan și cu $\bar{M}_f$ momentul cuplului de frecare la rostogolire (fig. 18.25, *b*). Din condițiile de echilibru se obține:

$$a=\frac{P-\frac{s}{R}G}{P+\frac{3}{2}G}g \quad \text{și} \quad T=\left(\frac{3}{2}+\frac{s}{R}\right)\frac{PG}{P+\frac{3}{2}G}.$$

18.23. Două corpuri cu greutatea P și Q sînt așezate pe un al treilea corp de formă prismatică, fețele avînd înclinările α_1 și α_2. Corpurile P și Q sînt legate între ele printr-un fir trecut peste un scripete S, de greutate neglijabilă (fig. 18.26). Să se determine accelerațiile $\bar{a}_n$ ale corpurilor P și Q atunci cînd ele alunecă de-a lungul planurilor înclinate, fără frecare, iar prisma are o mișcare uniform accelerată. Cît de mare trebuie să fie accelerația $\bar{a}_t$ a celui de-al treilea corp, pentru ca corpurile P și Q să fie în echilibru?

Indicație și răspuns. Accelerația relativă a corpurilor P și Q fiind $\bar{a}_r$, iar accelerația de transport $\bar{a}_t$, izolînd corpurile (fig. 18.27) și introducînd și forțele de

Fig. 18.25.

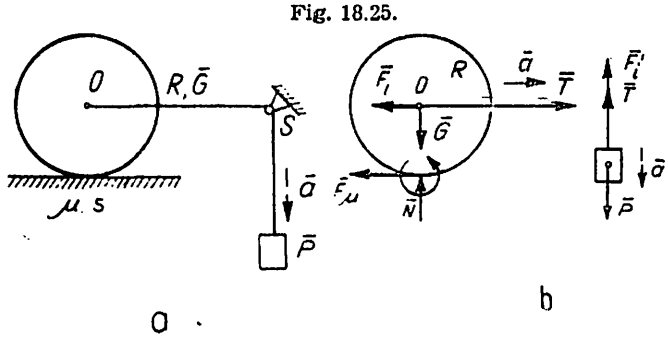


Fig. 18.26.

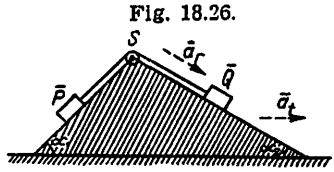
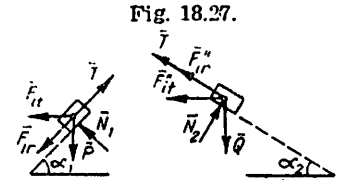


Fig. 18.27.



inerție în mișcarea relativă $\bar{F}'_{ir}=\frac{P}{g}\bar{a}_r$; $\bar{F}''_{ir}=\frac{Q}{g}\bar{a}_r$ și forțele de inerție de transport $\bar{F}'_{it}=\frac{P}{g}\bar{a}_t$; $\bar{F}''_{it}=\frac{Q}{g}\bar{a}_t$, din ecuațiile de echilibru dinamic:

$$\bar{P}+\bar{T}+\bar{N}_1+\bar{F}'_{ir}+\bar{F}'_{it}=0; \tag{1}$$

$$\bar{Q}+\bar{T}+\bar{N}_2+\bar{F}''_{ir}+\bar{F}''_{it}=0, \tag{2}$$

proiectate pe direcțiile planurilor înclinate, rezultă:

$$a_r=\frac{(Q\sin\alpha_2-P\sin\alpha_1)g-(P\cos\alpha_1+Q\cos\alpha_2)a_t}{P+Q}. \tag{3}$$

La echilibru $\bar{a}_r=0$. Rezultă

$$a_t=\frac{Q\sin\alpha_2-P\sin\alpha_1}{P\cos\alpha_1+Q\cos\alpha_2}g. \tag{3'}$$

18.24. Discul A are o mișcare de rotație față de un sistem de referință fix (fig. 18.28, *a*) cu viteza unghiulară ω_1, iar discul B, coaxial cu discul A, se rotește în raport cu acesta cu viteza unghiulară ω_2. Să se determine forța de inerție absolută a unei particule a discului B, aflat la distanță r de axa de rotație. Discuție.

Indicație și răspuns. Admițînd că ω_1 și ω_2, care sînt respectiv vitezele unghiulare de transport și relativă, au același sens (fig. 18.28, *b*), toate forțele de inerție. relativă $\bar{F}_{ir}=ma_r=mr\omega_2^2$, de transport $|\bar{F}_{it}|=ma_b=mr\omega_1^2$ și Coriolis $|\bar{F}_{ic}|=2mr\omega_1\omega_2$ sînt coliniare și îndreptate spre exterior. Ca urmare din relația:

$$\bar{F}_{ia}=\bar{F}_{ir}+\bar{F}_{it}+\bar{F}_{ic},$$

rezultă:

$$F_{ia}=mr(\omega_1+\omega_2)^2.$$

Dacă discurile se rotesc în sens contrar $F_{ia}=mr(\omega_1-\omega_2)^2$, iar dacă în plus $\omega_1=\omega_2$, forța de inerție absolută devine nulă.

18.25. La un ascensor, asupra axului C se aplică un moment motor M. În A se găsește cabina de greutate P_1 și în B se găsește contra-greutatea P_2 (fig. 18.29). Roțile pe care se înfășoară cablul sînt pline, avînd razele R și greutatea

Fig. 18.28.

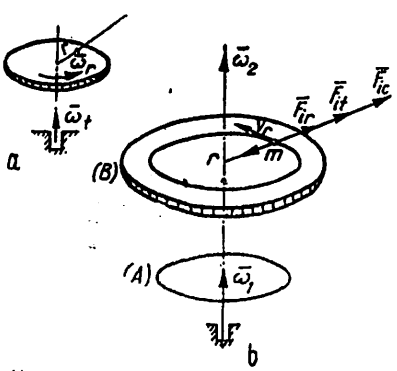
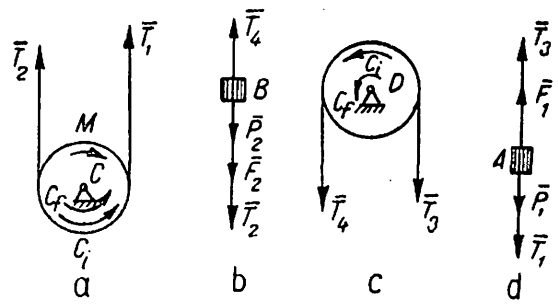


Fig. 18.29.



Q. Știind că în axele roților există cîte un cuplu de frecare C_f, să se determine accelerația pe care o va căpăta cabina ascensorului.

Indicație și răspuns. Separînd corpurile (roțile, cabina ascensorului și contra greutatea), din ecuațiile de echilibru (fig. 18.29, $a-d$) rezultă:

$$a=\frac{M-2C_f+(P_1-P_2)R}{(P_1+P_2+Q)R}g.$$

18.26. Un angrenaj este format din două șaibe de momente de inerție J_1 și J_2 și două roți dințate avînd respectiv z_1 și z_2 drept număr de dinți (fig. 18.30). Care este valoarea cuplului constant C care trebuie aplicat axului primei șaibe pentru a opri sistemul în t_0s ? Turația acestei șaibe în momentul frînării este n rot/min.

Indicație și răspuns. Notînd cu ε_1 și ε_2 accelerațiile unghiulare ale celor două axe în momentul aplicării cuplului constant $\bar{C}$, cu $\bar{Q}$ forța ce se naște între cele două roți dințate, din ecuațiile de momente în raport cu fiecare dintre axe obținem:

$$J_1\varepsilon_1=C-Q\cdot r_1 \text{ și } J_2\varepsilon_2=Q\cdot r_2.$$

Cum în mișcarea uniform accelerată a roților avem relațiile:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{z_2}{z_1},$$

rezultă:

$$C=\left[J_1+J_2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right]\frac{2\pi n}{60t_0}.$$

18.27. O pană A, cu secțiunea triunghiulară, avînd unghiul din vîrf α și greutatea $\bar{G}$, poate aluneca fără frecare între un perete rigid vertical și un corp B plasat pe un plan orizontal (fig. 18.31, a). Cînd pana alunecă, corpul Q se deplasează fără frecare pe planul orizontal. Să se determine accelerațiile penei și corpului Q și reacțiunea $\bar{N}$ dintre aceste două corpuri.

Indicație și răspuns. Separînd corpurile (fig. 18.31, b) și introducînd toate categoriile de forțe, din ecuațiile de echilibru dinamic la care se mai adaugă relația existentă între accelerații $\bar{a}_1$ și $\bar{a}_2$ ($a_2=a_1$ tg α), se obține:

$$a_1=\frac{G}{G+Q\,\mathrm{tg}^2\alpha}g;\quad N=\frac{QG\sin\alpha}{G\cos^2\alpha+Q\sin^2\alpha}.$$

Fig. 18.30.

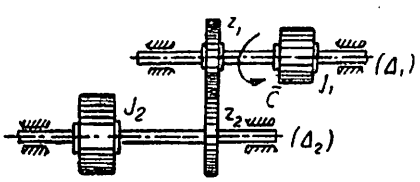
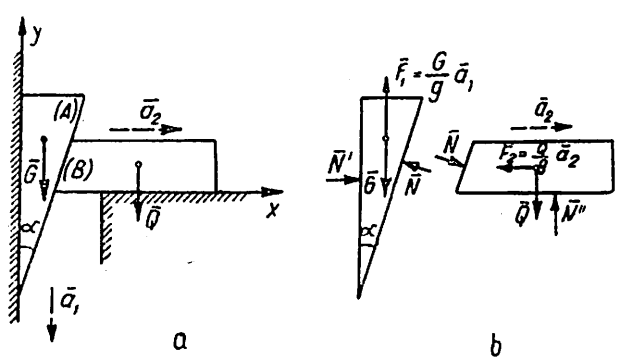


Fig. 18.31.



În cazul existenței frecării dintre corp și pană, există relațiile:

$$a_1=\frac{G}{G+Q\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\mu)}\,g;\quad N=\frac{GQ\sin\alpha\cos\varphi}{G\cos\alpha\cos(\alpha+\mu)+Q\sin\alpha\sin(\alpha+\varphi)},$$

unde $\varphi=\mathrm{arc\ tg}\,\mu$ este unghiul de frecare limită.

18.28. De capătul firului unui disc cilindric omogen, de rază R și greutate $\bar{G}$, este fixată o greutate $\bar{P}$ (fig. 18.32). Bobina se poate rostogoli pe un plan înclinat cu un unghi α. Să se studieze mișcarea sistemului și să se afle tensiunea în fir.

Indicație și răspuns. Admitem că corpul P coboară (fig. 18.32, *a*). Bobina are o mișcare relativă plan paralelă și o mișcare de transport datorită deplasării greutății P. Separînd cele două corpuri și scriind ecuațiile de echilibru dinamic al forțelor care acționează asupra fiecărui corp în parte (fig. 18.32, *b*), și ținînd seama de relația $a_1+a=\varepsilon R$, din rezolvarea sistemului se deduce:

$$a_1=\frac{(2P+G)\sin\alpha-P}{3P+G}\,g;\quad \varepsilon=\frac{2P\,(1+\sin\alpha)}{(3P+G)\,R}\,g;$$

$$a=\frac{3P-G\sin\alpha}{3P+G}\,g;\quad T=\frac{PG\,(1+\sin\alpha)}{3P+G}.$$

II. PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE

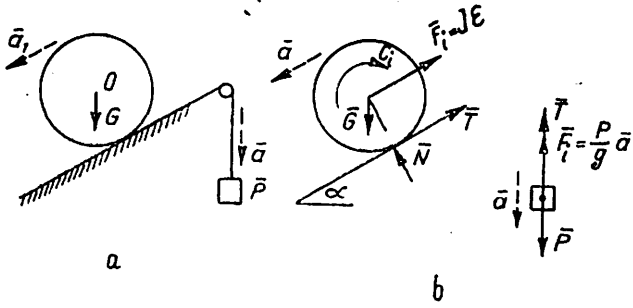
A. CONSIDERAȚII TEORETICE

Principiul deplasărilor virtuale (numit uneori principiul lucrului mecanic virtual) este un principiu cu totul general, a cărui aplicație aduce foarte mari avantaje în rezolvarea practică a problemelor de mecanică.

1. **Caracterul esențial al principiului deplasărilor virtuale** permite eliminarea acțiunilor de contact. Aplicarea principiului se face atît în cazul punctului material sau al sistemelor cu frecări, dar mai ales în cazul sistemelor fără frecări (sisteme ideale), cînd aplicarea se face cu mai mare ușurință.

Cu ajutorul lui se pot rezolva probleme de statică (echilibru, aplicații la mașini simple sau bare articulate, determinări de reacțiuni etc.), de cinematică, cît și de dinamică a punctului sau a sistemelor (echilibru dinamic, mișcarea sistemelor etc.).

Fig. 18.32.



2. **Prin analogie cu deplasările reale,** în deplasarea virtuală compatibilă cu legăturile, forța $\bar{F}_s\,(X_s, Y_s, Z_s)$ care acționează asupra punctului produce lucrul mecanic elementar virtual:

$$\delta L = \bar{F}_s \cdot \bar{\delta}_r = F_s \cdot \delta_r \cos(\widehat{\bar{F}_s, \bar{\delta}_r}) = X_s \cdot \delta x + Y_s \cdot \delta y + Z_s \cdot \delta z. \qquad (a)$$

Toate considerațiile și proprietățile privitoare la lucrul mecanic real se aplică și în acest caz, folosind pentru deplasări virtuale semnul δ, spre a le deosebi de deplasările reale.

3. **În cazul punctului material,** acționat de o serie de forțe $\bar{F}_s$ (fig. 18.33), lucrul mecanic virtual al tuturor forțelor în deplasarea virtuală $\bar{\delta r} = \overline{PP'}$ este:

$$\delta L = \bar{F}_s \cdot \bar{\delta} r = R \cdot \delta r \cos(\widehat{\bar{R}, \bar{\delta r}}) = X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z, \qquad (b)$$

în care $\bar{R}\,(X, Y, Z)$ este rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra punctului.

Dacă punctul material are legături ideale (fără frecări), lucrul mecanic virtual al forțelor de frecare este nul și lucrul mecanic al tuturor forțelor este identic cu al forțelor active.

4. **Din relația (b) se deduce principiul deplasărilor virtuale,** în cazul punctului material:

Un punct material cu legături ideale se află în echilibru dacă suma lucrurilor mecanice virtuale ale forțelor exterioare este nulă pentru orice deplasare virtuală a sistemului compatibilă cu legăturile.

5. **Principiul lucrului mecanic virtual** se aplică și în cazul sistemelor de puncte și a corpurilor solide.

Dacă pentru orice deplasare virtuală infinitezimală a unui sistem ideal, lucrul mecanic virtual produs de către forțele active este nul, sistemul se află în echilibru:

$$\delta L = \sum R_s \cdot \delta r_s \cdot \cos(\bar{R}_s, \bar{\delta r}_s) = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + M_x \delta\theta_x + M_y \delta\theta_y + M_z \delta\theta_z) \quad (c)$$

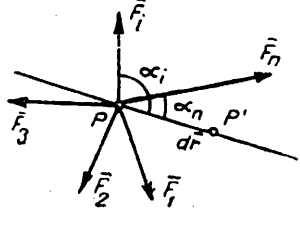
în care $\bar{R}_s$ este rezultanta forțelor active aplicate asupra particulei s a sistemului, iar $\bar{\delta r}_s$ deplasarea virtuală a acestei particule.

Ecuația, trebuind să fie verificată pentru orice deplasare elementară de translație (δx, δy, δz) și rotație ($\delta\theta_x$, $\delta\theta_y$, $\delta\theta_z$), conduce la condițiile generale de echilibru ale solidului rigid:

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} = 0\,; \quad \bar{M}_0 = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} = 0. \qquad (d)$$

6. **Pentru soluționarea practică** a problemelor de echilibru care depind de un singur parametru, se folosesc: fie direct relațiile de mai sus, stabilind pe cale elementară — geometrică sau cinematică, ori cu ajutorul centrului instantaneu de rotație — legătura dintre deplasările virtuale, fie metoda analitică.

Fig. 18.33.



În metoda analitică se scriu componentele forţelor date, coordonatele punctelor de aplicaţie şi apoi se înlocuiesc în ecuaţia generală a lucrului mecanic diferenţialele deplasărilor virtuale în funcţie de parametrul ales. Dacă poziţia sistemului depinde de n parametri independenţi $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, atunci poziţia fiecărui punct, precum şi diferenţialele δx, δy, δz, sînt funcţii de aceşti parametri.

Lucrul virtual se scrie astfel:

$$\delta L=\sum (X\cdot\delta x+Y\cdot\delta y+Z\cdot\delta z)=Q_1\cdot\delta\lambda_1+Q_2\cdot\delta\lambda_2+\ldots+Q_n\cdot\delta\lambda_n, \qquad (e)$$

în care:

$$Q_s=f_s(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots, \lambda_n). \qquad (f)$$

Ecuaţia trebuind să fie verificată oricare ar fi variaţiile parametrilor independenţi, trebuie ca:

$$Q_1=0;\ Q_2=0;\ \ldots\ Q_n=0, \qquad (g)$$

rezultînd n ecuaţii pentru determinarea celor n parametri λ_s, care definesc poziţia de echilibru.

Dacă se consideră toate deplasările posibile ale unui sistem, vor exista atîtea ecuaţii de echilibru cîte deplasări sînt posibile; în cazul cel mai general al mişcării solidului rigid, există şase deplasări, deci şase ecuaţii.

7. **Pentru calculul forţelor de legătură,** se presupune că legătura a fost înlocuită prin elementul mecanic corespunzător (forţă sau cuplu). Prin dispariţia legăturii, corpul poate avea o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile care au mai rămas. Dînd sistemului una dintre aceste deplasări, se obţine o ecuaţie în care va intra elementul mecanic căutat. Avantajul acestei metode constă în aceea că se consideră deodată numai o singură reacţiune, fără a fi nevoie să se considere forţele interioare ale sistemului.

8. Se mai poate folosi acest principiu şi sub o altă formă, dedusă din împărţirea lucrului mecanic virtual cu dt şi introducerea vitezei punctului:

$$\frac{\delta L}{\delta t}=\frac{\sum \bar{F}_s\cdot\delta\bar{r}}{\delta t}=\sum \bar{F}_s\frac{\delta\bar{r}}{\delta t}=\sum \bar{F}_s\cdot\bar{v}_s=\sum F_s\cdot v_s\cos(\widehat{F_s;v_s})=0. \qquad (h)$$

În exprimarea lucrului mecanic virtual sub această formă, trebuie să se observe că atît $\delta\bar{r}$ cît şi $\bar{v}$ se referă la punctul material căruia îi este aplicată forţa.

9. **Principiul lui Toricelli.** Dacă un sistem mecanic este acţionat numai de forţe de greutate, acel sistem este în echilibru cînd diferenţiala coordonatei centrului de greutate, $\delta\zeta$, este nulă.

Pentru determinarea condiţiei de echilibru, se calculează întîi coordonata ζ a centrului de greutate faţă de un plan fix, după care aceasta se diferenţiază în raport cu parametrul ales.

Deci poziţia de echilibru a unui asemenea sistem corespunde fie poziţiei celei mai coborîte a centrului de greutate (echilibru stabil), fie poziţiei celei mai ridicate (echilibru nestabil).

10. **Principiul deplasărilor virtuale** poate servi și la stabilirea — în cazul unui corp sau sistem de corpuri în echilibru, supuse la acțiunea unor forțe exterioare — faptului dacă sistemul are o poziție de echilibru stabilă sau nestabilă. Se dă sistemului o mică deplasare virtuală, compatibilă cu legăturile și, după cum lucrul virtual al forțelor exterioare, neglijînd frecările, este pozitiv sau negativ, rezultă echilibrul stabil sau nestabil. În cazul forțelor gravitaționale, dacă pentru o mică deplasare virtuală, energia potențială a sistemului descrește, sistemul are o poziție stabilă de echilibru și invers, dacă poziția de echilibru este stabilă, energia sa potențială trebuie să rămînă minimă. Acest criteriu dă rezultate numai în cazul cînd forțele derivă dintr-o funcție de forță.

11. **Principiul deplasărilor virtuale poate fi aplicat corpurilor în mișcare,** în cazul echilibrului dinamic, combinat cu principiul lui d'Alembert scris sub forma:

$$\sum \left[\left(X_i - m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}\right) \cdot \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2y_i}{dt^2}\right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2z_i}{dt^2}\right) \delta z_i\right] = 0.$$

Relația se va descompune în atîtea ecuații, cîți parametri independenți are sistemul, rezolvînd pe rînd toate ecuațiile.

B. PROBLEME REZOLVATE

18.29. Un inel poate aluneca fără frecare de-a lungul unei vergele circulare. De inel este fixată o greutate $\bar{P}$ și e prins un fir la capătul căruia se găsește o greutate $\bar{Q}$ care trece peste un scripete fără frecare (fig. 18.34, *a*). Să se găsească poziția de echilibru a inelului.

Rezolvare. Poziția de echilibru a inelului fiind definită prin unghiul α, forțele care acționează asupra inelului sînt (fig. 18.34, *b*).

— greutatea proprie $\bar{P}$;

— tensiunea în fir $\bar{T}$, egală ca valoare cu Q;

— reacțiunea vergelei circulare $\bar{N}$.

Componentele acestor forțe în raport cu un sistem de axe ortogonale care trec prin centrul O, sînt:

$$\bar{P}(0, -P);\ \bar{Q}\left(Q\cos\frac{\alpha}{2},\ Q\sin\frac{\alpha}{2}\right);\ \bar{N}(-N\sin\alpha,\ N\cos\alpha).$$

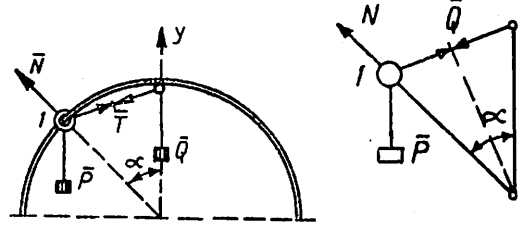
Coordonatele punctului I, în raport cu același sistem de axe, sînt:

$$I(-R\sin\alpha,\ R\cos\alpha),$$

de unde:

$$\delta x = -R\cos\alpha \cdot \delta\alpha;\ \delta y = -R\sin\alpha \cdot \delta\alpha.$$

Fig. 18.34.



a b

Lucrul mecanic virtual elementar este:

$$\delta L = P \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \delta\alpha - Q \cdot R \cdot \cos\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\delta\alpha - Q \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\delta\alpha +$$

$$+ N \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha\,\delta\alpha - N \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha\,\delta\alpha = 0,$$

sau:

$$P \sin\alpha = Q \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \text{de unde:} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{2P}.$$

Se verifică astfel că lucrul mecanic al reacțiunii N este nul, deoarece în lipsa frecării deplasarea este normală pe forță.

18.30. Un sistem mobil, cu greutatea q, este suspendat în două puncte AA' la două fire foarte fine AB și $A'B'$, de aceeași lungime l, legate în două puncte fixe B și B' ale aceluiaș plan orizontal (fig. 18.35). Notînd $AA'=2a$, $BB'=2b$, să se determine condiția de echilibru a sistemului, dacă asupra lui acționează un cuplu C, al cărui moment este dirijat după axa verticală a sistemului.

Rezolvare. La o rotație virtuală elementară $\delta\alpha$ a sistemului, sub acțiunea cuplului C, acesta are și o deplasare verticală $\delta z = CC'$.

În rotirea sistemului cu un unghi α, lungimea A_1B a firului rămîne aceeași. Ținînd seamă de coordonatele punctului $A_1(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha,\ z)$, și ale lui B $(b,\ 0,\ 0)$, rezultă:

$$(b - a\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2 + z^2 = l^2, \tag{1}$$

de unde, prin diferențiere, se obține:

$$a \cdot b \cdot \sin\alpha\,\delta\alpha + z \cdot \delta z = 0. \tag{2}$$

Din ecuația lucrului virtual:

$$\delta L = C\,\delta\alpha + q\,\delta z = 0,$$

ținînd seamă de relația (2) și luînd $z \approx l$, rezultă:

$$C = q\frac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{l} \approx q\frac{a \cdot b}{l}\alpha,$$

în cazul micilor oscilații.

18.31. Două bare OA și AB de lungime l și l_1 și greutăți neglijabile sînt articulate, prima în punctul fix O, a doua de cea dintîi, iar capătul B alunecă fără frecare pe o dreaptă Δ ce trece prin O (fig. 18.36). În punctul C $(OC=a)$ acționează forța $\bar{P}$ sub unghiul φ. Barele rămînînd în același plan, să se afle forța $\bar{Q}$ ce acționează în B în lungul axei ox, pentru cazul condiției de echilibru.

Fig. 18.35.

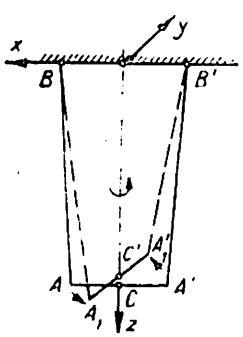
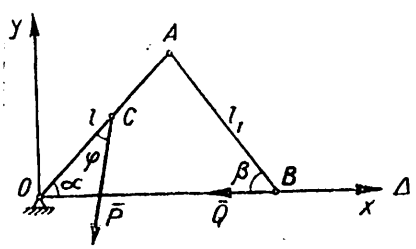


Fig. 18.36.



Rezolvare:

În raport cu axele OB și perpendiculara pe ea, coordonatele punctelor de aplicație

$C\ (a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$ și $B\ (l\cos\alpha+l_1\cos\beta,\ 0)$ ale forțelor $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ au componentele $\bar{P}\ [-P\cos(\alpha+\varphi);\ -P\sin(\alpha+\varphi)]$ și $\bar{Q}\ (-Q,\ 0)$.

Din teorema lucrului mecanic virtual

$$\delta L=(-a\sin\alpha\delta\alpha)[-P\cos(\alpha+\varphi)]+(a\cos\alpha\delta\alpha)[-P\sin(\alpha+\varphi)]+$$

$$+[-l\sin\alpha\delta\alpha-l_1\sin\beta\delta\beta]\ (-Q)=0$$

și diferențierea relației de condiție $\frac{l}{\sin\beta}=\frac{l_1}{\sin\alpha}$, se obține în final relația ce definește forța Q:

$$Q=\frac{Pa}{l}\cdot\frac{\sin\varphi\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

18.32. O bară cu lungimea $2l$ și greutatea $\bar{P}$ este rezemată ca în figura 18.37. Cunoscînd distanța a, neglijînd frecările, să se determine poziția de echilibru definită de unghiul α și reacțiunile N_1 și N_2.

Rezolvare. Existînd doar forțe de greutate se poate aplica principiul lui Toricelli. Diferențiind ordonata y_c a punctului de aplicație a forței $\bar{P}$, definită de relația:

$$y_c=l\cos\alpha-a\operatorname{ctg}\alpha,$$

se obține:

$$\sin\alpha=\sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Se observă că, pentru a exista o poziție de echilibru a barei, trebuie ca $a<l$.

Pentru calculul reacțiunilor $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$, dăm barei AB deplasări convenabile, incompatibile cu legăturile. Astfel pentru calculul reacțiunii N_1 se dă barei AC o deplasare δs în lungul acesteia și cum lucrul mecanic al reacțiunii N_2 este nul avem:

$$\delta L=\bar{N}_1\cdot\bar{\delta}s+\bar{P}\cdot\bar{\delta}s=N_1\sin\alpha\cdot\delta s-P\cos\alpha\delta s=0;$$

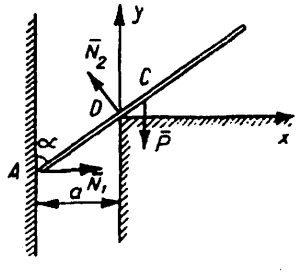
$$N_1=P\operatorname{ctg}\alpha.$$

Dînd o deplasare virtuală elementară de rotație $\delta\theta$ a barei în jurul lui A, lucrul mecanic a reacțiunii $\bar{N}_1$ fiind zero avem:

$$\delta L=\bar{N}_2\cdot\bar{\delta\theta}+\bar{P}\cdot\bar{\delta\theta}=N_2\frac{a}{\sin\alpha}\delta\theta-Pl\sin\alpha\delta\theta=0;$$

$$N_2=\frac{l}{a}P\sin^2\alpha.$$

Fig. 18.37.



18.33. Să se afle reacțiunile unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu trei sarcini concentrate, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ (fig. 18.38).

Rezolvare. Se suprimă reazemul B înlocuindu-se acțiunea lui cu o reacțiune N_B, și se dă grinzii o rotire elementară virtuală $\delta\theta$ în jurul reazemului A.

Lucrul mecanic elementar al forțelor $\bar{F}_s$, inclusiv reacțiunea $\bar{N}_B$ din reazemul B, în această deplasare virtuală, este:

$$\sum \delta L = F_1 \cdot \delta s_1 + F_2 \cdot \delta s_2 - R_B \cdot \delta s - F_3 \cdot \delta s_3 = 0.$$

Cum: $\delta\theta = \frac{\delta s_1}{a_1} = \frac{\delta s_2}{a_2} = \frac{\delta s}{l} = \frac{\delta s_3}{a_3}$, rezultă valoarea reacțiunii N_B:

$$N_B = \frac{\sum F_s \cdot a_s}{\sum F_s},$$

apoi analog se calculează și cealaltă reacțiune N_A.

18.34. O scară având laturile egale, de lungime $2l$ și greutate $\bar{G}$, suportă la vîrf o sarcină $\bar{P}$ (fig. 18.39). Cît de mare trebuie să fie coeficientul de frecare μ dintre scară și pardoseală, pentru ca scara să stea în echilibru sub un unghi α dat.

Aplicație: $2l = 2{,}40$ m; $G = 100$ N; $P = 700$ N; $\alpha = 60°$.

Rezolvare. Figura fiind perfect simetrică, se poate considera numai echilibrul unei jumătăți din scară.

Din anularea lucrului mecanic virtual elementar:

$$\delta L = 2 \cdot l \cdot F \sin\alpha\delta\alpha - G \cdot l \cdot \cos\alpha\delta\alpha - P \cdot l \cdot \cos\alpha\delta\alpha = 0,$$

rezultă:

$$F = \frac{G+P}{2} \operatorname{ctg}\alpha.$$

Din inegalitatea

$$F \leqslant \mu N \quad \text{unde} \quad N = G + \frac{P}{2},$$

se obține:

$$\mu \geqslant \frac{P+G}{P+2G} \operatorname{ctg}\alpha.$$

În cazul aplicației numerice rezultă $\mu \geqslant 0{,}513$.

Fig. 18.38.

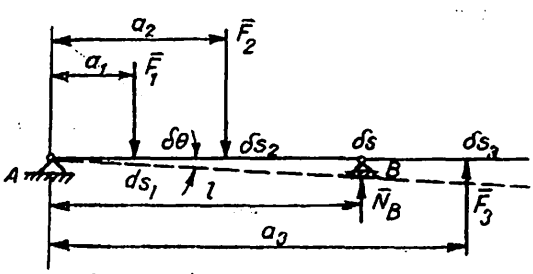
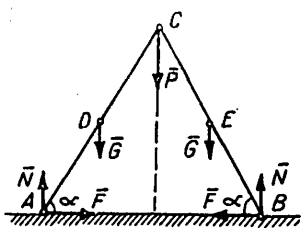


Fig. 18.39.



18.35. O bobină cilindrică, cu greutatea Q și raza R, se poate roti, fără frecare, în jurul axului (fig. 18.40). De capătul firului se atîrnă o greutate P. Să se determine accelerația corpului P și accelerația unghiulară a bobinei.

Rezolvare. Introducînd forțele și cuplurile de inerție, dînd o deplasare virtuală δh sistemului, ecuația lucrului mecanic virtual elementar este:

$$\delta L = P \cdot \delta h - F_i \cdot \delta h - C_i \delta\theta = 0.$$

Cum:

$$F_i = \frac{P}{g} a \quad \text{și} \quad C_i = J \cdot \varepsilon = \frac{Q}{2g} R^2 \varepsilon = \frac{Q}{2g} aR,$$

rezultă:

$$P\delta h - \frac{P}{g} a \cdot \delta h - \frac{Q}{2g} a \cdot \delta h = 0,$$

de unde:

$$a = \frac{2P}{2P+Q} g, \quad \text{și} \quad \varepsilon = \frac{2P}{(2P+Q)R} g.$$

18.36. Două șaibe de raze R_1 și R_2 și greutăți P_1 și P_2 sînt acționate printr-o curea de transmisie (fig. 18.41). Atunci cînd se acționează asupra primei șaibe cu un cuplu motor de moment M, să se determine accelerația unghiulară a acestei roți (se neglijează frecările).

Rezolvare. Introducînd cuplurile de inerție ale celor două roți și dînd o deplasare virtuală $\delta\theta_1$ primei șaibe, căreia îi corespunde deplasarea $\delta\theta_2$, pentru șaiba a doua, lucrul mecanic virtual elementar va fi:

$$(M - C_{i_1}) \delta\theta_1 - C_{i_2} \delta\theta_2 = 0.$$

Însă:

$$C_{i_1} = J_1 \varepsilon_1 \quad \text{și} \quad C_{i_2} = J_2 \varepsilon_2,$$

astfel încît:

$$(M - J_1 \varepsilon_1)\theta_1 - J_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \delta\theta_2 = 0.$$

Deplasarea elementară virtuală, δl, a curelei, se poate scrie:

$$\delta l = R_1 \delta\theta_1 = R_2 \delta\theta_2, \text{ de unde } \theta_2 = \frac{R_1}{R_2} \delta\theta_1.$$

Pe de altă parte, $a = \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2$, de unde $\varepsilon_2 = \frac{R_1}{R_2} \varepsilon_1$, astfel încît:

$$M - J_1 \varepsilon_1 - J_2 \varepsilon_1 \frac{R_1^2}{R_2^2} = 0.$$

Considerînd șaibele cu un bandaj foarte subțire în raport cu razele respective, momentele de inerție sînt:

$$J_1 = m_1 \cdot R_1^2 = \frac{P_1}{g} \cdot R_1^2 \quad \text{și} \quad J_2 = m_2 \cdot R_2^2 = \frac{P_2}{g} \cdot R_2^2.$$

Fig. 18.40.

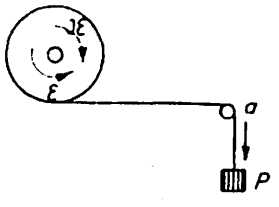
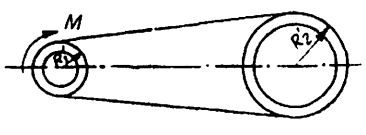


Fig. 18.41.



Înlocuind mai sus și scoțind valoarea lui ε_1, se obține:

$$\varepsilon_1 = \frac{Mg}{(P_1+P_2)R_1^2}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

18.37. Aplicînd principiul deplasărilor virtuale să se determine relația între forța $\bar{P}$ și sarcina $\bar{Q}$ ale scripetelui diferențial (fig. 5.23).

Indicație și răspuns. Într-o rotire infinitezimală $\delta\theta$ a roții de ax fix, forța $\bar{P}$ produce lucrul mecanic virtual $P \cdot R \cdot \delta\theta$. Deplasarea sarcinii Q este egală cu semidiferența dintre cantitatea $R \cdot \delta\theta$ cu care se ridică punctul A și $r \cdot \delta\theta$ cu care se coboară punctul B.

Deci se poate scrie:

$$P \cdot R\delta\theta - Q \cdot \frac{R-r}{2}\delta\theta = 0.$$

18.38. Două bile de greutăți $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ pot aluneca fără frecare în lungul a două tije ortogonale OA, OB (fig. 18.42). Bilele sînt legate între ele printr-un fir de lungime constantă l. Cunoscînd unghiul α, să se găsească poziția de echilibru, definită de unghiul θ.

Indicație și răspuns. Lucrul mecanic virtual al reacțiunilor din C și D fiind nul, avem $\delta L = (P\sin\alpha)\,\delta x + (Q\cos\alpha)\,\delta y = 0$.

Ținînd seamă de relațiile de condiție $x^2+y^2=l^2$; $y = x\,\mathrm{tg}\theta$ rezultă:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{Q}{P}\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

18.39. Să se determine poziția de echilibru a unui foarfece extensibil, acționat de forțele $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ (fig. 18.43), la care barele, egale între ele, au lungimea $2l$.

Indicație și răspuns. Ecuația lucrului mecanic virtual elementar este:

$$\delta L = \sum \bar{F}_s \cdot \delta\bar{r}_s = (-l\sin\alpha\,\delta\alpha)\cdot(-P) + (l\sin\alpha\,\delta\alpha)\cdot P + (7l\cos\alpha\,\delta\alpha)\cdot(-Q) = 0,$$

de unde:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{7Q}{2P}.$$

Fig. 18.42.

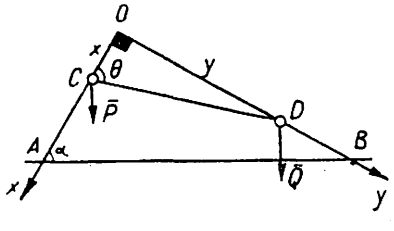
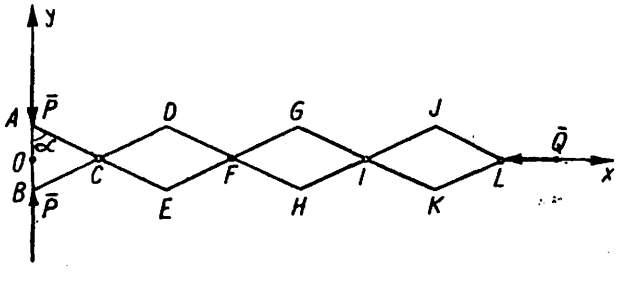


Fig. 18.43.



În cazul mai general, a n romburi complete se obține:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{Q}{P}.$$

Cu ajutorul unei astfel de mașini simple se realizează, la o mică deplasare a punctelor A și B, o mare deplasare a extremității L a foarfecelui.

18.40. Să se rezolve cu ajutorul principiului lui Toricelli problema 3.21.

Indicație și răspuns. Deoarece $AB=l\theta$ este constant, sistemul are un singur grad de libertate. Se va admite unghiul α.

Ordonata centrului de greutate a corpurilor P și Q este:

$$\bar{y}_G=\frac{Py_A+Qy_B}{P+Q}=\frac{PR\sin\alpha+QR\sin(\alpha+\theta)}{P+Q}.$$

Anulînd diferențiala centrului de greutate

$$\delta\bar{y}_G=\frac{R}{P+Q}[P\cos\alpha\delta\alpha+Q\cos(\alpha+\theta)\,\delta\alpha]=0$$

se obține:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\theta+\frac{P}{Q}\operatorname{cosec}\theta.$$

18.41. Dîndu-se sistemul de bare încărcate ca în figura 18.44, *a* să se determine reacțiunea din reazimele B, A, D, C.

Indicație și răspuns. Eliminînd reazimul B, barele vor căpăta deplasări de rotație în jurul punctelor A și D ca în figura 18.44, *b*.

Ținînd seama de relațiile geometrice:

$$\delta\theta_1=\frac{\delta h_1}{g}=\frac{\delta h_2}{f}=\frac{\delta h_c}{e+f};\quad \delta\theta_2=\frac{\delta h_c}{b+c+d}=\frac{\delta h_b}{b+c}=\frac{\delta h_3}{b}=\frac{\delta h_4}{a},$$

din expresia lucrului mecanic virtual:

$$\delta L=\bar{P}\cdot\delta\bar{h}_1+3\bar{P}\cdot\delta\bar{h}_2+\bar{N}_B\cdot\delta\bar{h}_B+2\bar{P}\cdot\delta\bar{h}_3+\bar{P}\cdot\delta\bar{h}_4=0,$$

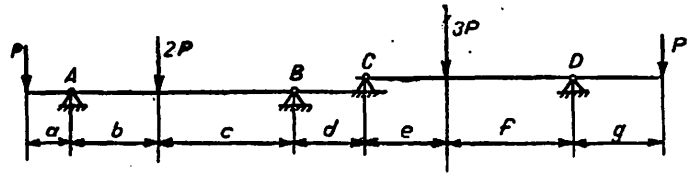
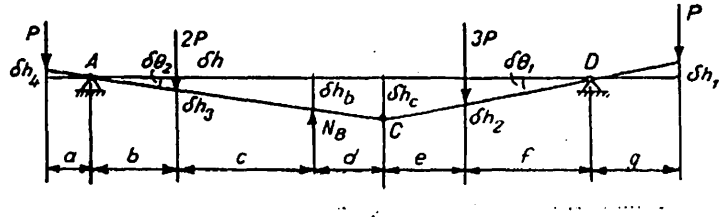


Fig. 18.44. a



b

rezultă:

$$N_B=\frac{(b+c+d)(3f-g)+(2b-a)(e+f)}{(b+c)(e+f)}P.$$

Procedînd în mod analog şi pentru celelalte reazime, se obţine:

$$N_A=\frac{(a+b+3c)(e+f)-d(3f-g)}{(b+c)(e+f)}P;$$

$$N_D=\frac{4e+f+g}{e+f}\cdot P;\quad N_C=\frac{3f-g}{e+f}P.$$

18.42. Sistemul mecanic format din barele egale $OA=AB=l$, de greutate neglijabilă, este articulat în O şi A, iar capătul B este prins de punctul fix C prin intermediul arcului BC de constantă elastică k, şi poate să se deplaseze fără frecare pe orizontală prin intermediul unei role foarte mici (fig. 18.45, *a*). Să se determine poziţia se echilibru a barei OA, definită de unghiul θ, dacă în A se atîrnă greutatea P.

Indicaţie şi răspuns. Prin fixarea greutăţii P arcul (fig. 18.45, *b*) se lungeşte cu cantitatea:

$$x=2l(1-\cos\theta).$$

Ordonata punctului de aplicaţie a forţei P este $y_P=l\sin\theta$, iar forţa elastică a arcului fiind:

$$F=kx=k2l(1-\cos\theta),$$

din aplicarea principiului lucrului mecanic virtual

$$\delta L=P\delta y_P+F\delta x=0,$$

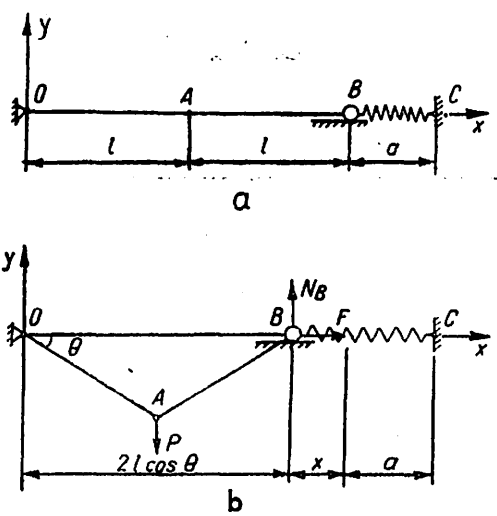
rezultă ecuaţia:

$$\operatorname{tg}\theta-\sin\theta=\frac{P}{4kl},$$

ce defineşte poziţia de echilibru.

18.43. O bară de greutate $\bar{G}$ şi lungimea l stă rezemată fără frecare într-o emisferă, în punctele B şi C (fig. 18.46). Să se afle poziţia de echilibru a barei, definită de unghiul α.

Fig. 18.45.



Indicaţie şi răspuns. Se poate aplica principiul lui Toricelli. Prin diferenţierea ordonatei centrului de greutate y_G în raport cu parametrul α:

$$y_G=R\sin 2\alpha-\frac{R}{2}\sin\alpha,$$

se obţine ecuaţia:

$$8R\cos^2\alpha-l\cos\alpha-4R=0.$$

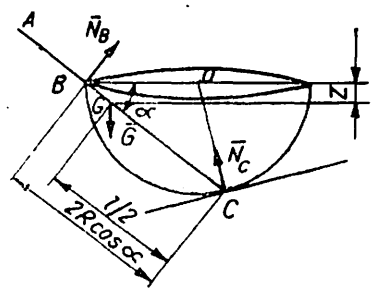


Fig. 18.46.

Reacțiunile sînt:

$$N_c = G \operatorname{tg} \alpha \quad \text{și} \quad N_B = G \frac{l}{4R}.$$

18.44. Să se studieze, cu ajutorul principiului deplasărilor virtuale, echilibrul și deplasarea pe verticală a manșonului B a regulatorului Watt (fig. 18.47), de greutate Q și masă m, bilele regulatoare S avînd greutatea $\bar{G}$ și masa M.

Indicație și răspuns. La o deplasare virtuală a manșonului z pe verticală, bilele se rotesc în jurul lui O cu unghiul α, pe un arc de cerc, avînd centrul în O și raza l.

Lucrul mecanic virtual elementar al tuturor forțelor care acționează asupra regulatorului este:

$$L = 2 \cdot G \cdot (SS') \cos \widehat{(\bar{G}, SS')} + 2 \cdot F_c \cdot (SS') \cdot \cos \widehat{(\bar{F}_c, SS')} + Q\delta z = 0.$$

Avînd:

$$\delta \overline{SS'} = l\delta\alpha; \quad z = 2a\cos\alpha; \quad \widehat{(\bar{G}, SS')} = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

rezultă succesiv:

$$\delta L = 2(\bar{G} + \bar{F}_c) \cdot \delta \overline{SS'} + \bar{Q} \cdot \delta z = 2(-m \cdot g \cdot \sin\alpha + m \cdot \omega^2 \cdot l \sin\alpha \cos\alpha) l \cdot \delta\alpha -$$

$$-2 \cdot M \cdot g \cdot a \cdot \sin\alpha \cdot \delta\alpha = 0,$$

căci $\delta \overline{SS'} = l\delta\alpha$ și $\delta z = -2a \sin\alpha \, \delta\alpha$.

De unde: $\cos\alpha = \frac{Q \cdot a + G \cdot l}{G \cdot l^2 \cdot \omega^2} g$.

18.45. Un corp cu greutatea Q, poate fi deplasat pe un plan orizontal cu ajutorul unui troliu asupra căruia acționează o greutate P (fig. 18.48). Coeficientul de frecare al corpului pe plan fiind μ, razele troliului fiind R și r, iar momentul de inerție al troliului fiind J, să se determine accelerațiile corpului Q și a greutății P.

Răspuns:

$$a = \frac{P - \mu Q \frac{r}{R_1}}{P + Q\frac{r^2}{R^2} + \frac{J_0}{R^2} g} g; \quad a_1 = \frac{r}{R} a.$$

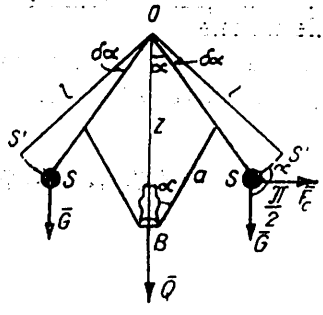


Fig. 18.47.

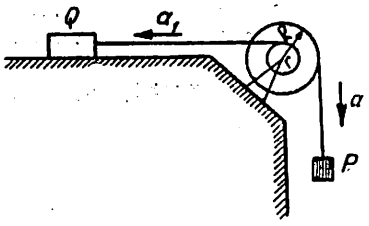


Fig. 18.48.

III. ECUAȚIILE LUI LAGRANGE ȘI HAMILTON

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Caracterul esențial al ecuațiilor lui Lagrange** constă în faptul că permite determinarea mișcării, fără să se introducă ca necunoscute auxiliare forțele de legătură.

Dacă poziția unui sistem depinde de un număr de n parametri independenți $q_1, q_2, \ldots, q_n$, care la rîndul lor sînt funcții cunoscute de timp, mișcarea sistemului este perfect determinată, iar un punct al sistemului se poate exprima sub forma:

$$\bar{r}=\bar{r}\,(q_1 \ldots q_s, \ldots, q_n, t)$$

sau

$$x=x\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, t);\quad y=y\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, t);\quad z=z\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, t).$$

Parametrii $q_1, q_2, \ldots q_s, \ldots, q_n$, se numesc *coordonate generalizate.*

2. **Cu notațiile de mai sus,** energia cinetică E_c a sistemului:

$$E_c=\frac{1}{2}\sum m_s v_s^2=\frac{1}{2}\sum m_s(\dot{x}_s^2+\dot{y}_s^2+\dot{z}_s^2),$$

este o funcție de coordonate generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$, de vitezele generalizate $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ și de timpul t.

Ecuațiile lui Lagrange de mișcare ale sistemului în coordonate generalizate, au forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_s}=Q_s,\ (s=1,2,\ldots,n); \qquad (a)$$

în care: $\frac{\partial E_c}{\partial q_s}$ și $\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_s}$ (impulsuri generalizate) sînt derivatele parțiale ale energiei; cantitățile Q_s (forțe generalizate) reprezintă cîtul prin δq_s al lucrului forțelor direct aplicate într-o deplasare virtuală unde nu variază decît parametrul q_s.

Există atîtea ecuații Lagrange cîți parametri independenți sînt. Aceste ecuații reprezintă un sistem de n ecuații diferențiale ordinare de ordinul al doilea, în raport cu parametrii $q_1, \ldots, q_n$, care prin integrare determină parametrii $q_1, \ldots, q_n$, în raport de timp și de condițiile inițiale.

3. **Calea de urmat în aplicarea ecuațiilor Lagrange** este următoarea:

— se aleg parametrii independenți $q_1, q_2, \ldots, q_n$ în raport cu care se exprimă coordonatele punctelor sistemului:

$$x=x\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, t);\quad y=y\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, t);\quad z=z\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, t).$$

— se calculează derivatele totale ale coordonatelor x, y, z, în funcție de timp:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t);$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \dot{y}(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t);$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \dot{z}(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t);$$

și se exprimă energia cinetică a sistemului:

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_s (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + \dot{z}_s^2) = F(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t);$$

— se calculează derivatele parțiale ale energiei cinetice

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_s} \text{ și } \frac{\partial E_c}{\partial q_s} \quad (s=1, 2, \ldots, n);$$

— se calculează derivatele parțiale ale coordonatelor x, y, z:

$$\frac{\partial x}{\partial q_s};\ \frac{\partial y}{\partial q_s};\ \frac{\partial z}{\partial q_s} \quad (s=1, 2, \ldots, n);$$

— se formează expresiile forțelor generalizate Q_s:

$$Q_s = \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial q_s} + Y \frac{\partial y}{\partial q_s} + Z \frac{\partial z}{\partial q_s} \right);$$

— se scriu ecuațiile lui Lagrange și prin integrarea lor se află coordonatele independente q_s ca funcții de timp și de $2n$ constante arbitrare, care se determină din condițiile inițiale date.

4. **Dacă forțele active** ale sistemului provin dintr-o funcție de forță $U(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, forțele generalizate Q_s sînt;

$$Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} \qquad (s=1, 2, \ldots, n).$$

și ecuațiile lui Lagrange devin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s} \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \qquad (b)$$

sau

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_s} = 0 \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \qquad (b')$$

prin introducerea funcției lui Lagrange ($\mathfrak{L}$):

$$\mathfrak{L} = E + U, \quad \mathfrak{L} = E + U = E - E_p,$$

care reprezintă diferența dintre energia cinetică și energia potențială a sistemului, numită și *potențial cinetic.*

În cazul cînd asupra sistemului acționează atît forțe care admit un potențial, cît și forțe generalizate Q_i, ecuațiile lui Lagrange devin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_s} = Q_i. \qquad (c)$$

5. **Pentru a se putea aplica** ecuațiile lui Lagrange fără erori:

— trebuie ca înaintea oricăror considerații dinamice, coordonatele (x, y, z) ale fiecărui element de masă să se poată exprima în funcție de un număr finit de parametri independenți. Parametrii pot fi în general elemente geometrice (unghiuri, distanțe, coordonate în diferite sisteme);

— de asemeni, în deplasarea generală $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_i, \ldots, (\delta t = 0)$, trebuie ca lucrul mecanic al forțelor de legătură să fie nul (de exemplu, reacțiuni fără frecare) dacă această ultimă condiție nu este îndeplinită, ecuațiile se pot aplica, însă ele nu pot elimina forțele de legătură care apar în partea a doua a ecuațiilor Lagrange.

6. **În cazul cînd legăturile sistemului** sînt independente de timp și forțele aplicate sistemului admit o funcție de forțe $U = f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, Hamilton a transformat, prin alegerea altor parametri, ecuațiile Lagrange în ecuații diferențiale de ordinul *I*, numite *ecuații canonice ale mișcării.*

7. **Notînd diferența** $(E-U)$ cu H, numită *funcția Hamilton* și luînd ca parametri variabili impulsurile generalizate:

$$p_1 = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_2}, \ldots, \quad p_s = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_s}, \ldots,$$

cele n ecuații ale lui Lagrange se transformă în $2n$ ecuații diferențiale de ordinul *I*:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}; \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \qquad (d)$$

8. **Pentru formarea ecuațiilor Hamilton** se procedează astfel:

— se aleg parametrii independenți $q_1, \ldots, q_n$ și se calculează energia cinetică, la fel ca și pentru ecuațiile lui Lagrange:

$$E_c = F(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n),$$

remarcînd că în acest caz E_c nu este funcție de timp;

— prin derivarea energiei cinetice se calculează impulsurile generalizate:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = p_1; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = p_2; \quad \ldots \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_n} = p_n,$$

care se rezolvă în raport cu vitezele generalizate $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_n$;

— vitezele generalizate $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_n$ astfel aflate, se introduc în expresia energiei cinetice care devine astfel o funcție de coordonatele și impulsurile generalizate $(q_1, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$;

— se precizează funcția de forțe $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ și se formează funcția Hamilton $E-U=H$;

— se calculează derivatele parțiale ale funcției H:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_s}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n};$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}, \frac{\partial H}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial q_s}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial q_n};$$

— se formează ecuațiile lui Hamilton care apoi se integrează, ținînd seamă de condițiile inițiale.

B. PROBLEME REZOLVATE

18.46. Să se studieze mișcarea unui punct material acționat de o forță centrală atractivă $F=-\frac{\mu^2 m}{r^2}$, invers proporțională cu pătratul distanței, în care μ este o constantă, iar r distanța de la punct la centru de atracție O (fig. 18.49).

Rezolvare. Luînd drept coordonate generalizate coordonatele polare (r, θ) ale punctului material m, ecuațiile Lagrange ale mișcării sînt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial r}=\frac{\partial U}{\partial r}; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial \theta}=\frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Dar cum:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2); \quad \frac{\partial U}{\partial r}=-\frac{m\mu^2}{r^2}; \quad \frac{\partial U}{\partial \theta}=0,$$

rezultă:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}; \quad \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}}\right)=m\ddot{r};$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2; \quad \frac{\partial E_c}{\partial \theta}=0;$$

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2=-\frac{m\mu^2}{r^2} \quad \text{sau} \quad \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\mu^2}{r^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta})=0 \quad \text{sau} \quad r^2\dot{\theta}=c. \tag{2}$$

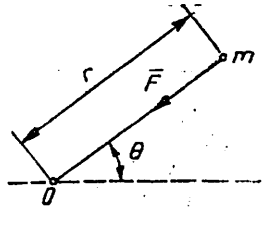
Eliminînd pe $\dot{\theta}$, prima ecuație devine:

$$\ddot{r}-\frac{c^2}{r^3}=-\frac{\mu^2}{r^2}.$$

Multiplicînd ambii membri cu $\dot{r}$ și integrînd, rezultă:

$$\ddot{r}\cdot\dot{r}-\frac{c^2}{r^3}\dot{r}=-\frac{\mu^2}{r^2}\dot{r};$$

Fig. 18.49.



$$\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}+C_1=\frac{\mu^2}{r},$$

sau ţinînd seama şi de ecuaţia (2), se obţine:

$$C_1+\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)=\frac{\mu^2}{r}.$$

Dacă la momentul $t=0$, viteza şi raza vectoare sînt respectiv v_0 şi r_0 şi dacă unghiul dintre ele este α, rezultă:

$$C_1=\frac{\mu^2}{r_0}-\frac{1}{2}v_0^2;$$

$$r^2\dot{\theta}=v_0r_0\sin\alpha;$$

$$\frac{\mu^2}{r_0}-\frac{1}{2}v_0^2+\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)=\frac{\mu^2}{r}.$$

Ultimele integrale exprimă legea ariilor şi legea conservării energiei.

18.47. Să se studieze mişcarea fără frecare a unui punct de masă m, într-o ţeavă care se roteşte cu viteza unghiulară constantă (ω_0), în jurul axei orizontale (xOx') (fig. 18.50), cu condiţiile iniţiale $t=0$; $r=0$; $\dot{r}=0$.

Rezolvare. Alegînd poziţia punctului M în ţeavă $OM=r$, drept coordonată generalizată avem:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\omega_0^2),$$

iar lucrul mecanic virtual:

$$\delta L=mg\cdot\delta r\sin\omega_0t.$$

Deci ecuaţia lui Lagrange devine:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{r})-mr\omega_0^2=mg\sin\omega_0t$$

sau

$$\ddot{r}-\omega_0^2r=g\sin\omega_0t,$$

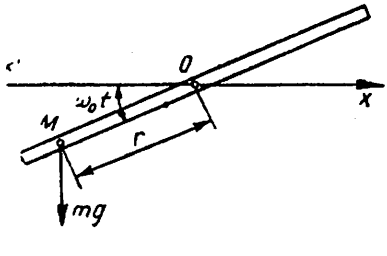
cu soluţia:

$$r=C_1\operatorname{ch}\omega_0t+C_2\operatorname{sh}\omega_0t-\frac{g}{2\omega_0^2}\sin\omega_0t.$$

Pentru condiţiile iniţiale date, rezultă:

$$r=\frac{g}{2\omega_0^2}(\operatorname{sh}\omega_0t-\sin\omega_0t).$$

Fig. 18.50.



18.48. În cazul unor legături independente de timp, să se deducă teorema energiei, cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange.

Rezolvare. Admiţînd componentele vitezei $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, ale fiecărui element că sînt expresii liniare şi omogene de viteza generalizată $\dot{q}$, expresia energiei cinetice E_c va avea o formă cuadratică omogenă în $\dot{q}$.

Multiplicînd ecuaţiile lui Lagrange respectiv cu $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ şi adunînd aceste produse, se obţine:

$$\sum_1^n \dot{q}_s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_s}\right) - \sum_1^n \dot{q}_s \frac{\partial E}{\partial q_s} = \sum_1^n Q_s \cdot \dot{q}_s.$$

Dar partea a doua a egalităţii nu este decît $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$, derivata în raport cu timpul a lucrului forţelor date în deplasarea reală, iar prima parte a egalităţii se poate transforma în expresia:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_1^n\left(\dot{q}_s \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_s}\right) - \sum_1^n\left(\ddot{q}_s \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_s}\right) - \sum_1^n \dot{q}_s \frac{\partial E_c}{\partial q_s},$$

ţinînd seamă de derivata unui produs.

Dar după teorema lui Euler, referitoare la funcţiile omogene, suma:

$$\sum_1^n \dot{q}_s \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_s}$$

reprezintă $2E_c$, iar ceilalţi doi termeni reprezintă derivata $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$ într-o deplasare reală şi deci ecuaţia devine:

$$2\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t},$$

sau:

$$\mathrm{d}E_c = \mathrm{d}L$$

deci, teorema energiei.

18.49. Să se deducă din ecuaţiile lui Lagrange, ecuaţia mişcării plane a unui corp de masă M, în propriul său plan.

Rezolvare. Se iau drept coordonate generalizate a sistemului material coordonatele ξ şi η ale centrului de greutate al corpului (fig. 18.51) şi unghiul θ pe care o dreaptă a solidului îl face la un moment dat cu direcţia fixă din plan.

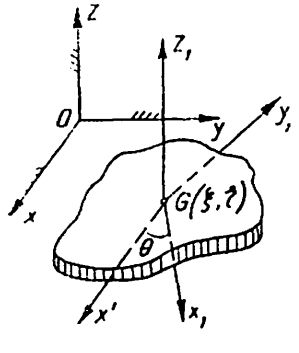
Din exprimarea energiei cinetice în mişcarea plan paralelă

$$E_c = \frac{1}{2} M (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2,$$

şi a lucrului mecanic virtual corespunzător mişcării plane

$$\delta L = \delta\xi \cdot \sum X + \delta\eta \cdot \sum Y + \delta\theta \cdot \sum (x_1 Y - y_1 X),$$

Fig. 18.51.



din cele trei ecuații Lagrange, corepunzătoare coordonatelor generalizate alese, rezultă:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=\sum X;\quad M\frac{d^2\eta}{dt^2}=\sum Y;\quad J\frac{d^2\theta}{dt^2}=\sum(x_1Y-y_1X).$$

18.50. Să se rezolve prin metoda lui Lagrange problema 18.10 (fig. 18.52).

Rezolvare. Alegînd pe q_1 și q_2 — distanțele maselor M și m_1 față de orizontale care trece prin scripetele fix — drept coordonate generalizate, expresia energiei cinetice a sistemului devine:

$$E_c=\frac{1}{2}[M\dot{q}_1^2+m_1(\dot{q}_2-\dot{q}_1)^2+m_2(-\dot{q}_1-\dot{q}_2)^2]=$$

$$=\frac{1}{2}[(M+m_1+m_2)\dot{q}_1^2+(m_1+m_2)\dot{q}_2^2+2(m_2-m_1)\dot{q}_1\dot{q}_2],$$

iar:

$$\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_1}=(M+m_1+m_2)\dot{q}_1+(m_2-m_1)\dot{q}_2;\quad \frac{\partial E_c}{\partial q_1}=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=(M-m_1-m_2)g;$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial\dot{y}_2}=(m_1+m_2)\dot{q}_2+(m_2-m_1)\dot{q}_1;\quad \frac{\partial E_c}{\partial q_2}=0;$$

$$\mathfrak{L}=Mg\cdot q_1+m_1g(q_2-q_1)-m_2g(q_2+q_1);$$

$$Q_1=\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta q_1}=(M-m_1-m_2)g;\quad Q_2=\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta q_2}=(m_1-m_2)g;$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2}=(m_1-m_2)g.$$

Ecuațiile lui Lagrange devin:

$$(M+m_1+m_2)\ddot{q}_1+(m_2-m_1)\ddot{q}_2=(M-m_1-m_2)g;$$

$$(m_2-m_1)\ddot{q}_1+(m_1+m_2)\ddot{q}_2=(m_1-m_2)g.$$

Rezolvînd sistemul, se obțin pentru accelerațiile $\ddot{q}_1$ și $\ddot{q}_2$ aceleași valori ca în problema 18.10, unde s-a notat $\ddot{q}_1=a_t$ și $\ddot{q}_2=a_r$:

$$\ddot{q}_1=\frac{M(m_1+m_2)-4m_1m_2}{M(m_1+m_2)+4m_1m_2}g;\quad \ddot{q}_2=\frac{2M(m_1-m_2)}{M(m_1+m_2)+4m_1m_2}g.$$

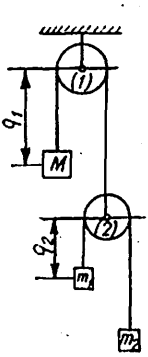


Fig. 18.52.

18.51. Să se deducă din ecuațiile lui Lagrange a treia ecuație a lui Euler (referitoare la unghiul de rotație proprie φ), în cazul mișcării absolute a unui corp solid în jurul unui punct fix.

Rezolvare. Luînd ca parametri unghiurile lui Euler ψ, θ, φ, energia cinetică a solidului este:

$$E_c=\frac{1}{2}(A\omega_x^2+B\omega_y^2+C\omega_z^2).$$

Din examinarea expresiilor vitezelor unghiulare (cap. IX):

$$\omega_x=p=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi;$$

$$\omega_y=q=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi;$$

$$\omega_z=r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi},$$

rezultă că viteza unghiulară ω_z conține viteza $\dot{\varphi}$, dar nu conține unghiul φ, iar vitezele unghiulare ω_x și ω_y conțin unghiul φ, dar nu conțin viteza $\dot{\varphi}$, astfel încît din relațiile de mai sus se deduce:

$$\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial E_c}{\partial\omega_z}\cdot\frac{\partial\omega_z}{\partial\dot{\varphi}}=C\omega_z;$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial\varphi}=\frac{\partial E_c}{\partial\omega_x}\cdot\frac{\partial\omega_x}{\partial\varphi}+\frac{\partial E_c}{\partial\omega_y}\cdot\frac{\partial\omega_y}{\partial\varphi}=A\omega_x\frac{\partial\omega_x}{\partial\varphi}+B\omega_y\frac{\partial\omega_y}{\partial\varphi}=$$

$$=A\omega_x\omega_y-B\omega_y\omega_x=(A-B)\,\omega_x\omega_y.$$

Cum lucrul mecanic elementar produs de rotirea în jurul axei Oz este $M_z\partial\varphi$, din ecuația lui Lagrange se deduce:

$$C\frac{d\omega_z}{dt}+(B-A)\omega_y\omega_x=M_z.$$

Celelalte ecuații se deduc prin permutări circulare.

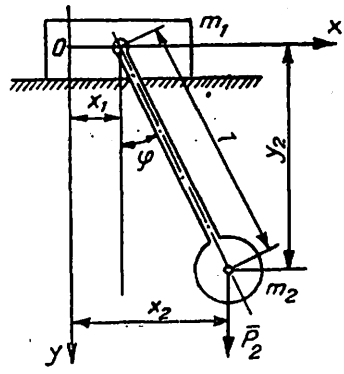
18.52. Să se determine ecuația de mișcare a ciocanului pendul din figura 18.53, corpul de masă m_1 putînd aluneca simultan cu mișcarea pendulului. Să se determine perioada T a pendulului în cazul micilor oscilații. La timpul $t=0$; $x_1=0$.

Rezolvare. Luînd drept coordonate generalizate ale mișcării distanța x_1 de la centrul de greutate al masei M_1 la axa fixă Oy și unghiul φ, conform notațiilor din figură se poate scrie succesiv:

$$x_2=x_1+l\sin\varphi;\quad y_2=l\cos\varphi;$$

$$\dot{x}_2=\dot{x}_1-l\dot{\varphi}\cos\varphi;\quad \dot{y}_2=-l\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

Fig. 18.53.



iar expresia energiei cinetice a sistemului devine:

$$E_c=\frac{1}{2}\sum mv^2=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)=$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2-m_2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Avînd numai forțe de greutate, funcția de forță este:

$$U=m_2gy_2=m_2gl\cos\varphi.$$

Cum:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1}=(m_1+m_2)\,\dot{x}_1-m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi\,;\quad \frac{\partial E_c}{\partial x_1}=0\,;$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}=m_2l^2\dot{\varphi}-m_2l\dot{x}_1\cos\varphi\,;\quad \frac{\partial E_c}{\partial \varphi}=m_2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\,;$$

rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial x_1}=\frac{\partial U}{\partial x_1}=0\,;\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(m_1+m_2)\,\dot{x}_1-m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi\right]=0\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial \varphi}=\frac{\partial U}{\partial \varphi}=-m_2gl\sin\varphi\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m_2l^2\dot{\varphi}-m_2l\dot{x}_1\cos\varphi)-m_2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi=-m_2gl\sin\varphi.$$

Simplificînd ecuația a doua cu m_2l, și neglijînd termenul $\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi$, aceasta devine:

$$l\ddot{\varphi}-\ddot{x}_1\cos\varphi+g\sin\varphi=0.$$

În cazul oscilațiilor mici, $\cos\varphi\approx 1$ și $\sin\varphi\approx\varphi$; deci, prima ecuație devine succesiv:

$$(m_1+m_2)\,\dot{x}_1-m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi=C_1\,;$$

$$(m_1+m_2)\,x_1-m_2l\sin\varphi=C_1t+C_2.$$

La timpul $t=0$, avînd $x_1=0$, rezultă $C_2=0$ și deci:

$$x_1=\frac{m_2l}{m_1+m_2}\sin\varphi\approx\frac{m_2l}{m_1+m_2}\,;\quad \ddot{x}_1=\frac{m_2l}{m_1+m_2}\,\ddot{\varphi}.$$

Înlocuind valoarea aflată în ecuația a doua, rezultă:

$$l\ddot{\varphi}-\frac{m_2l}{m_1+m_2}\,\ddot{\varphi}+g\varphi=0\,;$$

sau:

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1}\,\varphi=0.$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dacă $m_1\gg m_2$, se regăsește perioada pendulului simplu:

$$\lim_{m_1\to\infty}T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

18.53. Să se afle ecuația diferențială a mișcării scării, aplicînd ecuațiile Hamilton (v. fig. 16.10).

Rezolvare. Ținînd seama de definiția impulsului generalizat $p=\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}$ și de expresia energiei cinetice calculată în problema 16.7, rezultă:

$$E=\frac{2}{3}Ml^2\dot{\theta}^2=\frac{3}{8}\frac{p^2}{Ml^2}.$$

Cum potențialul forțelor este:

$$U=-Mgl\cos\theta,$$

rezultă ecuația lui Hamilton:

$$H=E_c-U=\frac{3}{8}\frac{p^2}{Ml^2}+Mg\cos\theta,$$

și deci:

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{3p}{4Ml^2};\quad \frac{\partial H}{\partial \theta}=-Mgl\sin\theta.$$

Ecuațiile lui Hamilton sînt deci:

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{3p}{4Ml^2};\quad \frac{dp}{dt}=Mgl\sin\theta.$$

Derivînd prima ecuație în raport cu t și eliminînd pe $\frac{dp}{dt}$, cu ajutorul ecuației a doua se obține:

$$\ddot{\theta}=\frac{3}{4}\frac{g}{l}\sin\theta.$$

18.54. Să se studieze, prin funcțiile Hamilton, mișcarea unui punct în coordonate polare r și θ, sub acțiunea unei forțe centrale F, în funcție de raza vectoare r.

Rezolvare. Coordonatele generalizate fiind r și θ, rezultă:

$$E_c=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2);\quad U=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi(r). \tag{1}$$

Notînd:

$$p_1=\frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}\quad \text{și}\quad p_2=\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \tag{2}$$

și rezolvînd aceste ecuații în raport cu $\dot{r}$ și $\dot{\theta}$, se obține:

$$\dot{r}=\frac{p_1}{m};\quad \dot{\theta}=\frac{p_2}{mr^2}. \tag{3}$$

Legăturile fiind independente de timp, energia E_c este omogenă în $\dot{r}$ și $\dot{\theta}$, funcția Hamilton este:

$$H=E_c-U=\frac{1}{2m}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{r^2}\right)-\varphi(r). \tag{4}$$

Ecuațiile mișcării sînt în acest caz:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1};\quad \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial r};$$
$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2};\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \theta}, \tag{5}$$

sau:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{p_1}{m};\quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{p_2}{mr^2};$$
$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{1}{m}\frac{p_2^2}{r^3}+\frac{\partial \varphi}{\partial r};\quad \frac{dp_2}{dt}=0. \tag{5'}$$

Ecuațiile (5') definesc pe r, θ, p_1, p_2, în funcție de timp. Din examinarea lor reiese că p_2 este constant și notînd $p_2=mC$, ecuația devine:

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C,$$

adică tocmai integrala ariilor.

Eliminînd parametrul p_1 din prima și a treia dintre ecuațiile (5') și înlocuind $p_2=mC$, se obține ecuația mișcării pe raza vectoare:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=m\frac{C^2}{r^3}+\varphi(r).$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

18.55. Să se regăsească legea pendulului matematic simplu cu ajutorul ecuației Lagrange (fig. 18.54).

Indicație și răspuns.

Luînd unghiul θ drept coordonată generalizată avem:

$$E_c=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad \text{și} \quad U=mgz=mgl\cos\theta.$$

Ecuația lui Lagrange devine:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

adică ecuația diferențială a pendulului.

18.56. Să se determine ecuațiile lui Newton referitoare la dinamica punctului material de masă m, acționat de o forță $\bar{F}(X, Y, Z)$ (fig. 18.55).

Indicație și răspuns. Se aleg drept coordonate generalizate coordonatele carteziene ale punctului material m și deoarece

$$E_c=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \quad \text{și}$$

$$\delta\mathfrak{L}=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z,$$

Fig. 18.54.

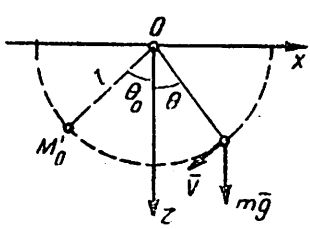
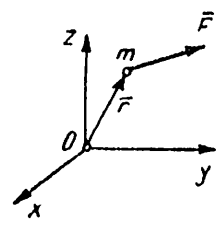


Fig. 18.55.



din ecuațiile Lagrange rezultă ecuațiile lui Newton:

$$m\ddot{x}=X;\quad m\ddot{y}=Y;\quad m\ddot{z}=Z.$$

18.57. Să se studieze mișcarea sistemului, format din două puncte materiale de masă m_1 și m_2, pe planurile înclinate AO și OB, punctele fiind legate între ele printr-un fir flexibil și inextensibil de lungime l (fig. 18.56). Se neglijează frecarea.

Indicație și răspuns. Coordonata generalizată aleasă fiind x_1 avem:

$$x_2=l-x_1;\quad \delta x_2=-\delta x_1;\quad \dot{x}_2=-\dot{x}_1.$$

Ca urmare:

$$E_c=\frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2)=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2;$$

$$U=m_1gz_1=m_2gz_2=(m_1g\sin\alpha_1)x_1+(m_2g\sin\alpha_2)x_2,$$

și accelerația sistemului este:

$$\ddot{x}_1=\frac{m_1\sin\alpha_1-m_2\sin\alpha_2}{m_1+m_2}g.$$

18.58. Să se rezolve prin metoda Lagrange, problema 18.6 (fig. 18.57).

Indicație și răspuns. Luînd drept coordonată generalizată ordonata centrului discului, ținînd seamă de teorema lui König pentru scrierea energiei cinetice a discului, din ecuația lui Lagrange rezultă:

$$\ddot{q}=\frac{2}{3}g.$$

18.59. Să se determine ecuația diferențială a mișcării scării, prin metoda Lagrange (fig. 18.58).

Indicație și răspuns. Conform teoremei lui König energia cinetică la un moment dat este:

$$E_c=\frac{1}{2}M\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2=\frac{2}{3}Ml^2\dot{\theta}^2,$$

căci: $\xi=l\sin\theta$ și $\zeta=l\cos\theta$.

Funcția de forță fiind:

$$U=-Mgz=-Mgl\cos\theta,$$

rezultă:

$$\ddot{\theta}=\frac{3}{4}\cdot\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Fig. 18.56.

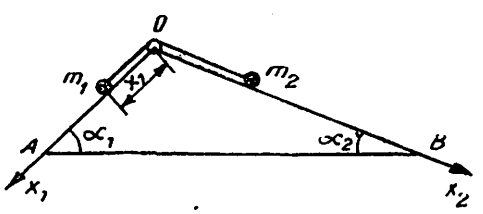


Fig. 18.57.

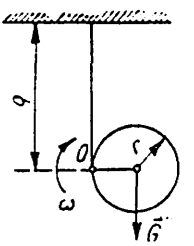
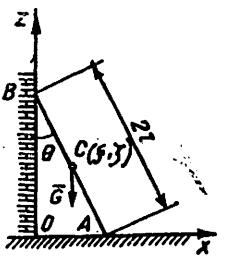


Fig. 18.58.



18.60. Să se rezolve prin metoda Lagrange problema 15.34 (fig. 18.59).

Indicație și răspuns. Luînd drept coordonată generalizată distanța q a greutății P_2 față de planul orizontal rezultă:

$$\ddot{q}=\frac{P_2}{P_2+\frac{3}{8}P_1}g.$$

18.61. Să se găsească mișcarea sistemului cunoscînd masele corpurilor m_1 și m_2 și momentul de inerție al scripetelui, J (fig. 18.60).

Indicație și răspuns. Luînd drept coordonată generalizată unghiul θ cu care se rotește scripetele, avem:

$$E_c=\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

și

$$\delta L=(m_1-m_2)\,g\cdot r\delta\theta.$$

Din ecuația lui Lagrange rezultă accelerația sistemului:

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}g.$$

18.62. Să se determine integrala energiei cinetice, plecînd de la ecuațiile Hamilton.

Indicație și răspuns. Prin multiplicarea ecuațiilor lui Hamilton:

$$\frac{dq_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_s};\quad \frac{dp_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_s},\quad (s=1,\ldots,n),$$

și însumate se obține:

$$\sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(H)=0,\ \text{deci}\ H=const.$$

Deci, dacă legăturile sînt independente scleronome de timp și dacă forțele direct aplicate admit un potențial, energia totală rămîne constantă.

18.63. Să se rezolve problema 18.57 cu ajutorul funcției Hamilton (fig. 18.56).

Indicație și răspuns. Privind derivarea funcției

$$H=E_c-U=\frac{p^2}{2(m_1+m_2)}-g\left[(m_1\sin\alpha_1-m_2\sin\alpha_2)\,x_1+m_2l\sin\alpha_2\right],$$

se obțin ecuațiile Hamilton:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{p}{m_1+m_2};$$

$$\frac{dp}{dt}=g\,(m_1\sin\alpha_1-m_2\sin\alpha_2).$$

Fig. 18.59.

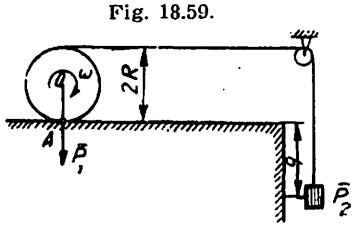
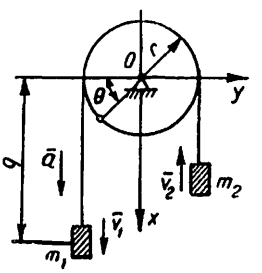


Fig. 18.60.



Eliminînd impulsul p, prin integrare se obține:

$$x_1 = \frac{g}{2(m_1+m_2)}(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)\, t^2 + C_1 t + C_2.$$

18.64. Să se determine mișcarea sistemului mecanic din figura 18.61 format din cadrul $ABCD$ care poate oscila în jurul axei orizontale AD. Barele AB și DC au lungimea l și greutatea P, iar bara BC lungimea L și greutatea Q.

Indicație și răspuns.

Barele AB și DC avînd mișcări de rotație, iar bara BC mișcare de translație, funcția Lagrange este:

$$\mathfrak{L} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\,\frac{P}{g}\,\frac{l^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{Q}{g}\,(l\dot{\theta})^2 + 2P\,\frac{l}{2}\cos\theta + Ql\cos\theta =$$

$$= \frac{2P+3Q}{6g}\,l^2\dot{\theta}^2 + l(P+Q)\cos\theta.$$

Ca urmare ecuația diferențială a mișcării este:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \frac{3(P+Q)}{2P+3Q} \sin\theta = 0.$$

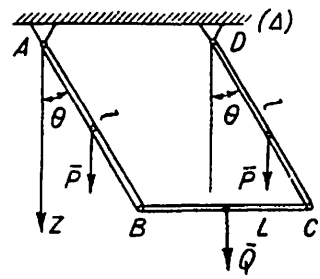


Fig. 18.61.

Capitolul 19

VIBRAȚII ÎN TEHNICĂ

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Prin vibrații** (oscilații) se înțeleg mișcările periodice ale unui sistem, efectuate în jurul unei poziții de echilibru, în care energia sistemului are schimbări periodice de energie potențială în energie cinetică și invers.

Timpul în care se repetă o vibrație se numește *perioada vibrației.*

2. **Vibrațiile libere neamortizate** sînt produse în general de acțiunea unei forțe elastice asupra unui corp de masă m și sînt reprezentate prin ecuația:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0, \qquad (a)$$

Notînd cu δ_{st} deformația statică a masei sub acțiunea forței elastice (de exemplu, arc) și cu k constanta elastică a arcului, rezultă:

$$G=mg=k\cdot\delta_{st};$$

— pulsația naturală

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}; \qquad (b)$$

— perioada

$$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}=0{,}2\sqrt{\delta_{st}}\ [s] \qquad (c)$$

δ_{st} fiind exprimat în cm;

— frecvența proprie

$$f=\frac{1}{T}\approx 5\sqrt{\frac{1}{\delta_{st}}}\ (Hz)\ \text{(perioade pe secundă).} \qquad (d)$$

3. **Vibrațiile libere amortizate** au ecuația:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0. \qquad (e)$$

în care c este *coeficientul de rezistență vîscoasă* (frecare proporțională cu viteza).

În cazul $c<c_{cr}$ soluția ecuației diferențiale este:

$$x=e^{-\frac{c}{2m}t}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t), \qquad (f)$$

în care ω_1, pseudopulsația, este:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}=\sqrt{\omega_n^2-\delta^2} \qquad (g)$$

iar C_1 și C_2 sînt două constante de integrare.

Raportul $\delta=\frac{c}{2m}$ este *gradul de amortizare* care caracterizează durata vibrațiilor proprii. Amplitudinile maxime descresc în progresie geometrică, abscisele corespunzătoare cresc în progresie aritmetică, iar frecvența proprie este:

$$f=\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\omega_n^2-\delta^2}. \qquad (h)$$

Logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive (avînd același sens) se numește *decrement logaritmic*, expresie care caracterizează mărimea *amortizării*.

Dacă $\frac{c^2}{4m^2}>\frac{k}{m}$, sau $c>c_{cr}$, mișcarea este aperiodică. Dacă $c=c_{cr}$ avem cazul amortizării critice, unde s-a notat $c_{cr}=2\sqrt{mk}$.

4. **Vibrațiile forțate neamortizate.**

Ecuația acestora este:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=P_0\sin pt, \qquad (i)$$

a cărei soluție este:

$$x=C_1\sin\omega_n t+C_2\cos\omega_n t+\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}\sin pt, \qquad (j)$$

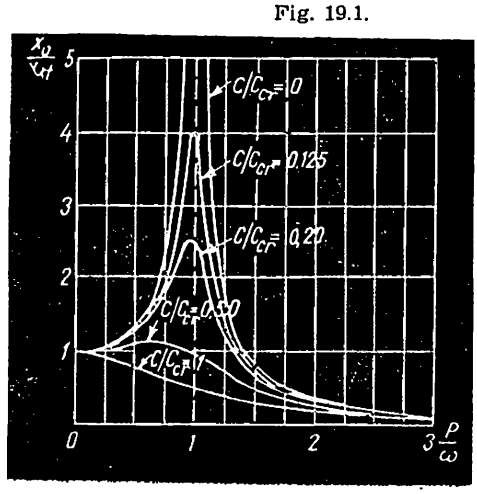
în care: ω_n este pulsația naturală;

p — pulsația excitatoare exterioară (forțată);

δ_{st} — deformația statică a sistemului sub acțiunea lui P_0.

Cînd $p=\omega_n$ apare fenomenul de rezonanță, amplitudinea crește la infinit (fig. 19.1)

Fig. 19.1.



5. **Vibrații forțate cu amortizare.**

Ecuația diferențială este:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=P_0\sin pt, \qquad (k)$$

cu soluția :

$$x=e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)+\delta_{st}\frac{\cos(pt-\varphi)}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\gamma r)^2}}$$

$$\gamma=\frac{p}{\omega_n};\quad r=\frac{c}{c_{cr}} \tag{l}$$

în care :

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}};\quad \delta_{st}=\frac{P_0}{k};\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{pc}{k-mp^2}. \tag{m}$$

Cu cît amortizarea crește, amplitudinea vibrațiilor la rezonanță se micșorează (fig. 19.1)

6. **În cazul mișcărilor vibratorii,** provenite dintr-o mișcare de rotație, se pot scrie direct ecuațiile mișcării și determina elementele necesare (ω, T, f), prin analogia formal matematică, existentă între elementele geometrice și cele mecanice ale mișcării de rotație și translație.

Mișcarea vibratorie de rotație cu amortizare și vibrații forțate va fi definită de ecuația :

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}+C_r\frac{d\varphi}{dt}+k_r\varphi=M_0\sin pt, \tag{n}$$

în care :

J este momentul de inerție al masei în raport cu axa de rotație ;
c_r — cuplul rezistent datorit amortizării ;
k_r — cuplul necesar pentru a roti masa cu unitatea unghiulară ;
$M_0\sin pt$ — cuplul alternativ care produce oscilațiile forțate.

B. PROBLEME REZOLVATE

19.1. O greutate G este suspendată vertical de două arcuri, montate în serie, avînd constantele k_1 și k_2. Să se determine frecvența vibrațiilor (fig. 19.2) și constanta elastică echivalentă k_e a celor două arcuri.

Rezolvare. Sub acțiunea greutății G, deformația statică totală va fi egală cu suma deformațiilor parțiale :

$$\delta_{st}=\delta_1+\delta_2=\frac{G}{k_1}+\frac{G}{k_2}=G\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}=\frac{G}{k_e}.$$

Frecvența proprie a sistemului se obține din relația (c) :

$$f=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k_e}{m}},\quad \text{în care}\quad \frac{1}{k_e}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}.$$

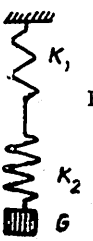


Fig. 19.2.

În cazul general a n arcuri montate în serie, de constante elastice $k_1, k_2, \ldots, k_n$, constanta elastică echivalentă este dată de relația:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}.$$

Constantele elastice k_i se însumează la fel cu însumarea capacităților electrice montate în serie.

19.2. Să se determine constanta elastică a arcurilor din figura 19.3 în punctul de articulație O.

Rezolvare.

Forța egală cu unitatea, aplicată în O, acționează asupra arcurilor k_1 și k_2 respectiv cu valorile:

$$\frac{a_2}{a_1+a_2}, \quad \frac{a_1}{a_1+a_2},$$

iar deformațiile statice respective sînt:

$$\delta_1 = \frac{a_2}{(a_1+a_2)k_1}; \quad \delta_2 = \frac{a_1}{(a_1+a_2)k_2}$$

Deformația statică δ_0 în punctul O se poate scrie:

$$\delta_0 = \frac{a_2\cdot\delta_1 + a_1\cdot\delta_2}{a_1+a_2} = \frac{1}{(a_1+a_2)^2}\cdot\left[\frac{a_2^2}{k_1} + \frac{a_1^2}{k_2}\right].$$

Ca urmare constanta elastică echivalentă a arcurilor în punctul O este:

$$k_0 = \frac{1}{\delta_0} = \frac{(a_1+a_2)^2}{\frac{a_1^2}{k_2} + \frac{a_2^2}{k_1}}.$$

În cazul particular $k_1=k_2=k$; $a_1=a_2$, rezultă:

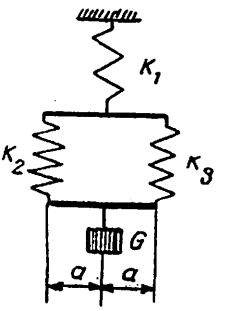
$$k_0 = 2k.$$

19.3. Se dă un sistem format din trei arcuri de constante elastice k_1, k_2, k_3, montate ca în figura 19.4. Să se determine constanta elastică echivalentă.

Rezolvare. Arcurile k_2 și k_3, montate în paralel, pot fi înlocuite cu un arc având constanta k', dată de relația:

$$k' = k_2 + k_3.$$

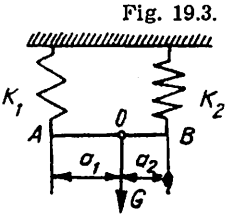
Fig. 19.4.



La rîndul lor, arcurile k' și k_1, montate în serie, pot fi înlocuite cu un arc de constantă elastică k_e:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k'} + \frac{1}{k_1}.$$

Fig. 19.3.



19.4. Să se determine valoarea pulsației naturale a masei m (fig. 19.5) dacă masa m_r a arcului de constantă k nu poate fi neglijată în raport cu masa m.

Rezolvare. Viteza elementului de arc de lungime dy, aflat la distanța y de punctul de fixare, este $v \cdot \frac{y}{l}$, în care v este viteza masei m.

Energia cinetică totală a sistemului se compune din energia cinetică a masei m și a arcului, deci:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{m_r}{l} dy\right)\left(\frac{y}{l} \cdot v\right) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_r}{3}\right) v^2.$$

Cum energia potențială a sistemului este $E_p = \frac{1}{2} kx^2$ și sistemul fiind conservativ, se poate scrie:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_r}{3}\right) v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = const.$$

din care, se obține ecuația mișcării:

$$\left(m + \frac{m_r}{3}\right)\ddot{x} + kx = 0$$

și pulsația proprie:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m + \frac{m_r}{3}}.$$

Masa arcului are ca efect o micșorare a frecvenței vibrației sistemului.

19.5. O bară cu lungimea l și greutatea G este susținută de două role plasate la o distanță $2a$ una de cealaltă (fig. 19.6). Rolele se rotesc în sens contrar una față de cealaltă, însă cu aceeași turație. Cunoscînd coeficientul de frecare la alunecare dintre bară și role, să se determine frecvența și perioada oscilațiilor longitudinale ale barei.

Rezolvare. Se consideră bara deplasată cu centrul ei de greutate față de axa de simetrie a rolelor, cu cantitatea x.

Reacțiunile în punctele de contact dintre bară și role sînt:

$$N_2 = G\frac{a+x}{2a} \quad \text{și} \quad N_1 = G\frac{a-x}{2a}.$$

La limită forțele de frecare pe bară sînt respectiv μN_1 și μN_2. Forța care tinde a restabili echilibrul este:

$$F = \mu (N_2 - N_1) = \mu G \frac{a+x-a+x}{2a} = \mu G \frac{x}{a}.$$

Fig. 19.5.

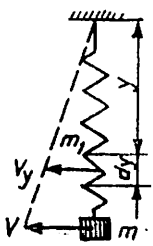
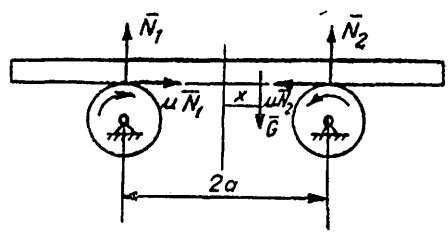


Fig. 19.6.



Aplicînd legea fundamentală a dinamicii, se obține ecuația diferențială a mișcării barei:

$$\frac{G}{g}\ddot{x} + \mu G \frac{x}{a} = 0,$$

sau

$$\ddot{x}+\mu\frac{g}{a}x=0.$$

În acest caz, frecvența proprie de oscilație și perioada oscilațiilor longitudinale devin:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{a}} \quad \text{și} \quad T=2\pi\sqrt{\frac{a}{\mu g}}.$$

Prin măsurarea perioadei vibrației, dispozitivul servește la determinarea coeficientului de frecare dinamic.

19.6. Pe o roată, având raza r și un moment de inerție în raport cu axa de rotație J_0, este trecută o panglică nedeformabilă și de greutate neglijabilă. Un capăt al panglicei este prins de un arc având constanta k, iar de celălalt capăt, atîrnă o greutate P (fig. 19.7). Dînd roții o turație de un unghi θ_0 față de poziția sa de echilibru, să se determine legea mișcării și perioada de oscilație.

Rezolvare. Cuplul motor care caută să rotească roata este:

$$C_m=Tr.$$

Cuplul rezistent, datorit arcului este:

$$C_r=Fr,$$

în care F este tensiunea în arc, astfel încît ecuația diferențială a mișcării se poate scrie:

$$J_0\frac{d^2\theta}{dt^2}=Tr-Fr. \tag{1}$$

Prin aplicarea principiului lui d'Alembert asupra sarcinii P, se obține:

$$T=P-\frac{P}{g}a,$$

în care a este accelerația greutății P.

Arcul este singurul element elastic și tensiunea sa F este dată de relația:

$$F=k(x+\delta),$$

în care δ este deplasarea sub acțiunea forței statice.

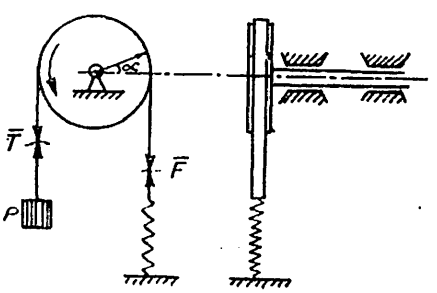
Cum $x=r\theta$ și $a=r\varepsilon=r\ddot{\theta}$, introducînd în ecuația (1) valorile lui T și F, se obține:

$$\left(J_0+\frac{P}{g}r^2\right)\ddot{\theta}+kr^2\theta=0. \tag{2}$$

Notînd:

$$J_0+\frac{P}{g}r^2=J \quad \text{și} \quad kr^2=c,$$

Fig. 19.7.



soluția generală a ecuației diferențiale (2) este:

$$\theta = C_1 \cos \sqrt{\frac{c}{J}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{c}{J}}\, t.$$

Pentru condițiile inițiale ($t=0$, $\theta=\theta_0$; $\omega=0$), se obține legea mișcării:

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{c}{J}}\, t,$$

și perioada este $T=2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}$.

Pentru aplicația numerică se obține:

$$J = 2{,}963 \text{ Nms}^2$$

$$c = kr^2 = 80{,}00 \text{ N m}$$

$$\theta = \theta_0 \cos (5{,}196\, t);$$

$$T = 6{,}28 \sqrt{\frac{2{,}963}{80}} = 1{,}21 \text{ s}.$$

19.7. Un corp, având greutatea G, se poate deplasa în același plan vertical pe un cilindru de rază R (fig. 19.8). Deplasînd corpul față de poziția de repaus cu un unghi θ_0 și lăsîndu-l să oscileze liber, fără viteză inițială, corpul revine în poziția de repaus după n sferturi de perioadă. Să se determine coeficientul de frecare dintre corp și suprafața cilindrului, considerînd raza cilindrului mare și deplasarea mică. Discuție.

Rezolvare. Considerînd corpul, la un moment dat, într-o poziție definită de unghiul θ, forțele care acționează asupra lui sînt:

— greutatea proprie a corpului G,

— reacțiunea cilindrului $N = G\cos\theta$,

— forța de frecare $F \leqslant \mu N$, deoarece se poate neglija forța centrifugă.

Ecuația diferențială a mișcării corpului este:

$$J\varepsilon = -GR \sin\theta + \mu GR \cos\theta,$$

în care J este momentul de inerție al masei m în raport cu centrul O. Pentru unghiuri θ mici, ecuația devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = \frac{\mu g}{R}.$$

În condițiile inițiale date, $t=0$; $\theta=\theta_0$ și $\dot{\theta}=0$, ecuația diferențială are ca soluție valoarea:

$$\theta = (\theta_0 - \mu)\cos \sqrt{\frac{g}{R}}\, t + \mu.$$

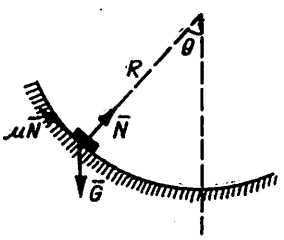


Fig. 19.8.

Se constată că, la fiecare sfert de perioadă, amplitudinea unghiulară a oscilației scade cu μ (în radiani). Punînd condiția cerută de problemă, se obține condiția de echilibru:

$$\theta_0 - n\mu \leqslant \varphi_0,$$

unde

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \mu.$$

Problema conduce la unele rezultate interesante, obținînd ecuații neliniare și neomogene, după cum mișcarea corpului este ascendentă sau descendentă, iar deplasările în jurul poziției de echilibru sînt mari sau mici.

19.8. Un electromotor de greutate G (fig. 19.9) este montat la capătul unei bare de lungime l, încastrate, avînd secțiune constantă. Rotorul electromotorului de greutate Q are o excentricitate e față de axa de rotație. Motorul are turația de regim n rot/min. iar modulul de elasticitate al materialului barei este E.

Să se determine momentul de inerție I al secțiunii transversale a grinzii, astfel încît amplitudinea oscilațiilor forțate să nu depășească valoarea q_0. Se neglijează greutatea grinzilor.

Rezolvare. Ecuația diferențială a mișcării pe verticală a centrului de masă a electromotorului este:

$$m\ddot{q} + kq = F_e \sin pt \tag{1}$$

unde k este constanta elastică a barei;

$m = \frac{G}{g}$ — masa electromotorului;

$F_e = \frac{Qe}{g} p^2$ — forța centrifugă datorită excentricității;

q — deplasarea pe verticală a masei motorului.

Soluția ecuației diferențiale (1) este:

$$q = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \sin pt, \tag{2}$$

unde

$$\delta_{st} = \frac{F_e}{k}; \quad k = \frac{3EI}{l^3}; \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}. \tag{3}$$

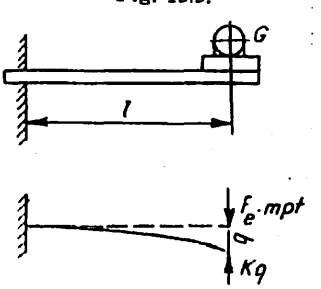
Mărginind amplitudinea vibrației la valoarea x_0, la limită avem:

$$\frac{F_e}{k\left[1 - \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2\right]} = q_0 \tag{4}$$

Fig. 19.9.

de unde, ținînd seama de notațiile date de relațiile (3), se deduce:

$$I = \frac{p^2}{3E} \frac{l^3}{g} \frac{Qe + Gq_0}{q_0}.$$



19.9. Un electromotor de greutate G este așezat la mijlocul unei grinzi de lungime l, simplu rezemată la capete, și produce o săgeată statică δ (fig. 19.10, *a*). Rotorul mașinii, de greutate P, are o excentricitate e față de axa de rotație, și posedă o turație de regim n. Neglijînd greutatea grinzii și admițînd că aceasta are un coeficient de amortizare vîscoasă c, se cere să se determine :

a) pulsația naturală ω_n a barei și perioada T_n ;

b) amplitudinea vibrațiilor forțate ;

c) amplitudinea vibrațiilor la rezonanță $p=\omega_n$;

d) să se traseze curba de variație a amplitudinilor vibrațiilor în funcție de raportul pulsațiilor $\frac{p}{\omega_n}$;

e) reacțiunile din reazemele A și B ale grinzii și valoarea lor maximă ;

f) să se calculeze puterea motorului.

Aplicație.

$$G=6\,870 \text{ N}; \quad l=4 \text{ m}; \quad \delta=0{,}02 \text{ cm}; \quad e=8.10^{-3} \text{ cm};$$

$$n=1\,500 \text{ rot/minut}; \quad P=1\,300 \text{ N}; \quad c=800 \text{ N}\cdot\text{s/cm}.$$

Rezolvare. a) Ecuația diferențială a vibrațiilor este

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_e\cos pt ;$$

cu soluția generală dată de ecuația (*l*) ;

$$x=e^{-bt}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)+\frac{F_e}{k}\,\frac{\cos(pt-\varphi)}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2r\gamma)^2}} ;$$

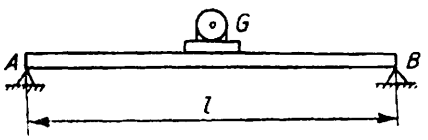
unde :

$$p=\frac{2\pi n}{60}, \quad F_e=\frac{P}{g}ep^2, \quad \omega_n=\frac{k}{m}, \quad \omega_1=\sqrt{\omega_n^2-\delta^2},$$

$$\delta=\frac{c}{2m}; \quad \gamma=\frac{p}{\omega_n}; \quad r=\frac{c}{c_r}=\frac{c}{2\sqrt{mk}}; \quad \delta_{st}=\frac{F_e}{k};$$

au semnificația de la partea teoretică a capitolului de față.

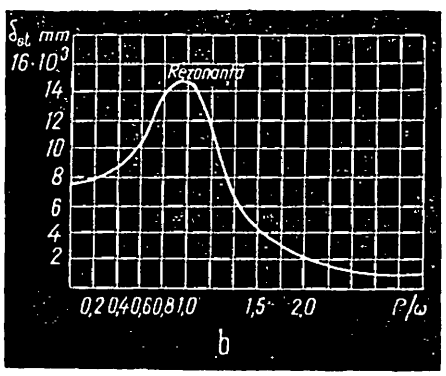
Fig. 19.10.



a

Ca urmare :

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T_1=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2-\delta^2}}.$$



b

b) Amplitudinea maximă a vibrațiilor forțate pentru valorile r, γ date este :

$$x_f=\frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2r\gamma)^2}}.$$

c) La rezonanță $\gamma=1$ și deci $x_{max}=\frac{\delta_{st}}{2r}$.

d) Se reprezintă funcțiunea $x_{fmax}=x(\gamma)$,

e) Cînd electromotorul este în mers, forța care acționează în mijlocul grinzii este:

$$P=\nu G,$$

în care ν este factorul dinamic dat de relația:

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2r\gamma)^2}}.$$

Reacțiunile în reazeme sînt $R_A=R_B=\frac{1}{2}\nu G$ iar cele maxime se produc la rezonanță, moment în care $\gamma=1$ și $\nu=\nu_{max}=\frac{1}{2r\gamma}$.

f) Lucrul mecanic efectuat în intervalul de timp dt este:

$$dL=F\cdot v\cdot dt=(F_e\cos pt)\left(-x_f p\sin(pt-\varphi)\right)dt.$$

Conform definiției, puterea sistemului se scrie succesiv:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T dL=-\frac{F_e p x_f}{T}\int_0^T \cos pt\cdot\sin(pt-\varphi)\,dt=$$

$$=-\frac{F_e p x_f}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\left[\sin(-\varphi)+\sin(2pt-\varphi)\right]dt=\frac{F_e x_f p}{2}\sin\varphi=$$

$$=\frac{F_e^2 p}{2k}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2r\gamma)^2}}=\frac{F_e^2\sin\varphi}{2\sqrt{p^2k^2\left[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{\omega_n^2}\right]^2+c^2}}.$$

Aplicație.

a) Pentru aplicația numerică se obține:

$$m=\frac{G}{g}=7\cdot10^3\ \text{N s}^2/\text{m};$$

$$k=\frac{P}{\delta}=34{,}35\cdot10^4\ \text{N/cm};$$

$$p=\frac{2\pi n}{60}=157\ \text{rad/s};$$

$$F_0=\frac{P}{g}e p^2=261{,}4\ \text{N}$$

$$T_1=\frac{2}{\sqrt{\omega_n^2-\delta^2}}=0{,}0294\ \text{s}.$$

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=214\ \text{rad/s}$$

b) $$x_f = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2r\gamma)^2}} = 12{,}75 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}.$$

c) $$x_{max} = \frac{\delta_{st}}{2r} = 14{,}76 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}.$$

d) Calculînd amplitudinile vibrației forțate pentru diferite valori ale raportului p/ω_n, se obțin valorile trecute în tabela de mai jos:

$\gamma = p/\omega_n$	x_f	p/ω_n	x_f
0,1	$7{,}68 \cdot 10^{-3}$	1	$14{,}76 \cdot 10^{-3}$
0,2	$7{,}79 \cdot 10^{-3}$	1,5	$5{,}18 \cdot 10^{-3}$
0,5	$9{,}60 \cdot 10^{-3}$	2	$2{,}40 \cdot 10^{-3}$
0,8	$13{,}96 \cdot 10^{-3}$	5	$0{,}32 \cdot 10^{-3}$

Curba de variație a amplitudinii, în funcție de raportul p/ω_n, este reprezentată în figura 19.10, *b*.

e) $$\nu = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2r\gamma)^2}} = 1{,}67\,; \quad \nu_{max} = 1{,}94.$$

$$R_A = R_B = 5\,750\ \text{N}\,; \quad R_{A_{max}} = R_{B_{max}} = 6\,670\ \text{N}.$$

f) $P = 0{,}01467$ kgm/s.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

19.10. Sub o sarcină P, un arc se alungește cu x_0. Care va fi constanta elastică k a arcului, amplitudinea x_0, și perioada T a vibrațiilor atunci cînd arcul va fi lăsat să oscileze liber sub o sarcină P'.

Răspuns:

$$k = \frac{P}{x_0}\,; \quad x_0' = \frac{P'}{k} = \frac{P'}{P}\,x_0\,; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{P'}{g}\cdot\frac{x_0}{P}}.$$

19.11. Un motor electric cu greutate G este montat pe patru arcuri, de aceeași constantă elastică k. Motorul este astfel așezat, încît se poate deplasa numai vertical. Să se determine frecvența proprie f și perioada T a oscilațiilor sistemului.

Răspuns:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e}{m}}, \quad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}}; \quad k_e = 4k.$$

19.12. Un corp de greutate G este prins cu două arcuri identice, de constantă elastică k. Care este frecvența proprie a sistemului? Dacă se deplasează corpul cu x_0 din poziția de echilibru, care este viteza care o va avea corpul în momentul trecerii prin poziția avută inițial? (Se neglijează frecările).

Aplicație $G=80$ N; $k=20\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$; $x_0=3$ cm (fig. 19.11).

Indicație și răspuns. Frecvența proprie este dată de relația:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\cdot k\cdot g}{G}}$$

deoarece arcurile sînt montate în paralel. Din ecuația mișcării corpului:

$$x=x_0\cos\omega t,$$

rezultă viteza cerută:

$$v_0=x_0\omega=x_0 2\pi f=x_0\sqrt{\frac{2\cdot k\cdot g}{G}}\,.$$

Pentru aplicația numerică se obține $f=3{,}5$ Hz; $v_0=66{,}6$ cm/s.

19.13. Care sînt expresiile constantelor elastice k la următoarele grinzi, avînd lungimile l, modulul de elasticitate E și momentul de inerție transversal I:

a) încastrată la un capăt și cu o forță G la celălalt capăt;

b) simplu rezemată la ambele capete, cu o forță centrală G;

c) dublu încastrată, cu o forță centrală G;

d) liberă încastrată la un capăt, cu o sarcină uniform distribuită p.

Indicație și răspuns. Din relația de definiție

$$G=mg=k\cdot\delta_{st}$$

pentru o greutate egală cu unitatea rezultă că, constanta elastică este inversa deformației statice (săgeții). Ca urmare:

$$a)\ k=\frac{3EI}{l^3};\quad c)\ k=\frac{192EI}{l^3};$$

$$b)\ k=\frac{48EI}{l^3};\quad d)\ k=\frac{8EI}{l^3}\,.$$

valori înscrise în anexa 5.

19.14. O sarcină G este plasată pe o grindă simplu rezemată, cu lungimea l, la o depărtare a de un reazem (fig. 19.12). Să se determine frecvența proprie de oscilație a sarcinii în direcție verticală, neglijînd greutatea grinzii.

Indicație și răspuns. Din expresia deformației statice δ_{st},

$$\delta_{st}=\frac{Ga^2(l-a)^2}{3lEI},$$

se obține pentru frecvența proprie valoarea:

$$f=\frac{1}{2\pi a(l-a)}\cdot\sqrt{\frac{3glEI}{G}}\,.$$

Fig. 19.11.

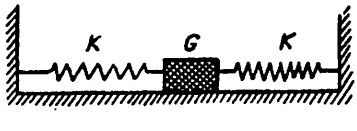
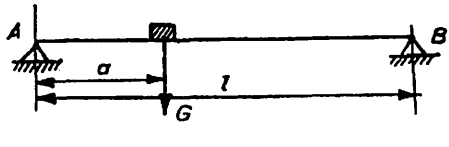


Fig. 19.12.



19.15. Se dă pîrghia OA de lungime l și de greutate neglijabilă, articulată în O și susținînd la capătul A un corp de masă m. La distanța a de punctul de articulație se prinde un arc avînd constanta elastică k (fig. 19.13). Să se determine ecuația mișcării și frecvența proprie de vibrație.

Indicație și răspuns. Notînd cu θ unghiul de rotire a barei în jurul articulației O, avem:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{a}{l}\theta\right)^2.$$

Prin diferențiere se obține ecuația diferențială a mișcării

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{a^2}{l^2}\theta = 0.$$

Frecvența proprie de oscilație este:

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a}{l} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Pe acest principiu se bazează aparatul utilizat la înregistrarea vibrațiilor unui vapor (palograf).

19.16. Se dă pendulul din figura 19.14. Să se determine viteza cu care va trece masa m prin poziția de echilibru, atunci cînd din poziția de echilibru pendulul este deplasat cu un unghi θ.

Indicație și răspuns. Ecuația diferențială a mișcării pendulului este:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2 \cdot k \cdot a^2}{m \cdot l^2}\right)\theta = 0. \qquad (1)$$

Se obține:

$$\omega_n^2 = \frac{g}{l} + \frac{2 \cdot k \cdot a^2}{m \cdot l^2},$$

și

$$v = l\dot{\theta} = l\theta_0\omega_n.$$

19.17. Să se determine perioada micilor oscilații verticale ale unei bare, prevăzută cu două greutăți cu masele m_1 și m_2, care se poate roti în jurul axei orizontale ce trece prin articulația O și este legată de două arcuri orizontale, de rigidități k_1 și k_2 (fig. 19.15).

Indicație și răspuns. Se va aplica metoda Rayleigh. Din egalarea energiei cinetice maxime:

$$E_{max} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \varphi_0^2 \cdot \omega^2 (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2).$$

Fig. 19.13.

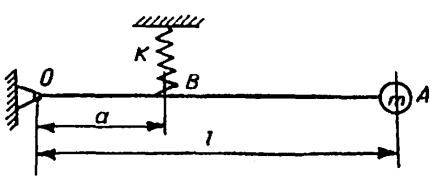


Fig. 19.14.

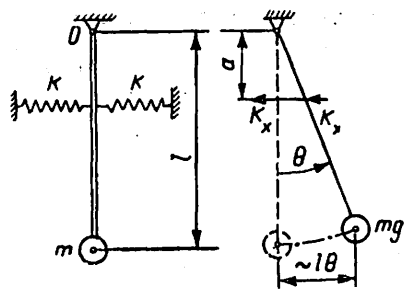
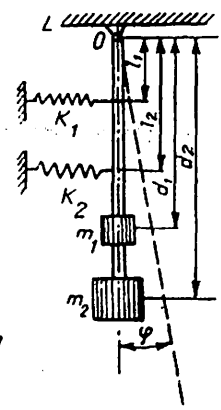


Fig. 19.15.



cu energia potenţială maximă:

$$E_{p_{max}} = \frac{1}{2} k_1 \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \cdot x_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \varphi_0^2 (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2).$$

rezultă:

$$\omega^2 = \frac{k_1 \cdot l_1^2 + k_2 \cdot l_2^2}{m_1 \cdot d_1^2 + m_2 \cdot d_2^2},$$

sau, în general:

$$\omega^2 = \frac{\sum k_i \cdot l_i^2}{\sum m_i \cdot d_i^2}.$$

19.18. Fusele unui rotor, avînd raza r, sînt sprijinite pe un palier circular cu raza R (fig. 19.16). Să se determine frecvenţa vibraţiilor rotorului, atunci cînd el se deplasează fără alunecare pe suprafaţa palierului.

Indicaţie şi răspuns. Se consideră rotorul deplasat faţă de poziţia de echilibru cu un unghi θ. În acelaşi timp, rotorul s-a rotit cu un unghi α. Între unghiurile θ şi α există relaţia:

$$\theta (R - r) = \alpha \cdot r. \tag{1}$$

Asupra rotorului acţionînd cuplul de inerţie şi cuplul motor, din ecuaţia de mişcare rezultă:

$$J_A \frac{d^2\alpha}{dt^2} + G \sin\theta \cdot r = 0, \tag{2}$$

în care J_A este momentul de inerţie al rotorului în raport cu axa care trece prin A, punctul de contact:

$$J_A = J_0 + \frac{G}{g} r^2. \tag{3}$$

Pentru unghiuri θ mici, $\sin\theta \approx \theta$ şi, ţinînd seamă de relaţia (1), înlocuind pe α în funcţie de θ, se obţine:

$$\left(J_0 + \frac{G}{g} r^2\right) \frac{R - r}{r} \frac{d^2\theta}{dt^2} + Gr\theta = 0.$$

19.19. Şasiul unui vagon de pasageri, de greutate G, este aşezat pe un sistem de şase arcuri a căror constantă elastică unitară este k (fig. 19.17). Şasiul poate avea atît o oscilaţie de translaţie verticală, cît şi o oscilaţie de rotaţie în jurul

Fig. 19.16.

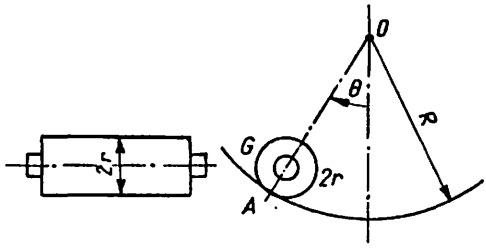
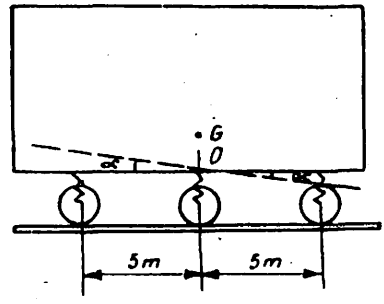


Fig. 19.17.



unei axe orizontale, trecînd prin punctul de articulaţie O. Momentul de inerţie al şasiului, în raport cu axa orizontală trecînd prin G, este J_G şi $OG=a$. Distanţele dintre axele roţilor fiind l, să se determine perioadele proprii de oscilaţie pe verticală T_1 şi de rotaţie T_2.

Aplicaţie. $G=200$ kN ; $k=2.10^6$ N/m ; $OG=0{,}8$ m ; $l=5$ m ; $J_G=2{,}8\cdot10^5$ Nms^2.

Indicaţie şi răspuns. Perioada de oscilaţie este :

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}},$$

în care $k_e=6k$ deoarece sînt şase arcuri identice montate în paralel.

Ecuaţia diferenţială a mişcării de rotaţie în jurul axei ce trece prin O este :

$$J_0\frac{d^2\theta}{dt^2}+4P_1l=0,$$

în care : $P_1=kx_1=kl\theta$ şi $J_0=J_G+m\,(OG)^2$.

Ca urmare :

$$T_2=\frac{\pi}{l}\cdot\sqrt{\frac{J_0}{k}}.$$

Pentru aplicaţia numerică rezultă :

$$J_0=2{,}928\cdot10^5\ \text{Nms}^2$$

$$T_1=0{,}259\ \text{s}$$

$$T_2=0{,}241\ \text{s}.$$

19.20. Pentru a înregistra vibraţiile verticale ale unei fundaţii de maşini, cu greutatea Q, montată pe un arc avînd constanta elastică k_1, se prinde aparatul de articulaţia A (fig. 19.18). Aparatul se compune dintr-un indicator de forma unei pîrghii în unghi drept, avînd momentul de inerţie J_0 în raport cu axa de oscilaţie O. În punctul B, indicatorul are fixat un arc, avînd constanta elastică k_2. Neglijînd dimensiunile sarcinii, să se determine perioada oscilaţiilor libere ale sistemului.

Indicaţie şi răspuns. Aplicînd indicatorului legea fundamentală a dinamicii şi înlocuind arcurile cu forţele elastice corespunzătoare (fig. 19.19), care sînt proporţionale cu deplasările, se poate scrie :

$$J_0\frac{d^2\theta}{dt^2}=-k_1x_1d-\frac{Q}{g}ad-k_2x_2b,$$

în care $a=d\theta$ este acceleraţia greutăţii Q.

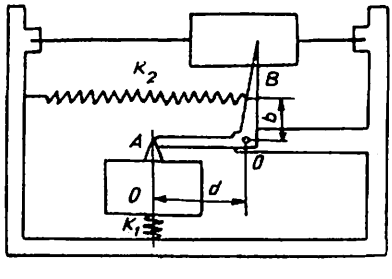


Fig. 19.18.

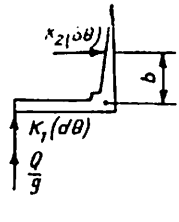


Fig. 19.19.

De unde,

$$\left(J_0+\frac{Q}{g}d^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+(k_1d^2+k_2b^2)\theta=0,$$

Perioada de oscilaţie va fi:

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{Jg+Qd^2}{g(k_1d^2+k_2b^2)}}.$$

19.21. Se dă un arc avînd constanta elastică 10^3 N/m. De arc este atîrnat un corp în greutate de 60 N (fig. 19.20). Sistemul este prevăzut cu un amortizor a cărui forţă de amortizare este direct proporţională cu viteza corpului şi egală cu 40 N·s/m. Să se determine:

a) frecvenţa proprie a vibraţiilor neamortizate;

b) frecvenţa proprie a vibraţiilor amortizate;

c) valoarea critică a amortizării.

Răspuns.

a) $$f_n=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{6{,}28}\cdot\sqrt{\frac{1\,000}{6}}=2{,}05\text{ Hz};$$

b) $$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{c^2}{4m^2}+\frac{k}{m}}=\frac{1}{6{,}28}\sqrt{-\frac{40^2}{4\cdot36}+\frac{1\,000}{6}}=1{,}98\text{ Hz};$$

c) $$C_{cr}=2\sqrt{km}=155\frac{\text{N}}{\text{m/s}}.$$

19.22. Să se determine constanta de amortizare vîscoasă c în cazul sistemului din figura 19.21, *a*, atunci cînd perioada de oscilaţie a greutăţii G este T.

Indicaţii şi răspuns. Ecuaţia diferenţială a mişcării se poate scrie (fig. 19.21, *b*)

$$J_0\ddot{\theta}=(-ka\theta)\,a-(ca\dot{\theta})\,a$$

unde $J_0=\frac{G}{g}l^2$.

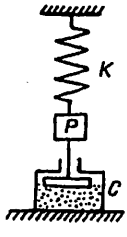
Cunoscînd pulsaţia $\omega_1=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}\cdot\frac{a^2}{2}}$, rezultă perioada mişcării şi valoarea constantei de amortizare c:

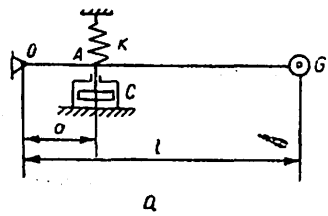
$$c^2=4m^2\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{k}{m}-\frac{4\pi^2l^2}{a^2T^2}\right).$$

Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca:

$$\frac{k}{m}\geqslant\frac{4\pi^2l^2}{a^2T^2}.$$

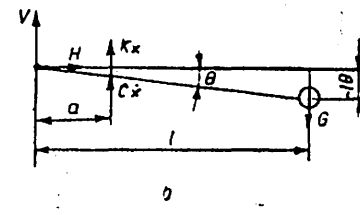
Fig. 19.20.





a

Fig. 19.21.



b

19.23. Să se determine frecvența vibrațiilor naturale a punctului material de masă m în următoarele situații:

a) punctul se deplasează pe dreapta Δ și este fixat de un arc de constantă elastică k, fixat în punctul A, la distanța l de dreapta Δ (fig. 19.22, *a*);

b) punctul se deplasează pe un cerc de rază r (fig. 19.22, *b*)

Indicație și răspuns.

a) Notînd cu F forța elastică, lungimea δl a arcului poate fi aproximată:

$$\delta l=\sqrt{l^2+x^2}-l\approx\frac{x^2}{2l}\ .$$

și energia potențială este:

$$E_p\approx F\frac{x^2}{2l}\ .$$

Sistemul fiind conservativ, din egalarea energiilor potențiale și cinetice maxime (principiul lui Rayleigh) rezultă

$$\omega_n=\sqrt{\frac{F}{ml}}\ .$$

b) Analog,

$$\delta l=\sqrt{r^2+(l+r)^2-2r\,(l+r)\cos\varphi}-l\approx\frac{r\,(l+r)}{2l}\cdot\varphi^2$$

și

$$\omega_n=\sqrt{\frac{F\,(r+l)}{rlm}}\ .$$

19.24. Un disc omogen în formă de semicerc, de masă $M=\frac{G}{g}$, mobil într-un plan vertical, se rostogolește fără să alunece pe un plan orizontal. Să se afle perioada micilor oscilații în jurul poziției de echilibru (fig. 19.23).

Indicații și răspuns. Față de axele *xoy*, coordonatele centrului de greutate G sînt:

$$\xi=-R\theta+\frac{4R}{3\pi}\sin\theta\ ;\quad \eta=R-\frac{4R}{3\pi}\cos\theta.$$

Momentul de inerție al semicercului în raport cu axa perpendiculară pe disc, trecînd prin G, este:

$$J_G=J_C-M\cdot\overline{CG}^2=\frac{G}{g}R^2\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\right).$$

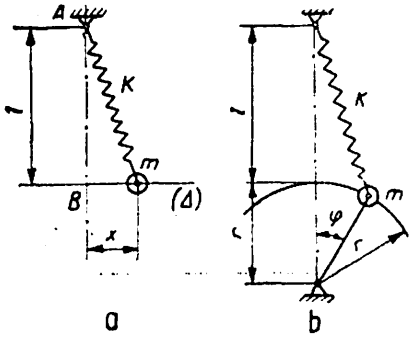


Fig .19.22.

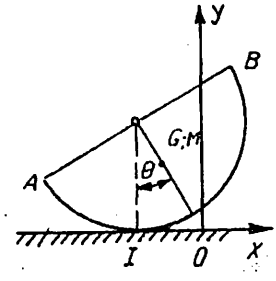


Fig. 19.23.

Discul avînd o mișcare plan paralelă are energia cinetică:

$$E_c=\frac{1}{2}\frac{G}{g}(\dot{x}_G^2+\dot{y}_G^2)+\frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2=\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)\frac{1}{2}\frac{G}{g}R^2\dot{\theta}^2.$$

Energia potențială E_p fiind:

$$E_p=G\left(R-\frac{4R}{3\pi}\cos\theta\right),$$

ecuația micilor oscilații $\frac{d}{dt}(E_c+E_p)=0$, devine:

$$\left(1-\frac{16}{9\pi}\cos\theta\right)\ddot{\theta}+\frac{8}{9\pi}\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2=-\frac{8}{9}\cdot\frac{R}{g}\sin\theta.$$

În jurul poziției de echilibru stabil ($\theta=0$) ecuația se liniarizează, devenind:

$$\left(1-\frac{16}{9\pi}\right)\ddot{\theta}+\frac{8}{9}\frac{g}{R}\theta=0,$$

cu perioada T

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{9\pi-16}{8\pi}\cdot\frac{R}{g}}.$$

19.25. Să se determine pulsațiile naturale ale următoarelor sisteme mecanice:

Răspuns

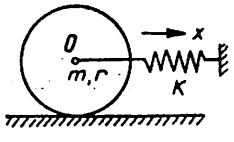


Fig. 19.24. $\omega_n=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}$.

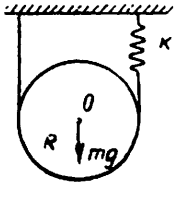


Fig. 19.25. $\omega_n=\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}$.

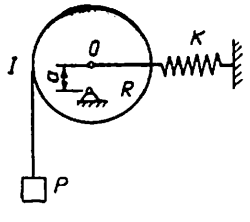


Fig. 19.26. $\omega_n=\sqrt{\frac{ka^2}{\frac{P}{g}R^2+J_0}}$.

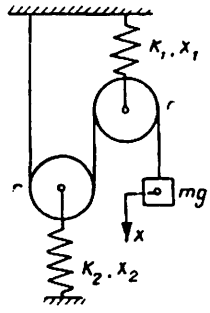


Fig. 19.27.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{4m(k_1+k_2)}}.$$

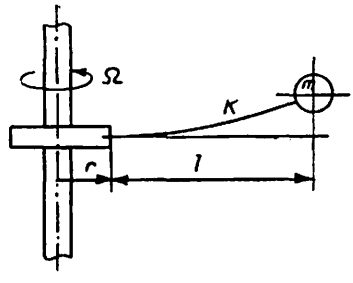


Fig. 19.28.

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega(1+r/l)}, \text{ unde}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}.$$

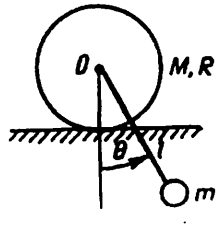


Fig. 19.29.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{3M\frac{r^2}{2} + m(l-r)^2}}.$$

Capitolul 20

DINAMICA CORPURILOR CU MASA VARIABILĂ

A. CONSIDERAȚII TEORETICE

1. **Pînă în prezent,** în aplicarea legii a doua a lui Newton:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}, \qquad (a)$$

s-a presupus că masa este constantă.

Există însă numeroase cazuri, în diferitele domenii ale industriei și tehnicii (fusul pe care se bobinează sau de pe care se debobinează ața, sulul de pînză la războiul de țesut sau sulul de hîrtie, racheta care emană gaze prin ajutaj etc.), sau în natură (planetele pe care cad meteoriți, soarele ce iradiază etc.), cînd masa se schimbă.

2. **Bazele mecanicii corpurilor cu masă variabilă** au fost puse în Rusia, la sfîrșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului al XX-lea, de către *I. V. Meșcerski* (1859—1935) și *K.E. Tiolkovski* (1857—1935). Ulterior s-au ocupat de această problemă și alți cercetători printre care *Levi-Civita*, *Oberth*, *Goddard* etc.

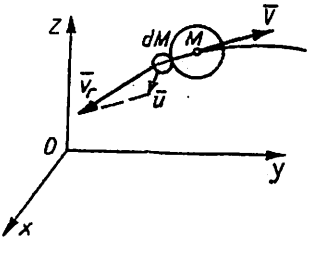
Dinamica corpurilor cu masă variabilă stă la baza studiului mișcării rachetelor.

3. **Dacă un punct cu masă** M, acționat de o serie de forțe exterioare a căror rezultantă este F (fig. 20.1), respinge sau primește particule de masă dM, cu viteza absolută $\bar{u}$, în raport cu un sistem de axe fixe $(xOyz)$, ecuația de mișcare a corpului este:

$$M\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dM}{dt}(\bar{u} - \bar{v}); \qquad (b)$$

numită *ecuația lui Meșcerski*, dedusă în anul 1897.

Fig. 20.1.



4. **Ecuația** (b) mai poate fi scrisă și sub alte forme:

α) Deoarece diferența $(\bar{u} - \bar{v})$ este chiar viteza relativă $\bar{v}_r$ a particulelor desprinse, iar $\left(\frac{dM}{dt}\right)$

este variația în timp al masei, ecuația (*b*) se mai poate scrie sub forma:

$$M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}+\frac{dM}{dt}\bar{v}_r \qquad (b')$$

sau:

$$M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}+\bar{\Phi}_r, \qquad (c)$$

în care $\bar{\Phi}_r=\frac{dM}{dt}\bar{v}_r$ este forța reactivă de scurgere a particulelor desprinse.

β) Grupînd convenabil termenii relației (*b*), se obține forma:

$$\frac{d(M\bar{v})}{dt}=\bar{F}+\frac{dM}{dt}\bar{u}. \qquad (d)$$

5. **Există o serie de cazuri particulare** ale ecuației precedente:

γ) Dacă viteza absolută a particulelor este nulă, atunci ecuația (*d*) revine la forma:

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v})=\bar{F}. \qquad (d')$$

δ) *Dacă viteza relativă* a particulelor desprinse este zero, ecuația (*b'*) devine:

$$M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}, \qquad (d'')$$

o ecuație care formal se scrie ca și ecuația de mișcare a punctului de masă constantă.

6. **În multe probleme practice** se poate admite că viteza relativă a particulelor desprinse este constantă și dirijată după tangenta la traiectoria punctului.

7. **Legea de variație a masei** poate fi liniară:

$$M=M_0(1-\alpha t),$$

ceea ce corespunde unei viteze relative constante la o forță reactivă constantă, sau o lege exponențială:

$$M=M_0e^{-\alpha t},$$

ceea ce corespunde unei mișcări cu o accelerație reactivă constantă.

B. PROBLEME REZOLVATE

20.1. Un corp de masă M variabilă are viteza absolută $\bar{v}$ față de un sistem fix. Să se determine creșterea $d\bar{v}$ a vitezei sale în timpul dt, dacă în acest interval din corp se desprinde o particulă de masă dM, cu viteza absolută $\bar{u}$.

Rezolvare. Asupra sistemului nu acționează forțe exterioare, deci impulsul se conservă în timpul mișcării.

Înainte de desprindere impulsul este:

$$\bar{H}_0 = M\bar{v},$$

iar în momentul desprinderii:

$$\bar{H}_1 = (M - dM)(\bar{v} + d\bar{v}) + dM\bar{u},$$

în care $d\bar{v}$ este creșterea vitezei centrului de masă a corpului.

Din egalitatea impulsurilor, neglijînd produsul factorilor $dM \cdot d\bar{v}$, se deduce:

$$d\bar{v} = \frac{dM}{M}(\bar{v} - \bar{u}).$$

20.2. Să se determine expresia vitezei v, în funcție de x, în cazul unui lanț omogen, de lungime l, care se deplasează, fără frecare, pe un plan înclinat de unghi α (fig. 20.2). Condițiile inițiale sînt: $x=0$ și $v=0$.

Rezolvare. Lanțul fiind întins, rezultă $\bar{v}_r = 0$ și ecuația (b') devine:

$$M\frac{dv}{dt} = F. \qquad (b'')$$

Notînd cu p greutatea specifică a lanțului, relația (b'') se mai poate scrie:

$$\frac{p \cdot l}{g}\frac{dv}{dt} = px \sin\alpha.$$

Cum $v \cdot dt = dx$, rezultă: $v = x\sqrt{\frac{g}{l}\sin\alpha}$.

20.3. Să se determine viteza pe un plan înclinat, bine lustruit, a unui corp de masă M_0 care este legat cu un lanț avînd pe unitatea de lungime masa m. Discuție (fig. 20.3).

Rezolvare. Pentru o deplasare x a corpului, masa totală în mișcare este:

$$M = M_0 + m \cdot x. \qquad (1)$$

În timpul elementar dt, masa totală a corpului M se modifică cu:

$$\frac{dM}{dt} = m\frac{dx}{dt} = m \cdot v. \qquad (2)$$

Cum lanțul care se desfășoară este în repaus, rezultă $\bar{u}=0$, iar forța exterioară care pune lanțul în mișcare este componenta greutății totale a sistemului la un moment dat:

$$X = M \cdot g \cdot \sin\alpha.$$

Fig. 20.2.

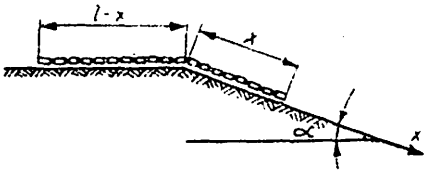
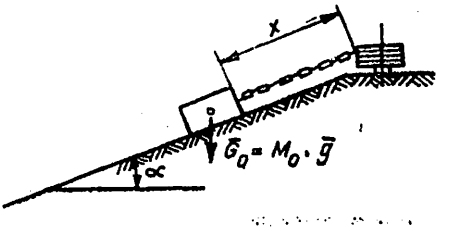


Fig. 20.3.



Ecuația (2) proiectată pe direcția planului devine:

$$M\frac{dv}{dt}+v\frac{dM}{dt}=M\cdot g\cdot\sin\alpha,$$

sau

$$d(M\cdot v)=M\cdot g\cdot\sin\alpha\cdot dt. \tag{3}$$

Ecuația (3) poate fi dedusă direct din ecuația (*d'*), deoarece viteza absolută u a particulei de lanț, înainte de a se desfășura și a se pune în mișcare, este nulă.

Multiplicînd ambele părți ale egalității cu $(M\cdot v)$ și integrînd, se obține:

$$(M\cdot v)\cdot d(M\cdot v)=(M\cdot v)\cdot(M\cdot g\sin\alpha\cdot dt)=M^2\cdot g\cdot\sin\alpha\cdot(v\cdot dt)$$

$$\frac{1}{2}(M\cdot v)^2=\frac{g\cdot\sin\alpha}{m}\int M^2\cdot dM=\frac{g\cdot\sin\alpha}{3m}M^3+C, \tag{4}$$

căci din relația (2), rezultă: $v\cdot dt=dM/m$.

Din condițiile inițiale: $t=0$, $v=0$, $x=0$, se deduce:

$$C=-\frac{1}{3}\frac{M_0^3}{m}g\cdot\sin\alpha,$$

și

$$v^2=\frac{2}{3}\frac{M^3-M_0^3}{m\cdot M^2}g\cdot\sin\alpha=\frac{2}{3m}\frac{(M_0+m\cdot x)^3-M_0^3}{(M_0+m\cdot x)^2}g\cdot\sin\alpha. \tag{5}$$

Discuție. Dacă masa (mx) a lanțului poate fi neglijată în raport cu masa corpului, atunci relația (5) devine după ridicarea nedeterminării:

$$v^2=2g\cdot x\cdot\sin\alpha \tag{5'}$$

ca și pentru corpul de masă constantă.

20.4. Se lansează vertical în sus, cu viteza inițială v_0, un corp de masă M_0, de care este legat un lanț avînd masa m pe unitatea de lungime.

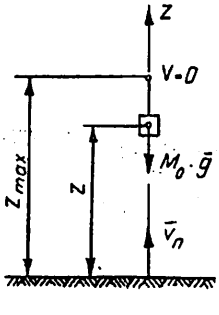
a) Să se calculeze înălțimea maximă h pe care o poate atinge corpul ținînd seamă și de greutatea lanțului și neglijînd rezistența aerului.

b) Discuție, după cum lungimea lanțului este mai mare sau mai mică decît înălțimea maximă.

Rezolvare. a) Mișcarea făcîndu-se pe direcția verticalei, ecuația mișcării devine (fig. 20.4):

$$M\frac{dv}{dt}=-M\cdot g-\frac{dM}{dt}v, \tag{1}$$

Fig. 20.4.



căci $v_r=v$, deoarece masa porțiunii de lanț care se ridică are, înainte de ridicare, viteza nulă.

Masa în mișcare, la un moment dat, este:

$$M=M_0+m\cdot z \tag{2}$$

şi prin derivare:

$$\frac{dM}{dt} = m\frac{dz}{dt} = m \cdot v. \tag{3}$$

Ecuaţia (1) se poate scrie succesiv:

$$M\frac{dv}{dt} + \frac{dM}{dt}v = -M \cdot g; \tag{4}$$

$$d(M \cdot v) = -M \cdot g\, dt. \tag{4'}$$

Înmulţind cu factorul integrant $(M \cdot v)$ şi ţinînd seamă de relaţia (3), rezultă:

$$(M \cdot v)\, d(M \cdot v) = -(M \cdot g)\, M \cdot v dt = -\frac{g}{m} M^2 \cdot dM, \tag{4''}$$

şi prin integrare:

$$\frac{1}{2}(M \cdot v)^2 = -\frac{g}{m}\frac{M^3}{3} + C.$$

În condiţiile iniţiale date, $t=0$, $x=0$, $v=v_0$, rezultă:

$$C = \frac{1}{2}(M_0 \cdot v_0)^2 + \frac{g}{m}\frac{M_0^3}{3}$$

şi

$$\frac{1}{2}(M \cdot v)^2 = \frac{g}{3m}(M_0^3 - M^3) + \frac{1}{2}(M_0 \cdot v_0)^2. \tag{5}$$

Înălţimea maximă h_{max} este atinsă cînd viteza este nulă, deci cînd:

$$M^3 = M_0^3 + \frac{3m}{2g}(M_0 \cdot v_0)^2. \tag{6}$$

Ţinînd seama de relaţia (2), din relaţia (6) se deduce:

$$z_{max} = \frac{M_0}{m}\left(\sqrt[3]{1 + 3\frac{m}{M_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}} - 1\right). \tag{7}$$

Dacă valoarea $\frac{v_0^2}{2g}$ este mică faţă de raportul maselor $\frac{M_0}{m}$, prin dezvoltarea radicalului în serie, luînd în considerare numai doi termeni, se obţine:

$$z_{max} = \frac{M_0}{m}\left[1 + \frac{1}{3}\left(3 \cdot \frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{m}{M_0}\right) + \frac{1}{3 \cdot 4}\left(3\frac{v_0^2}{2g}\frac{m}{M_0}\right)^2 + \ldots\right] \approx \frac{v_0^2}{2g} = h_0, \tag{7'}$$

ceea ce reprezintă înălţimea la care s-ar urca în vid punctul material cu viteza iniţială v_0, neglijînd rezistenţa aerului.

b) Ecuaţia aflată (6) este valabilă numai dacă valoarea maximă de ridicare a lanţului (z_{max}) este mai mică decît lungimea lanţului ataşat. Dacă lungimea (l) a lanţului este mai mică decît lungimea z_{max}, problema se rezolvă în două etape. Se determină mai întîi viteza pe care o are corpul cînd lanţul se ridică

complet de pe sol şi apoi se studiază mişcarea corpului cu masă constantă, egală cu masa corpului dat şi a întregului lanţ.

Făcînd în ecuaţia (5) $z=l$, se obţine viteza corpului v_l în momentul cînd întreg lanţul s-a dezlipit de pe pămînt:

$$\frac{1}{2}[(M_0+m\cdot l)v_l]^2=\frac{g}{3m}[M_0^3-(M_0+m\cdot l)^3]+\frac{1}{2}(M_0\cdot v_0)^2.$$

După dezlipirea lanţului de pe pămînt, întreaga masă a corpului şi lanţului se ridică la înălţimea:

$$H_{max}=\frac{1}{2}\frac{v_l^2}{g}=\frac{\frac{g}{3m}[M_0^3-(M_0+ml)^3]+\frac{1}{2}M_0\cdot v_0^2}{g(M_0+m\cdot l)^2}.$$

20.5. Să se formeze ecuaţia diferenţială a mişcării de ridicare pe verticală a rachetei, admiţînd că viteza relativă v_r a scurgerii de gaze din rachetă este constantă. Se admite că, datorită arderii, masa rachetei se schimbă după o lege de forma $m=m_0f(t)$, iar forţa de rezistenţă a aerului este funcţie de viteza şi poziţia rachetei $R=R(x, \dot{x})$ (*Meşcerski*).

Rezolvare. Ţinînd seamă de faptul că în mişcarea ascendentă toate forţele exterioare sînt rezistente, ecuaţia de mişcare pe verticală dată de relaţia (*b'*) se scrie:

$$m\ddot{x}=-mg-v_r\frac{dm}{dt}-R(x, \dot{x})$$

şi cum $m=m_0f(t)$, rezultă:

$$\ddot{x}=-g-\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot v_r-\frac{R(x, \dot{x})}{m_0f(t)}.$$

20.6. *a*) Să se integreze ecuaţia mişcării din problema precedentă, considerînd că racheta pleacă din repaus şi rezistenţa aerului R este nulă.

b) Să se determine viteza şi înălţimea corespunzătoare a rachetei la momentul t, pentru o lege liniară şi pentru o lege exponenţială de scădere a masei în timp.

Aplicaţie numerică: $v_r=2\,000$ m/s; $\alpha=0{,}01$ s^{-1}; $t=10$; 30; 50 s.

Rezolvare. Ecuaţia de mişcare a rachetei este:

$$m\frac{dv}{dt}=-m\cdot g-\frac{dm}{dt}\cdot v_r. \tag{1}$$

Din relaţia de condiţie $m=m_0f(t)$ rezultă:

$$\frac{dm}{dt}=m_0f'(t), \tag{2}$$

Ţinînd seamă de relaţia (2), ecuaţia (1) devine succesiv, după împărţirea cu m:

$$\frac{dv}{dt}=-g-\frac{f'(t)}{f(t)}\cdot v_r; \tag{2'}$$

$$\frac{dv}{dt}=-g-v_r\frac{d}{dt}\cdot\ln f(t). \tag{2''}$$

Integrînd ecuația (2'') de două ori și ținînd seamă de condițiile inițiale date: $t=0$, $v_0=0$ și $s_0=0$, rezultă:

$$v=-gt-v_r\cdot\ln f(t); \tag{3}$$

$$s=-\frac{1}{2}gt^2-v\int_0^t \ln f(t)\,dt. \tag{4}$$

(b) (1) În cazul particular al unei legi liniare de variație a masei în timp, $f(t)=1-\alpha t$, relația (3) devine:

$$v=-gt-v_r\cdot\ln(1-\alpha t). \tag{3'}$$

Pentru determinarea deplasării, trebuie calculată valoarea integralei $I=\int \ln f(t)\,dt$:

$$I=\int \ln f(t)\,dt=-\frac{1}{\alpha}\cdot\int \ln(1-\alpha t)\,d(1-\alpha t)=-\frac{1}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)-(1-\alpha t)]+C.$$

Din condițiile inițiale ($t=0$, $y=0$), rezultă $C=-\frac{1}{\alpha}$ și deci:

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+\frac{v_2}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-t)+\alpha t]. \tag{4'}$$

Pentru aplicația numerică dată, rezultă:

$$v(10)=112{,}62\ \text{m/s};\ v(30)=419{,}04\ \text{m/s};\ v(50)=896{,}20\ \text{m/s};$$

$$s(10)=0{,}54\ \text{km};\ s(30)=5{,}65\ \text{km};\ s(50)=18{,}40\ \text{km}.$$

(2) În cazul unei legi exponențiale $f(t)=e^{-\alpha t}$, ecuațiile (3) și (4) devin:

$$\begin{aligned} v&=-gt+v_r\alpha t;\\ s&=(\alpha v_r-g)\,t^2/2. \end{aligned} \tag{3'}$$

În cazul aplicației, rezultă:

$$v(10)=111{,}90\ \text{m/s};\ v(30)=315{,}70\ \text{m/s};\ v(50)=509{,}90\ \text{m/s};$$

$$s(10)=0{,}5095\ \text{Km};\ s(30)=4{,}5495\ \text{Km};\ s(50)=12{,}7375\ \text{Km}.$$

20.7. O rachetă, a cărei masă variază după o lege exponențială, este lansată vertical. Neglijînd rezistența aerului și admițînd că viteza rachetei la suprafața pămîntului este nulă, iar încărcătura rachetei a ars în timpul t_0, să se determine:

a) înălțimea maximă la care se poate ridica racheta;

b) valoarea lui α, care dă valoarea maximă posibilă (s_{max}) de înălțare a rachetei.

Rezolvare

Spațiul parcurs de rachetă poate fi descompus în două părți: o parte activă s_a, corespunzătoare timpului cît durează arderea întregii cantități de combus-

tibil și o parte s_p, cînd racheta se deplasează ca și un corp de masă constantă M_c, cu viteza avută la sfîrșitul perioadei de ardere:

$$s=s_a+s_p. \tag{1}$$

La sfîrșitul perioadei de ardere a combustibilului viteza rachetei și spațiul corespunzător sînt date de relațiile (3') și (4') din problema precedentă (20.6):

$$\begin{aligned} v_a&=t_a(\alpha v_r-g);\\ s_a&=\frac{t_a^2}{2}(\alpha v_r-g). \end{aligned} \tag{1'}$$

Cum spațiul parcurs de rachetă în perioada a doua este $s_p=\frac{v_a^2}{2g}$, rezultă că înălțimea maximă la care se urcă racheta va fi:

$$s_{max}=s_a+s_p=\frac{1}{2}t_a^2(\alpha v_r-g)+\frac{v_a^2}{2g}=\frac{t_a^2}{2g}\alpha v_r(\alpha v_r-g). \tag{2}$$

b) Pentru a determina valoarea parametrului α, care dă valoarea maximă posibilă de înălțare a rachetei, se exprimă spațiul s parcurs de rachetă și dat de relația (2) în funcție de valoarea parametrului α.

Deci:

$$s=\alpha v_r(\alpha v_r-g)\frac{k^2}{2g\alpha^2}=\frac{k^2}{2g}\left(v_r^2-\frac{v_rg}{\alpha}\right).$$

Valoarea maximului are loc pentru:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{k^2\cdot v_r}{2}\frac{1}{\alpha^2}=0;\quad \alpha=\infty.$$

Deci înălțimea maximă se obține pentru $\alpha=\infty$, ceea ce ar corespunde unei arderi instantanee a rezervei de combustibil, cînd înălțimea maximă dată de relația (2) devine:

$$s_{max}=\frac{k^2}{2g}\cdot v^2,$$

Timpul de ardere, t_a, al încărcăturii se poate obține din legea exponențială de variație a masei:

$$M=M_0e^{-\alpha t}, \tag{3}$$

în care, după arderea încărcăturii, masa rachetei se reduce la masa M_c a corpului gol al rachetei:

$$M_c=M_0e^{-\alpha t_a}, \tag{3'}$$

de unde:

$$t_a=\frac{1}{\alpha}\cdot\ln\frac{M_0}{M_c} \tag{3''}$$

și notînd $k=\ln\frac{M_0}{M_c}$ avem $t_a=\frac{k}{\alpha}$.

20.8. O rachetă lansată vertical cu viteza v_0 are masa inițială m_0 și capătă o mișcare uniform accelerată cu accelerația a. Să se scrie ecuația ce determină variația relativă a masei $\frac{dm}{m}$ în funcție de timp și să se calculeze legea de variație a masei dacă:

1) $v_0=0$, 2) $a=0$

Se cunoaște viteza relativă a gazelor v_r, raza R a pământului și se ține seama de variația greutății cu înălțimea.

Rezolvare.

Ecuația de mișcare a rachetei este:

$$ma=-mg-v_r\frac{dm}{dt}. \tag{1}$$

Variația accelerației gravitației g cu înălțimea h este dată de relația:

$$g=g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}, \tag{2}$$

unde g_0 este accelerația gravitațională la suprafața pământului.

Mișcarea rachetei fiind uniform accelerată, rezultă că:

$$h=v_0t+\frac{at^2}{2}. \tag{3}$$

Ținînd seama de relațiile (2) și (3), ecuația (1) devine:

$$a=-g_0\frac{R^2}{\left(R+v_0t+\frac{at^2}{2}\right)^2}-\frac{v_r}{m}\frac{dm}{dt}, \tag{4}$$

de unde rezultă ecuația cerută:

$$\frac{dm}{m}=-\frac{a}{v_r}dt-\frac{g_0}{v_r}\frac{R^2dt}{\left(R+v_0t+\frac{at^2}{2}\right)^2}. \tag{5}$$

Integrarea ecuației (5) în cazul general se poate efectua în principiu cu ușurință, descompunînd numitorul $\left(R+v_0t+\frac{at^2}{2}\right)^2$ în fracții simple:

1) În cazul particular în care $v_0=0$, relația (5) ne dă:

$$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}=-\int_0^t\frac{a}{v_r}dt-\frac{g_0R^2}{r}\int_0^t\frac{dt}{(R+at^2/2)^2}. \tag{6}$$

În calculul acestei expresii se ține seama de integrala cunoscută:

$$\int_0^x\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

În final se ajunge la o variație exponențială de forma:

$$m=m_0e^{-\alpha t},$$

unde:

$$\alpha=\frac{a}{v_r}t+\frac{ag_0}{4R^2v_r}\left[\frac{at}{4R^2+a^2t^2}+\frac{1}{R}\operatorname{arctg}\frac{at}{2R}\right].$$

2) Dacă $a=0$, mișcarea rachetei este uniformă, cu viteza v_0, iar relația (5) devine:

$$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}=-\frac{g_0R^2}{r}\int_0^t\frac{dt}{(R+v_0t)^2},$$

și se obține:

$$m=m_0e^{\frac{g_0R^2}{v_rv_0(R+v_0t)}}.$$

20.9. O rachetă împreună cu combustibilul său are masa inițială m_0. Combustibilul arde cu o viteză constantă ($dm/dt=C$), iar gazele rezultate au o viteză relativă v_r constantă. Neglijînd rezistența aerului să se găsească viteza rachetei la timpul t.

Rezolvare.

Considerînd deplasarea rachetei pe verticală și ținînd seama că $C=dm/dt$, ecuația de mișcare este:

$$\frac{dv}{dt}=-g-\frac{v_r}{m}\cdot C. \tag{1}$$

Masa m a rachetei și a combustibilului rămas la timpul t este:

$$m=m_0-ct, \tag{2}$$

deci ecuația de mișcare devine:

$$\frac{dv}{dt}=-g\frac{v_rC}{m_0-ct}. \tag{3}$$

Prin integrarea ecuației (3), obținem viteza cerută la timpul t:

$$v=-gt-v_r\cdot\ln\frac{m_0}{m_0-ct}. \tag{4}$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

20.10. Să se rezolve problema precedentă pentru o deplasare orizontală a rachetei, ținînd seama de rezistența R a aerului, care variază după legile: *a*) $R=kv^2$ și *b*) $R=kv$.

Indicație și răspuns.
Deoarece deplasarea se efectuează pe orizontală, ecuația de mișcare este dată de

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_r}{m} C - \frac{R}{m}, \tag{1}$$

sau, ținînd seama de relația (2) din problema 20.9, avem:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_r C}{(m_0 - ct)} - \frac{R}{(m_0 - ct)}. \tag{2}$$

În cazul în care $R = kv^2$, se obține prin integrare ecuația (2):

$$v = \sqrt{\frac{Cv_r}{R}} \frac{\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right)^{2\sqrt{\frac{kv_r}{C}}} - 1}{\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right)^{2\sqrt{\frac{kv_r}{C}}} + 1}.$$

Dacă $R = kv$, căpătăm:

$$v = \frac{Cv_r}{k}\left[1 - \left(\frac{m_0 - ct}{m_0}\right)^{\frac{k}{C}}\right].$$

20.11. Să se determine legea de variație a masei unei rachete care se ridică pe verticală cu accelerația constantă a. Masa inițială a rachetei este m_0, iar viteza relativă a gazelor este v_r. Se consideră că mișcarea are loc în vid și în cîmp gravitațional constant.
Indicație și răspuns.
Se folosește ecuația de mișcare a unei rachete (vezi problema 20.7) care prin integrare ne dă:

$$m = m_0 e^{-\frac{a+g}{v_r} t}.$$

20.12. Un vagonet care coboară pe un plan înclinat de unghi β se umple cu bucăți de cărbune ce au viteza absolută nulă. După ce legea trebuie să varieze masa vagonetului pentru ca acesta să se miște uniform cu viteza v, dacă se cunoaște coeficientul μ de frecare la alunecare?
Indicație și răspuns.
Ținînd seama de accelerația $a = g(\sin\beta - \mu\cos\beta)$ pe care o capătă vagonetul și de ecuația sa de mișcare, rezultă:

$$m = m_0 \cdot e^{-\frac{g(\sin\beta - \mu\cos\beta)t}{v}}.$$

20.13. Un corp care se deplasează pe verticală, plecînd din repaos de la suprafața pămîntului, are o masă variabilă în timp după legea $m = m_0 e^{-\alpha t}$. Cunoscînd viteza constantă v_r de scurgere a gazelor, să se determine legea de variație a vitezei sale v cu distanța h dintre corp și centrul pămîntului. Se consideră variația gravitației cu înălțimea și se neglijează rezistența aerului.

Indicație și răspuns.

Se folosește ecuația de mișcare a corpului în care $\frac{dm}{dt}=-\alpha m_0 e^{-\alpha t}$ și relația evidentă $\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$. Prin integrare, ținînd seama de condițiile inițiale, rezultă:

$$v=\sqrt{2\alpha v_r (h-R)+2gR^2\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{R}\right)},$$

unde R este raza pămîntului.

20.14. Să se scrie ecuația de mișcare a unui pendul de lungime l și masă variabilă, $m=m(t)$ dacă rezistența mediului este proporțională cu viteza sa unghiulară ($R=-\beta\dot{\varphi}$).

Indicație și răspuns.

Ținînd seama de forța care acționează asupra pendulului, ecuația de mișcare (b') devine:

$$\ddot{\varphi}+\frac{\beta}{m}\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$$

20.15. Să se scrie ecuația de mișcare a pendulului din problema precedentă, dacă el este alcătuit dintr-o sferă de rază și masă inițială r_0, respectiv m_0, dacă masa corpului crește proporțional în unitatea de timp cu suprafața sferei $\left(\frac{dm}{dt}=\alpha S\right)$.

Indicație și răspuns.

Folosind rezultatul problemei precedente, se obține:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\frac{3}{\tau}\cdot\frac{d\varphi}{d\tau}+\frac{gr_0^2}{lk^2}\varphi=0,$$

unde

$$\tau=1+\frac{k}{r_0}t;\quad k=\frac{4\pi r_0^3}{3m_0}\alpha.$$

Capitolul 21

PROBLEME RECAPITULATIVE

21.1. Troliul unei maşini de ridicat este acţionat de un electromotor prin intermediul unui angrenaj cu roţi dinţate (fig. 21.1). Rapoartele de transmisie dintre roţi sînt $k_1=k_2=5$. Momentele de inerţie ale părţilor rotitoare în raport cu axele lor sînt:

$$J_1=2{,}5\ \text{kg m}^2;\quad J_2=2\ \text{kg m}^2;\quad J_3=10\ \text{kg m}^2.$$

Sarcina de ridicat, în greutate de $4{,}10^4$ N, este acţionată de un scripete mobil, al cărui moment de inerţie faţă de axa de rotaţie este $J_4=0{,}5\ \text{kg m}^2$. Raza troliului, de 0,3 m, este egală cu raza scripetelui. Neglijîndu-se greutatea cablului şi frecările, să se determine:

a) timpul în care sarcina capătă o viteză de 24 m/min, ştiind că acceleraţia este constantă şi egală cu 0,1 m/s²;

b) cuplul motor corespunzător perioadei de pornire şi pe timpul cînd sarcina este ridicată cu o viteză constantă (mişcare de regim);

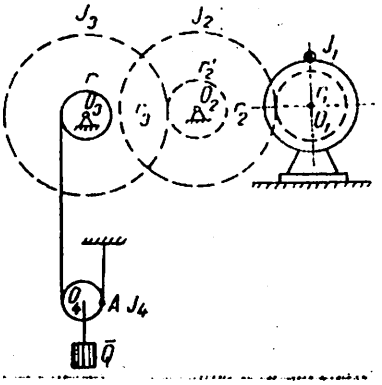
c) puterea motorului în ambele cazuri, precum şi turaţia în mişcarea de regim;

d) distanţa pe care o va mai parcurge sarcina dacă s-a întrerupt curentul electromotorului, atunci cînd sarcina este la 4,4 m înălţime faţă de punctul de pornire;

e) curbele de variaţie ale vitezei unghiulare a electromotorului, ale vitezei sarcinii, ale cuplului motor şi ale puterii electromotorului în funcţie de timp;

f) tensiunea la care se va dimensiona cablul.

Fig. 21.1.



Indicaţie şi răspuns

a) $h=\frac{1}{2}at^2$; $v=at$ $\quad[t=4\ \text{s}]$.

unde v şi a sînt viteza şi acceleraţia mişcării.

b) Valoarea cuplului motor C_m este:

$$C_m=\frac{Qr}{2k^2}+\frac{a}{r}\left(\frac{ar^2}{2k^2g}+2J_1k^2+2J_2+\frac{2J_3}{k^2}+\frac{J_4}{2k^2}\right).$$

Pentru valorile numerice date, cuplul motor în perioada de pornire este $C_m = 285{,}7$ N·m, iar în mişcarea de regim ($a=0$), devine:

$$C_m = \frac{Qr}{2k^2} = 240 \text{ N·m.}$$

c) La pornire puterea este:

$$P_m = C_m \frac{2k^2}{r} v; \quad [P_m = 4{,}76t \text{ kw}]$$

iar la sfîrşitul perioadei de pornire $P_m = 19{,}04$ Kw.

d) La întreruperea curentului electromotorului, mişcarea sarcinii este uniform întîrziată, acceleraţia deducîndu-se din expresia de la punctul (*b*) pentru $C_m = 0$.

e) Curbele *n*, *v*, C_m şi P_m în funcţie de timp sînt arătate în figura 21.2.

f) $T = 2{,}02 \cdot 10^4$ N.

21.2. O turbină acţionează un alternator prin cuplare directă, turaţia de regim fiind de 1 200 rot/min. Momentul de inerţie J al grupului în rotaţie este de 3 200 kg m². Caracteristica $C_m(\omega) = \frac{b}{\omega}$ a maşinii motoare este o hiperbolă; caracteristica $C_r(\omega)$ a alternatorului este o dreaptă $C_r = a\omega$. Pentru turaţia de 2 000 rot/min, $C_r = 1{,}54 \cdot 10^4$ N·m. Se cere:

a) puterea efectivă a turbinei pentru turaţia de regim;

b) să se traseze curbele $C_m(\omega)$ şi $C_r(\omega)$;

c) timpul necesar de la pornire pînă la atingerea turaţiei de regim şi a unei proporţii de 99% din această turaţie;

d) numărul de ture efectuat de grup pînă la atingerea proporţiei de 99% din turaţia de regim;

e) ce se întîmplă atunci cînd sarcina alternatorului scade brusc la zero? Care este turaţia după 10 s de la descărcarea bruscă a alternatorului?

Indicaţii şi răspuns

a) $P_m = C_m\omega$; $[P_m = 206{,}66$ Watt].

b) — dreapta $C_r = a\omega = 7{,}35\ \omega$

— hiperbola $C_m = \frac{b}{\omega} = \frac{116 \cdot 200}{\omega}$

reprezentate în figura 21.3.

Fig. 21.2.

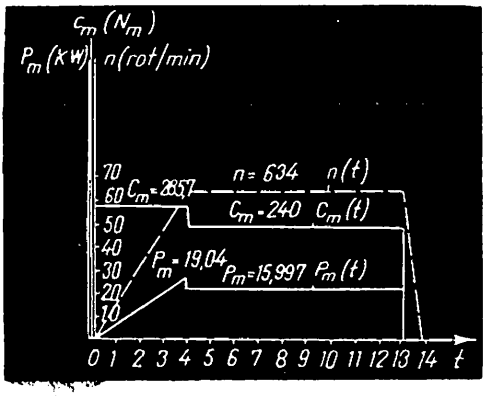
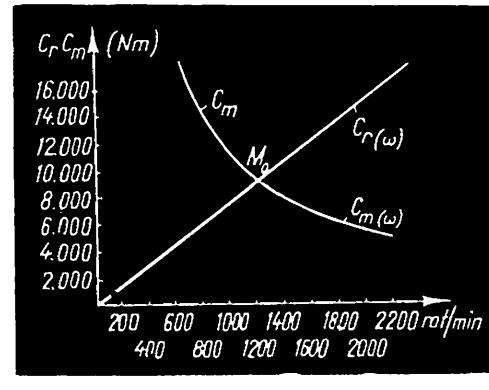


Fig. 21.3.



c) $t=\frac{J}{2a}\ln\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$; $[t=85\text{ s}]$.

d) $\theta=\int_0^1\omega dt=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{J}{a}\omega_1+\frac{J}{2a}\omega_0\ln\frac{\sqrt{ab}+a\omega_1}{\sqrt{ab}-a\omega_1}\right]$; $\theta=9\,050$ rad

numărul de ture $N=\frac{\theta}{2\pi}=1\,440$.

e) $\omega=\sqrt{2\frac{b}{J}t+\omega_0^2}$.

Pentru valorile numerice ale problemei se obține:

$$\omega=148{,}3\text{ rad/s}\quad\text{și}\quad n=1\,417\text{ rot/min.}$$

Variația vitezei în funcție de timp este arătată în figura 21.4.

21.3. Rotorul unui alternator, în greutate de $2\cdot10^4$ N, este fixat la mijlocul unui arbore, având diametrul de $d=140$ mm (fig. 21.5).

Arborele este susținut în două lagăre A și B. Distanța dintre axele lagărelor este $l=1{,}60$ m. Arborele este din oțel ($E=2\cdot2{,}10^{11}$ N/m^2). Știind că între centrul de greutate al rotorului și axa de rotație există o excentricitate $e=2$ mm, să se determine:

a) săgeata arborelui în timpul rotirii;

b) turația critică, pentru care săgeata devine infinită;

c) să se traseze curba de variație a săgeții în funcție de raportul pulsațiilor;

d) reacțiunile în lagăre, atunci când arborele se rotește cu 600 rot/min.

Indicație și răspuns

a) săgeata v a arborelui este:

$$v=\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}e;\quad\text{unde}\quad\gamma=\frac{p}{\omega_n};\quad\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) turația critică n_0 este:

$$n_0=\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{48EI_z}{l^3}};\quad[n_0=1\,478\text{ rot/min}].$$

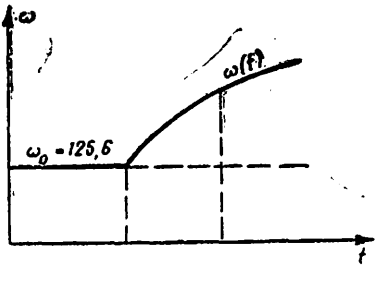


Fig. 21.4.

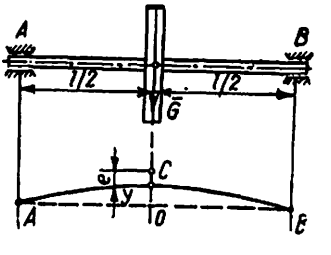


Fig. 21.5.

c) curba de variație a săgeții în funcție de raportul pulsațiilor este reprezentată în figura 21.6. Se observă că la turații foarte mari în raport cu turația critică, arborele poate deveni perfect centrat.

d) În repaus:

$$R_A = R_B = 10\,975 \text{ N},$$

iar în stare dinamică:

$$R'_A = R'_B = 20\,588{,}5 \text{ N}.$$

21.4. Un vagon de tramvai, avînd greutatea $G = 1{,}2 \cdot 10^5$ N, se deplasează pe un drum orizontal cu viteza $v = 27$ km/h. Pentru a se opri vagonul, se acționează frîna, astfel încît sabotul apasă asupra roții cu o forță $P' = 8\,000$ N. Coeficientul de frecare dintre sabot și bandajul roții $\mu = 0{,}25$, iar coeficientul de frecare dintre roată și șină $\mu_0 = 0{,}16$.

a) considerînd coeficienții de frecare independenți de viteză, neglijînd greutatea roților și rezistența aerului, să se determine accelerația vagonului și distanța ce o mai parcurge pînă la oprire. Să se traseze diagrama mișcării;

b) care este forța necesară blocării roților și distanța ce o va străbate tramvaiul pînă la oprire, atunci cînd alunecă pe șină;

c) cu cît se vor reduce distanțele determinate la punctele *a*) și *b*) dacă se consideră și rezistența aerului $R = kSv^2$, unde secțiunea tramvaiului $S = 6$ m^2 și $k = 0{,}08$?:

d) Să se determine distanța ce o va parcurge vagonul prin patinare pînă la oprire, în cazul cînd coeficientul de frecare dintre roată și șină nu mai este constant, ci variază cu viteza:

$$\mu_0 = \frac{0{,}18}{1 + 0{.}01\, v};$$

e) în cazul cînd vagonul motor are o remorcă cu aceeași greutate ($G = 1{,}2 \cdot 10^5$ N), legată printr-un sistem de două arcuri identice în serie, a căror constantă este $K = 3 \cdot 10^6$ N/m, să se determine accelerația și distanța ce o mai parcurge vagonul motor pînă la oprire, roțile nefiind blocate.

Indicație și răspuns

a) Vagonul are o mișcare rectilinie uniform întîrziată (fig. 21.7):

b) Forța totală P_1 necesară blocării celor patru roți este:

$$P_1 \geqslant 76\,800 \text{ N}.$$

Fig. 21.6.

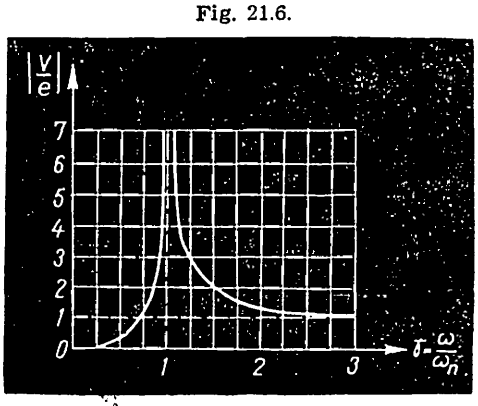
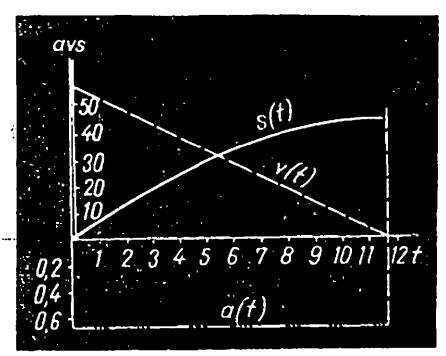


Fig. 21.7.



Spațiul parcurs pînă la oprire este:

$$s_1=17{,}9 \text{ m}.$$

c) Din ecuația mișcării, ținînd seama și de rezistența aerului,

$$\ddot{x}=-\mu g\frac{P}{g}-kg\frac{Sv^2}{G},$$

se obține $s_3=17{,}65$ m.

d) Din ecuația de mișcare:

$$\dot{v}=-\frac{0{,}18}{1+0{,}01\,v}g$$

rezultă $t=4{,}4$ s, iar spațiul s_1 parcurs pînă la oprire $s_1=16{,}7$ m.

e) Izolînd vagoanele, forțele care acționează asupra fiecărui vagon în parte sînt marcate pe figura 21.8.

Notînd respectiv cu x_1 și cu x_2 deplasările celor două vagoane ($x_2>x_1$), comprimarea arcurilor de la tampoane va fi:

$$x'=x_2-x_1, \tag{1}$$

Arcurile fiind montate în serie, iar constanta elastică al fiecărui arc fiind $\frac{k}{2}$ ecuația mișcării vagonului motor este:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}=-F-\frac{k}{2}(x_1-x_2), \tag{2}$$

iar a vagonului remorcă:

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2}=-\frac{k}{2}(x_2-x_1). \tag{3}$$

Din ecuațiile (2) și (3), se obține:

$$m\frac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2}=-K(x_2-x_1)+F; \tag{4}$$

$$m\frac{d^2(x_2+x_1)}{dt^2}=-F. \tag{5}$$

Cu notația (1), ecuația (4) devine:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}+Kx'=F,$$

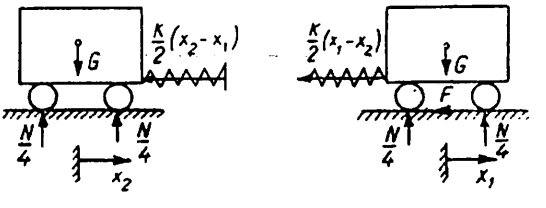
cu soluția:

$$x'=C_1\sin\sqrt{\frac{K}{m}}t+C_2\cos\sqrt{\frac{K}{m}}t+\frac{F}{K}. \tag{6}$$

Din condițiile inițiale $t=0$; $x'=x_2-x_1=0$, rezultă constantele de integrare:

$$C_1=0;\quad C_2=-\frac{F}{K},$$

Fig. 21.8.



de unde:

$$x_2-x_1=x'=\frac{F}{K}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)\right]. \tag{7}$$

Soluția ecuației diferențiale (5) este:

$$x_2+x_1=-\frac{F}{2m}t^2+2v_0t. \tag{8}$$

Din relațiile (7) și (8), se obțin spațiile x_1 și x_2 și apoi vitezele v_1 și v_2 ale celor două vagoane (9, 10):

$$v_1=v_0-\frac{F}{2m}t-\frac{F}{2K}\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\sqrt{\frac{K}{m}}\,t; \tag{9}$$

$$v_2=v_0-\frac{F}{2m}t+\frac{F}{2K}\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\sqrt{\frac{K}{m}}\,t. \tag{10}$$

Întrucît la oprirea vagonului motor $v_1=0$, din ecuația (9) se poate deduce timpul de oprire t:

$$v_0-\frac{F}{2m}t-\frac{F}{2K}\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\sqrt{\frac{K}{m}}\,t=0, \tag{11}$$

Cu datele problemei, ecuația devine:

$$7{,}5-0{,}338\,t=0{,}0209\sin(15{,}66\,t),$$

ecuație ce se poate rezolva grafic, căutînd punctul de intersecție al dreptei $y_1=7{,}5-0{,}338\,t$ cu sinusoida $y_2=0{,}0209\sin(15{,}66\,t)$.

Perioada de oscilație a arcului este:

$$T=\frac{2\pi}{15{,}66}=0{,}4\text{ s}.$$

Pe cale grafică, la intersecția curbelor, se deduce:

$$t=22{,}25\text{ s},$$

iar distanța pînă la locul de oprire al vagonului motor:

$$x=83{,}22\text{ m}.$$

Rezultatele obținute sînt înscrise în tabela 21.1.

Discuție asupra mișcării vagoanelor *Tabela 21.1*

	Natura mișcării	Coeficientul de frecare	Rezistența aerului	Distanța (m)
Un singur vagon	Rulare	$\mu=const$	$R=0$	42,94
		$\mu=const$	$R=kSv^2$	40,00
	Alunecare	$\mu_0=const$	$R=0$	17,90
		$\mu_0=const$	$R=kSv^2$	17,65
		$\mu_0=\frac{0{,}18}{1+0{,}01\,v}$	$R=0$	16,70
Două vagoane	Rulare	$\mu=const$	$R=0$	83,22

21.5. Un avion în greutate de $3 \cdot 10^4$ N, din care roţile reprezintă 5%, are o suprafaţă frontală de 20 m^2. Elementele geometrice ale avionului (fig 21.9) sînt: a=25 cm; l=720 cm; b=10 cm; c=5 cm; raza roţilor R=30 cm; raza axului roţilor r=4 cm Avionul este prevăzut cu o elice cu două pale, avînd fiecare greutatea G_1=150 N, iar centrul de greutate al unei pale se găseşte la 60 cm de ax.

a) Rezistenţa aerului fiind proporţională cu pătratul vitezei:

$$R = \frac{\rho}{2} C_x S v^2, \quad \text{în care} \quad C_x = 0{,}05,$$

să se determine puterea motorului pentru a putea avea în vecinătatea solului o viteză de 100 m/s. Randamentul elicei η=0,8.

b) Să se calculeze forţa portantă F_T şi forţa din ampenaj (F_A).

c) Să se determine viteza limită de picaj pe verticală cu motorul stins şi timpul în care se obţine această viteză.

d) De la ce altitudine trebuie să coboare avionul în picaj pe verticală pentru a atinge viteza limită de picaj?

e) Avionul venind la aterisaj cu viteza de 80 m/s, stingînd motorul, ce distanţă trebuie să parcurgă în zbor orizontal pînă la începerea rulării pe roţi, în cazul cînd viteza în momentul rulării nu trebuie să depăşească 35 m/s? Avionul are un vînt din faţă, acţionînd cu o forţă constantă de 500 N.

f) Care este spaţiul parcurs prin rulare pe sol cu cele trei roţi, ştiind că există atît o frecare de rostogolire (s=0,2 cm), cît şi o frecare a roţilor în ax (u=0,1)?

g) Să se determine momentul de răsucire din axul elicei şi valoarea forţei care tinde să rupă palele elicei, atunci cînd ea se roteşte cu 2 000 rot/min.

Răspuns

a) $P_{[CP]} = \frac{SC_x v^3}{2\eta}$; $[P = 754{,}4 \text{ kW}]$

b) $F_T = R = \frac{\rho}{2} SC_x v^2$; $[F_T = 6\,150 \text{ N}]$

c) $v_{lim} = \sqrt{\frac{2G}{\rho SC_x}}$; $[v_{lim} = 220{,}9 \text{ m/s}]$

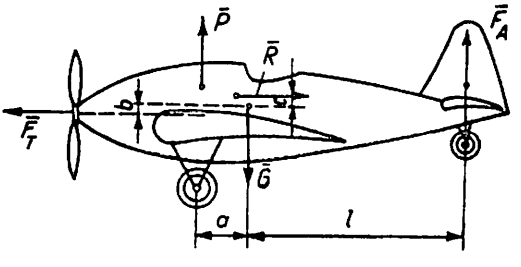
d) $h = \frac{G}{2gk} \ln \frac{G}{G - kv^2}$; $[h = 9\,700 \text{ m}]$

e) $x = \frac{G}{2gk} \ln \frac{F_v + kv_0^2}{F_v + kv^2}$; $[x = 3\,085 \text{m}]$

f) $x = \frac{105}{200} \cdot \frac{G}{gk} \ln \frac{B + kv_0^2}{B}$; $[x = 1\,326 \text{ m}]$

unde $B = F_v + \frac{G(s + \mu r)}{R}$ $[B = 1\,100 \text{ N}]$

Fig. 21.9.



g) $M_t = 716{,}2\frac{P}{n}$; $P_t = 2\,879{,}58$ N·m

$F_c = \frac{G_1}{g} r\omega^2$; $F_c = 3{,}945 \cdot 10^6$ N.

21.6. O rachetă interplanetară, de masă m, este aruncată de pe pămînt cu viteza inițială v_0, sub unghiul α față de orizontala locului. Pămîntul, de rază R, fiind considerat fix, iar rezistența aerului nulă, se cere:

a) să se arate că mișcarea este plană;

b) să se determine viteza inițială a rachetei, astfel încît racheta să iasă de sub influența atracției pămîntului;

c) să se scrie ecuația diferențială a mișcării rachetei sub acțiunea forței centrale de atracție universală;

d) să se determine ecuația traiectoriei rachetei.

Indicații și răspuns

a) Se aplică teorema momentului cinetic în raport cu punctul 0 (fig. 21.10);

b) Prin aplicarea teoremei energiei rezultă $v_0 \geqslant \sqrt{2gR} \approx 11$ km/s;

c) Se obține ecuația Binet;

d) Ecuația traiectoriei este o conică avînd în coordonate polare ecuația:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_1)},$$

unde p, e, θ_1 sînt constantele de integrare. După cum $e>1$; $e<1$ sau $e=1$ traiectoria este o hiperbolă, o elipsă sau o parabolă. Pentru $e=0$, traiectoria este un cerc.

21.7. La un motor monocilindric vertical, greutatea manivelei este de 420 N, greutatea bielei este de 600 N, greutatea pistonului, a tijei lui și a capului de cruce este de 1 000 N (fig. 21.11). Cursa pistonului $s=2r=0{,}40$ m; lungimea bielei $l=1{,}00$ m; C centrul de greutate al bielei; $b=0{,}16$ m; $c=0{,}40$ m. Turația de regim a manivelei $n_e=250$ rot/min, greutatea șasiului și a fundației $P=3{,}2\cdot 10^5$ N.

Cînd pistonul se găsește în punctul mort superior, asupra lui acționează presiunea gazelor $p' = 7\cdot 10^5$ N/m², care se presupune că scade liniar cu deplasarea pistonului, ajungînd pînă la $p'' = 2\cdot 10^5$ N/m², în momentul cînd pistonul se găsește în punctul mort inferior. Din acest moment începe evacuarea gazelor arse. Pe fața posterioară a pistonului presiunea este $p_0 = 1$ N/m². Diametrul pistonului $d = 0{,}30$ m.

Fig. 21.10.

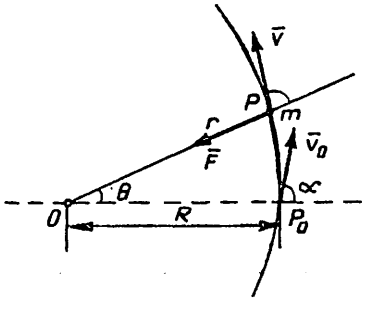
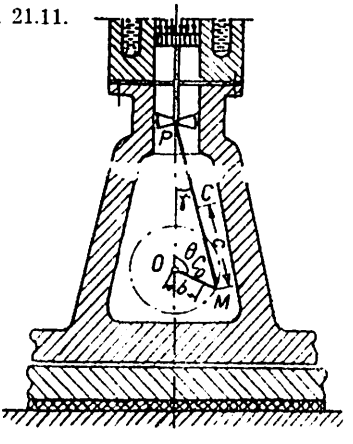


Fig. 21.11.



a) Să se traseze, în raport cu timpul, diagramele de variaţie ale vitezei şi acceleraţiei capului de cruce;

b) Să se determine mărimea cuplului C_m care tinde să rotească manivela şi să se traseze diagrama lui de variaţie în perioada de expansiune ($0<\theta<\pi$) şi de evacuare a gazelor ($\pi<0<2\pi$).

c) Să se calculeze energia cinetică totală a sistemului bielă-manivelă.

d) Pentru simplificarea calculului dinamic al sistemului bielă-manivelă se poate echivala biela cu două mase plasate la capetele ei. Să se determine valoarea acestor două mase echivalente şi eroarea ce se face în urma acestei simplificări.

e) Să se arate mijlocul prin care se pot echilibra forţele de inerţie, pentru a nu avea eforturi în axul manivelei.

f) Fundaţia motorului, avînd suprafaţa $A=10$ m^2, este aşezată pe un strat de plută de 60 mm grosime, avînd caracteristica de elasticitate arătată în diagrama din figura 21.12. Să se calculeze amplitudinea vibraţiilor şi mărimea forţei transmisă planşeului.

Indicaţii şi răspuns

a) Folosind expresiile vitezei şi acceleraţiei date de problema 10.11 unde $A_2=0{,}202$; $\frac{1}{\lambda}=5$ şi se obţine:

$$[\omega_e=26{,}17\ \mathrm{s}^{-1}]. \qquad \text{(fig. 21.13).} \tag{1}$$

b) $$C_m=Fr\left(\sin\theta+\frac{\lambda\sin 2\theta}{2-\lambda^2\sin^2\theta}\right). \qquad \text{(fig. 21. 14).} \tag{2}$$

c) $$E=\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\left[J_0+J_B\left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}}\right)^2+\frac{G_p}{g}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{\theta}}\right)^2+\frac{G_B}{g}\left(\frac{\dot{x}_c}{\dot{\theta}}\right)^2\right] \tag{3}$$

unde elementele mecanice se află pe figura 21.11.

d) Se consideră biela înlocuită cu două mase m_1 şi m_2, plasate pe direcţia acesteia, în două puncte oarecare la distanţele x_1, respectiv x_2 de centrul ei de greu-

Fig. 21.12.

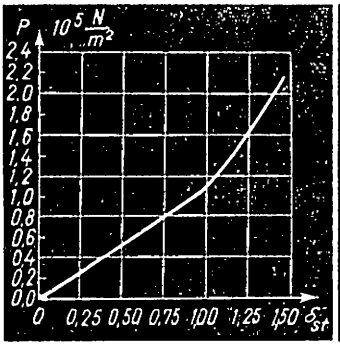


Fig. 21.13.

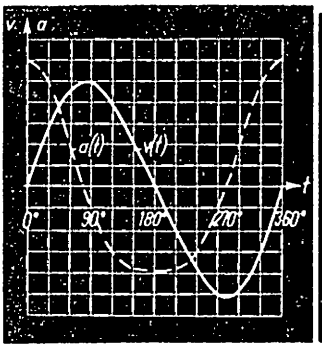
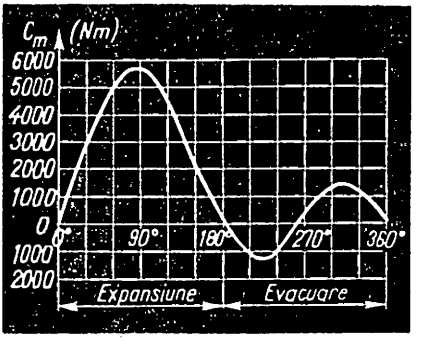


Fig. 21.14.



tate. Pentru echivalență, din punct de vedere dinamic, trebuie îndeplinite în același timp condițiile :

$$m_1+m_2=m_B\,;\ m_1x_1-m_2x_2=0\,;\ m_1x_1^2+m_2x_2^2=m_Bi^2, \tag{4}$$

în care i este raza de girație a bielei.

Din relațiile precedente se deduce :

$$m_1=m_B\frac{x_2}{x_1+x_2}\,;\ m_2=m_B\frac{x_2}{x_1+x_2}\,;\ x_1x_2=i^2. \tag{5}$$

Dacă masa m_1 se plasează în extremitatea M a bielei și masa m_2 în extremitatea P a bielei, $x_1=c$ și $x_2=l-c$ iar valorile maselor devin :

$$m_1=m_B\frac{l-c}{l}=3{,}65\text{ kg}\,;\ m_2=m_B\frac{c}{l}=2{,}45\text{ kg}.$$

Ca urmare cînd masele se plasează la capetele bielei nu se mai obține un sistem echivalent din punct de vedere dinamic, deoarece în acest caz ecuația 3-a din (4) nu mai este verificată. Partea a doua a acestei relații va avea o altă valoare, cu alte cuvinte sistemul admite o altă rază de girație i' :

$$m_1c^2+m_2(l-c)^2=m_B\cdot i'^2,$$

de unde :

$$i'^2=c\,(l-c)\,:\quad i'>i.$$

Pentru a se ajunge la un sistem echivalent și din punct de vedere dinamic, trebuie să se aplice sistemului un cuplu corector, care să rotească sistemul în jurul centrului de greutate C și a cărui valoare este :

$$C_c=m_B\,(i'^2-i^2)\,\ddot{\varphi}=m_B\,(c-x_1)\,(l-c). \tag{6}$$

e) În funcționarea mecanismului apar forțe de inerție. Pentru o turație (ω_e) constantă a motorului singurele forțe de inerție ce apar sînt forțele centrifuge, care acționează asupra manivelei, și forța de inerție care acționează asupra capului de cruce și pistonului. Ținînd seama de cele arătate la punctul *d* referitor la descompunerea masei bielei în două mase echivalente și proiectînd forțele de inerție pe două axe de coordonate *xoy*, se poate scrie :

$$X=(F_c+F_c')\cos\theta-m'\ddot{x},\quad Y=(F_c+F_c')\sin\theta, \tag{7}$$

în care $F_c=mb\omega^2$; $F_c'=m_1r\omega^2$; $m'=m_2+m_p$.

În urma calculelor se obține :

$$\begin{aligned} X&=\omega_c^2\,[(mb+m_1r+m'r)\cos\theta+A_2m'r\cos 2\theta]\,;\\ Y&=\omega_c^2\,(mb+m_1r)\sin\theta. \end{aligned} \tag{8}$$

Pentru a nu avea eforturi în axul manivelei, trebuie ca $X=0$; $Y=0$, și deci :

$$mb+m_1r=0\quad\text{și}\quad m'=0. \tag{9}$$

Prima condiție este realizată prin adăugarea unei contragreutăți de masă m, care se va plasa în prelungirea manivelei la o distanță b de axa de rotație dată de :

$$b=-\frac{m_1}{m}r.$$

Ținînd seamă că $m'=m_p+m_2$, condiția revine la egalitatea $m_p=-m_2$, acest lucru realizîndu-se prin adăugarea unei contragreutăți de masă m_p, care se va plasa în prelungirea bielei la o distanță c de capătul M :

$$c=\frac{m_p}{m_B}l.$$

Observație. Cu toate că din punct de vedere teoretic se obține o echilibrare perfectă, totuși, din punct de vedere practic, soluția este neaplicabilă din cauza prelungirii excesive a bielei dincolo de axul manivelei.

f) Asupra sistemului acționează o forță periodică :

$$P=m'r\omega_e^2(\cos\omega_e t+A_2\cos 2\omega_e t),$$

în care termenul $A_2\cos 2\omega_e t$ fiind mic în raport cu primul termen $\cos\omega_e t$ se poate neglija. Neglijînd rezistența stratului amortizor, mișcarea motorului șasiului și fundației sale pe stratul elastic de plută, în raport cu un sistem de axe fixe, este dată de ecuația :

$$M\frac{d^2x'}{dt^2}+kx'=m'r\omega_e^2\cos\omega_e t.$$

Amplitudinea oscilației forțate este :

$$x'_{max}=\frac{m'r\omega_e^2}{k\left[1-\left(\frac{\omega_e}{\omega_p}\right)^2\right]}. \qquad (10)$$

Urmează a se calcula fiecare termen al acestei relații :

$$m'r\omega_e^2=12{,}45\cdot 0{,}2\cdot 26{,}17^2=17\,060\text{ N}.$$

Pentru a se determina frecvența proprie a stratului elastic este necesar să se cunoască săgeata sub acțiunea sarcinii statice. Pentru o presiune de :

$$p=3{,}2.10^4\text{ N/m}^2,$$

din diagrama din figura 21.12 se deduce : $\delta_{st}=0{,}033$ mm ;

$$n_p=\frac{300}{\sqrt{\delta_{st}}}=1\,648\text{ rot/min},$$

de unde : $\omega_p=173\,s^{-1}$.

Pentru valoarea $\omega_p/\omega_e=6{,}6$ se constată că, prin interpunerea între fundație și planșeu a stratului de plută, sistemul este ferit de a intra în rezonanță.

Cu notația:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K}{M}},$$

rezultă:

$$K = \omega_p^2 M = 95.776.10^4 \text{ N/m}.$$

Înlocuind în (10) valorile astfel calculate, se obține:

$$X_{max} = 0{,}019 \text{ mm},$$

valoare mult inferioară limitei admisibile indicate de memoratoare tehnice

Anexa 2 (continuare)

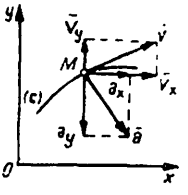
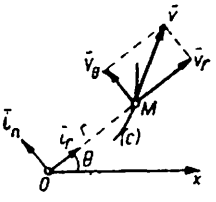
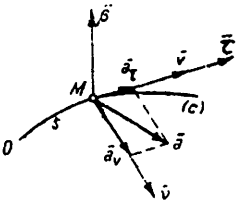
3. Valori pentru $e^{\mu\alpha}$

$\frac{\alpha}{2\pi}$	μ (coeficientul de frecare)								
	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0,1	1,06	1,1	1,13	1,17	1,21	1,25	1,29	1,33	1,37
0,2	1,13	1,21	1,29	1,37	1,46	1,55	1,65	1,76	1,87
0,3	1,21	1,32	1,45	1,60	1,76	1,93	2,13	2,34	2,57
0,4	1,29	1,46	1,65	1,87	2,12	2,41	2,73	3,10	3,51
0,425	1,31	1,49	1,70	1,95	2,23	2,55	2,91	3,33	3,80
0,45	1,33	1,53	1,76	2,03	2,34	2,69	3,10	3,57	4,11
0,475	1,35	1,56	1,82	2,11	2,45	2,84	3,30	3,83	4,45
0,5	1,37	1,60	1,87	2,19	2,57	3,00	3,51	4,11	4,81
0,525	1,39	1,64	1,93	2,28	2,69	3,17	3,74	4,41	5,20
0,55	1,41	1,68	2,00	2,37	2,82	3,35	3,98	4,74	5,63
0,6	1,46	1,76	2,13	2,57	3,10	3,74	4,52	5,45	6,59
0,7	1,55	1,93	2,41	3,00	3,74	4,66	5,81	7,24	9,02
0,8	1,65	2,13	2,73	3,51	4,52	5,81	7,47	9,60	12,35
0,9	1,76	2,34	3,10	4,11	5,45	7,24	9,60	12,74	16,90
1,0	1,86	2,57	3,51	4,81	6,59	9,02	12,35	16,90	23,14
1,5	2,57	4,11	6,59	10,55	16,90	27,08	43,38	69,49	111,32
2,0	3,51	6,59	12,35	23,14	43,38	81,31	152,40	285,68	535,49
2,5	4,81	10,55	23,14	50,75	111,15	244,15	535,49	1174,5	2575,9
3,0	6,59	16,90	43,38	111,32	285,68	733,14	1881,5	4828,5	12391,0
3,5	9,02	27,08	81,31	244,15	733,14	2199,90	6610,7	19851,0	59608,0
4,0	12,35	43,38	152,40	535,49	1881,5	6610,7	23227,0	81610,0	286744,0

Anexa 3

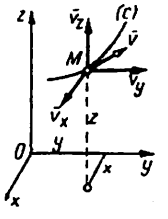
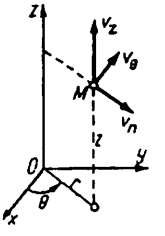
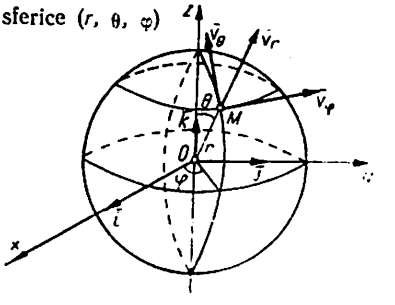
Componentele vitezei şi acceleraţiei în diferite sisteme de coordonate

1. *În plan*

	carteziene (x, y).	polare (r, θ).	intrinseci (s)
Schiţă			
Legea mişcării	$x=x(t)$. $y=y(t)$'	$r=r(t)$ $\theta=\theta(t)$	$s=s(t)$
Traiectoria	$F(x, y)=0$	$F(r, \theta)=0$	Planul osculator este planul curbei
Viteze	$v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t)$; $v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}(t)$. $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ $\operatorname{tg}(\overline{v}, \overline{ox})=\frac{v_y}{v_x}$	$v_r=\frac{dr}{dt}=\dot{r}(t)$; $v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}=r\dot{\theta}(t)$' $v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}$ $\operatorname{tg}(\overline{v}, \overline{r})=r\dot{\theta}$	$v_\tau=\frac{ds}{dt}=\dot{s}$ $v_\nu=0$; $v_\beta=0$. $\overline{v}=\frac{ds}{dt}\overline{\tau}=\dot{s}\overline{\tau}$
Acceleraţii	$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}(t)$; $a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y}(t)$. $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$ $\operatorname{tg}(\overline{a}, \overline{ox})=\frac{a_y}{a_x}$.	$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$; $a_\theta=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$. $a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}$ $\operatorname{tg}(\overline{a}, \overline{r})=\frac{a_\theta}{a_r}$	$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\ddot{s}$ $a_\nu=\frac{v^2}{\rho}$ $a_\beta=0$. $a=\sqrt{a_\tau^2+a_\nu^2}$ $\operatorname{tg}(\overline{a}, \overline{v})=\frac{a_\nu}{a_\tau}$

Anexa 3 (continuare)

2. *În spațiu*

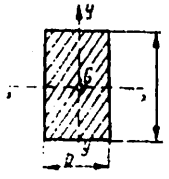
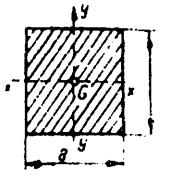
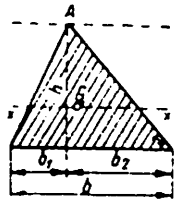
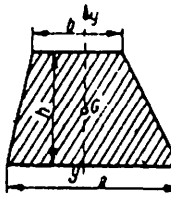
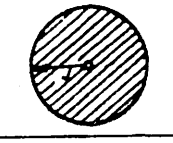
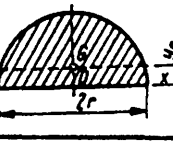
carteziene (x, y, z).	cilindrice (r, θ, z),	sferice (r, θ, φ)
		
$x=x(t)$ $y=y(t)$ $z=z(t)$ $F_1(x, y)=0$; $F_2(y, z)=0$.	$r=r(t)$ $\theta=\theta(t)$ $z=z(t)$ $F_1(r, \theta)=0$; $F_2(z, \theta)=0$.	$r=r(t)$ $\theta=\theta(t)$ $\varphi=\varphi(t)$ $F_1(r, \theta, \varphi)=0$; $F_2(r, \theta, \varphi)=0$;
$v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t)$; $v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}(t)$; $v_z=\frac{dz}{dt}=\dot{z}(t)$; $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$.	$v_r=\frac{dr}{dt}=\dot{r}(t)$; $v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}=r\dot{\theta}(t)$; $v_z=\frac{dz}{dt}=\dot{z}(t)$. $v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2+v_z^2}$	$v_r=\dot{r}$ $v_\varphi=r\dot{\varphi}\sin\theta$ $v_\theta=r\dot{\theta}$ $v=\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2+v_\theta^2}$
$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}(t)$; $a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y}(t)$; $a_z=\frac{d^2z}{dt^2}=\ddot{z}(t)$; $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$	$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=$ $=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ $a_\theta=\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$; $a_z=\frac{d^2z}{dt^2}=\ddot{z}$ $a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2+a_z^2}$	$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$ $a_\varphi=r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2\dot{\theta}\dot{\varphi}r\cos\theta$ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta$ $a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2+a_\varphi^2}$

Notă: 1. Relațiile de legătură între coordonatele cilindrice și cele carteziene sînt:
$x=r\cos\theta$; $y=r\sin\theta$; $z=z$

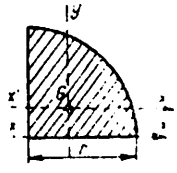
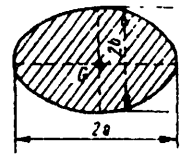
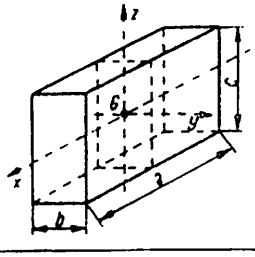
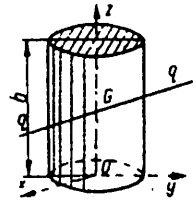
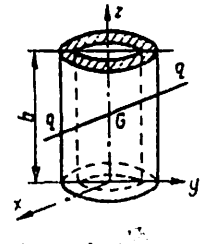
2. Relațiile de legătură între coordonatele sferice și cele carteziene sînt:
$x=r\sin\theta\cos\varphi$; $y=r\sin\theta\sin\varphi$; $z=r\cos\theta$

Anexa 4

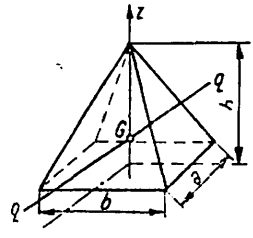
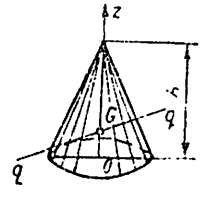
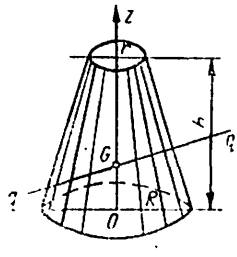
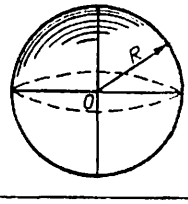
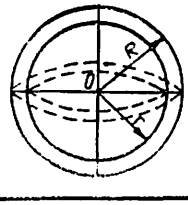
Momente de inerţie ale diferitelor figuri geometrice

Secţiunea	Figura	Axa	Momentul de inerţie	
			geometric	mecanic
Dreptunghi		baza b	$b\,h^3/3$	$Mh^2/3$
		axa $x\ x$	$bh^3/12$	$Mh^2/12$
		axa $y\ y$	$b^3h/12$	$Mb^2/12$
Pătrat		latura a	$a^4/3$	$M\,a^2/3$
		axa $x\ x$ axa $y\ y$	$a^4/12$	$Ma^2/12$
Triunghi		baza b	$b\,h^3/12$	$Mh^2/6$
		axa $x\ x$	$b\,h^3/36$	$Mh^2/18$
		axa prin vîrful A	$b\,h^3/4$	$Mh^2/2$
		înălţimea h	$h\,(b_1^3+b_2^3)/12$	$M\,(b_1^3+b_2^3)/6b$
Trapez		baza mică b	$(3a+b)h^3/12$	$M\,\frac{h^2}{6}\cdot\frac{3a+b}{a+b}$
		baza mare a	$(3b+a)h^3/12$	$M\,\frac{h^2}{6}\cdot\frac{a+3b}{a+b}$
		axa $y\ y$	$\frac{h}{48}\cdot\frac{a^4-b^4}{a-b}$	$M\,\frac{a^2+b^2}{24}$
Cerc		diametru	$\pi r^4/4$	$Mr^2/4$
		moment de inerţie polar	$\pi r^4/2$	$Mr^2/2$
Semicerc		diametrul d	$\pi r^4/8$	$Mr^4/4$
		axa $x\ x$	$\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)r^4$	$M\,\frac{r^2}{4}\left(1-\frac{64}{9\pi^2}\right)$

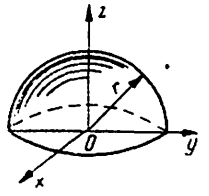
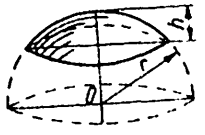
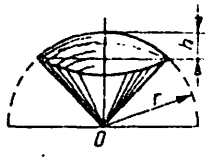
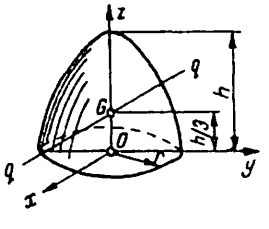
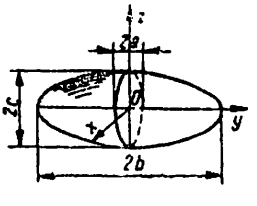
Anexa 4 (continuare)

Secțiunea	Figura	Axa	Momentul de inerție	
			geometric	mecanic
Sfert de cerc		axa xx	$\pi r^4/16$	$Mr^2/4$
		axa $x'x'$	$\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)r^4$	$M\frac{r^2}{4}\left(1-\frac{64}{9\pi^2}\right)$
Elipsă		axa mare ($2a$)	$\pi ab^3/4$	$M\frac{b^2}{4}$
		axa mică ($2b$)	$\pi a^3 b/4$	$M\frac{a^2}{4}$
Paralelipiped		axa x	$\frac{abc}{12}(b^2+c^2)$	$M\frac{b^2+c^2}{12}$
		axa y	$\frac{abc}{12}(c^2+a^2)$	$M\frac{c^2+a^2}{12}$
		axa z	$\frac{abc}{12}(a^2+b^2)$	$M\frac{a^2+b^2}{12}$
Cilindru circular drept		axa z	$\frac{\pi r^4 h}{2}$	$M\frac{r^2}{2}$
		axa $q\ q$	$\frac{\pi r^2 h}{12}(3r^2+h^2)$	$M\frac{3r^2+h^2}{12}$
Cilindru gol		axa z	$\frac{\pi h}{2}(R^4-r^4)$	$M\frac{R^2+r^2}{2}$
		axa qq	$\frac{\pi(R^2-r^2)h}{4}\left(R^2+r^2+\frac{h^2}{3}\right)$	$M\frac{R^2+r^2+h^2/3}{4}$

Anexa 4 (continuare)

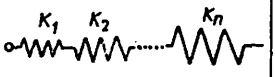
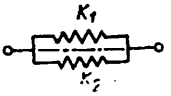
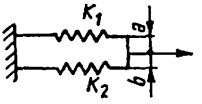
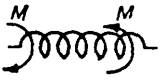
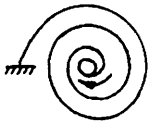
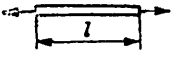
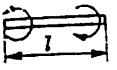
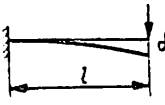
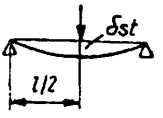
Secțiunea	Figura	Axa	Momentul de inerție	
			geometric	mecanic
Piramidă dreptunghiulară		axa z	$\frac{abh}{60}(a^2+b^2)$	$M\frac{a^2+b^2}{20}$
		axa qq	$\frac{abh}{60}\left(b^2+\frac{3h^2}{4}\right)$	$M\frac{b^2+3h^2/4}{20}$
Con circular drept		axa z	$\frac{\pi r^4 h}{10}$	$M\frac{3r^2}{10}$
		axa qq	$\frac{\pi r^2 h}{20}\left(r^2+\frac{h^2}{4}\right)$	$M\frac{3}{20}\left(r^2+\frac{h^2}{4}\right)$
Trunchi de con		axa z	$\frac{\pi h}{10}\frac{R^5-r^5}{R-r}$	$M\frac{3}{10}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
Sferă		diametru	$\frac{8\pi R^5}{15}$	$M\frac{2}{5}R^2$
		tangentă	$\frac{28\pi R^5}{15}$	$M\frac{7}{5}R^2$
Sferă goală		diametru	$\frac{8\pi(R^5-r^5)}{15}$	$M\frac{2}{5}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
		tangentă	$\frac{4\pi}{15}(7R^5-5R^2r^3-2r^5)$	$M\frac{1}{5}\frac{7R^5-5R^2r^3-2r^5}{R^3-r^3}$

Anexa 4 (continuare)

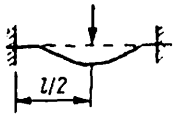
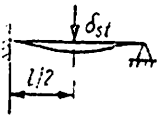
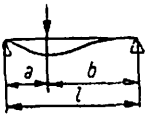
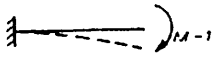
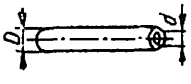
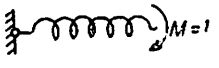
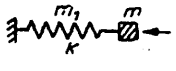
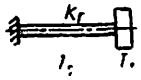
Secțiunea	Figura	Axa	Momentul de inerție	
			geometric	mecanic
Emisferă		axa x axa y axa z	$\frac{4\pi r^5}{15}$	$M\frac{2}{5}r^2$
Segment de sferă		axă de simetrie	$\frac{\pi h^2}{30}(20r^2-15rh+3h^2)$	$M\frac{h}{10}\cdot\frac{20r^2-15rh+3h^2}{3r-h}$
Sector sferic		axă de simetrie	$\frac{2\pi r^2h^2}{15}(3r-h)$	$M\frac{h}{5}(3r-h)$
Paraboloid		axa z	$\frac{1}{6}\pi hr^4$	$M\frac{r^2}{3}$
		axa qq	$\frac{1}{36}\pi hr^2(3r^2+h^2)$	$M\frac{1}{18}(3r^2+h^2)$
Elipsoid		axa x	$\frac{4}{15}abc(b^2+c^2)$	$M\frac{b^2+c^2}{5}$
		axa y	$\frac{4}{15}abc(a^2+c^2)$	$M\frac{a^2+c^2}{5}$
		axa z	$\frac{4}{15}abc(a^2+b^2)$	$M\frac{a^2+b^2}{5}$

Constante elastice

Anexa 5

	$\frac{1}{K_e}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\ldots+\frac{1}{K_n}$	
	$K_e=K_1+K_2$	
	$K_e=\frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{K_2}+\frac{b^2}{K_1}}$	
	$K=\frac{Gd^4}{64\,nR^3}$	n—număr de spire
	torsiune arc $K=\frac{Ed^4}{64nD}$	d—diametrul spirei; D—diametrul de înfășurare
	arc spiral $K=\frac{EI}{l}$	I—momentul de inerție al secțiunii transversale al arcului; l—lungimea arcului
	$K=\frac{EA}{l}$	A-aria secțiunii transversale
	$K=\frac{G\cdot I}{l}$	G—modul de elasticitate transversal; I—momentul de inerție polar al secțiunii
	$K=\frac{1}{\delta_{st}}=\frac{1}{v}=\frac{3EI_z}{l^3}$	$v=\delta_{st}$—săgeata statică
	$K=\frac{48EI_z}{l^3}$	

Anexa 5 (continuare)

	$K=\frac{192EI_z}{l^3}$	
	$K=\frac{768EI_z}{7l^3}$	
	$K=\frac{3EI_z l}{a^2\,b^2}$	
	$K=\frac{EI}{l}$	
	răsucire arbore circular gol $K=\frac{GI_p}{l}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{G(D^4-d^4)}{l}$	
	încovoiere arc elicoidal $K=\frac{Ed^4}{32nD}\cdot\frac{1}{1+\frac{E}{2G}}$	
	m_1 masa arcului $\omega_n=\sqrt{\frac{K}{m+\frac{m_1}{3}}}$	ω_n — pulsația proprie
	I_1 moment inerție disc I_2 moment inerție bară K_r rigiditate bară $\omega_n=\sqrt{\frac{K_r}{I_1+\frac{I_2}{3}}}$	ω_n — pulsația proprie

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Buchholț, ș.a., *Culegere de probleme de mecanică rațională* (traducere din l. rusă), București, Edit. tehnică, 1951.
2. Henri Cabannes, *Problèmes de mécanique générale* Paris, Dunod, 1966.
3. Mc. Lean, E. Nelson, *Theory and problems of Engineering Mechanics* (second edition). Schaum Publishing New-York, 1962.
4. I. V. Meshchersky, *Collection of problems in theoretical mechanics*, Moscova, 1968
5. M. Nițâ ș. a., *Culegere de probleme de mecanică teoretică* I; II. Edit A. M. G. București, 1966.
6. M. Rădoi, E. Deciu, *Curs de mecanică. Dinamica și elemente de mecanică analitică* (lito). Inst. politehnic București, 1970.
7. A. Stan, *Curs de mecanică, Statica*, București, Edit. Politehnica, 1956
8. A. Stoenescu, Gh. Silaș, *Curs de mecanică teoretică*. București, Edit. tehnică, 1964.
9. Al. Stoenescu, A. Rîpianu, *Culegere de probleme de mecanică teoretică*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1965
10. S. Timoshenko, D. H. Young, *Advanced Dynamics*, Mc. Graw-Hill Book Comp., New-York, 1948.
11. V. Vâlcovici, St. Bălan, R. Voinea, *Mecanică teoretică*, București, Edit. tehnică, 1969.
12. R. Voinaroski, *Mecanică teoretică*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1968

CUPRINSUL

Prefața 3

Partea întîi

STATICA

Cap. 1. **Forțe. Sisteme de forțe. Reducerea forțelor** 7
A. Considerații teoretice 7
B. Probleme rezolvate 14
C. Probleme nerezolvate 30

Cap. 2. **Centre de masă** 41
A. Considerații teoretice 41
B. Probleme rezolvate 44
C. Probleme nerezolvate 51

Cap. 3. **Statica punctului material** 56
A. Considerații teoretice 56
B. Probleme rezolvate 61
C. Probleme nerezolvate 68

Cap. 4. **Statica rigidului** 71
A. Considerații teoretice 71
B. Probleme rezolvate 75
C. Probleme nerezolvate 83

Cap. 5. **Statica sistemelor de corpuri** 89
A. Considerații teoretice 89
B. Probleme rezolvate 90
C. Probleme nerezolvate 97

Cap. 6. **Sisteme de bare articulate** 103
A. Considerații teoretice 103
B. Probleme rezolvate 105
C. Probleme nerezolvate 111

Cap. 7. **Statica firelor** 117
A. Considerații teoretice 117
B. Probleme rezolvate 119
C. Probleme nerezolvate 129

Partea a doua

CINEMATICA

Cap. 8. **Cinematica punctului material** 135
A. Considerații teoretice 135
B. Probleme rezolvate 139
C. Probleme nerezolvate 158

Cap. 9. **Cinematica solidului rigid** 164
A. Considerații teoretice 164
B. Probleme rezolvate 168
C. Probleme nerezolvate 172

Cap. 10. **Mișcarea plan paralelă. Cinematica mecanismelor** 175
A. Considerații teoretice 175
B. Probleme rezolvate 181
C. Probleme nerezolvate 198

Cap. 11. **Mișcarea relativă a rigidului. Compuneri de mișcări** 204
A. Considerații teoretice 204
B. Probleme rezolvate 206
C. Probleme nerezolvate 209